
Miroslav Hušek, Jiří Spurný a Benjamin Vejnar

Topologie

Obsah

1	Základní topologické pojmy	9
1.1	Topologický prostor, otevřené a uzavřené množiny	9
1.2	Konvergence	16
1.3	Vnitřek, uzávěr a hranice	18
1.4	Husté a řídké množiny, hromadné body množiny	22
1.5	Základní kardinální charakteristiky topologického prostoru	25
1.6	Spojité zobrazení	26
1.7	Oddělovací axiomy	31
1.7.1	Úplně regulární prostory	36
1.7.2	Hausdorffovy prostory	38
1.7.3	Regulární prostory	39
1.7.4	Normální prostory	39
2	Základní operace s topologickými prostory	49
2.1	Obecné konstrukce	49
2.2	Podprostor a součin	53
2.3	Kvocient a suma	57
2.4	Zachovávání vlastností konstrukcemi	60
2.4.1	Zachovávání vlastností podprostory	60
2.4.2	Zachovávání vlastností součiny	63
2.4.3	Zachovávání vlastností kvocienty	67
2.4.4	Zachovávání vlastností sumou	69
2.5	Shrnutí	69
3	Kompaktnost	71
3.1	Kompaktní prostory	71
3.1.1	Složitější charakterizace kompaktnosti	78
3.2	Prostory spojitých funkcí na kompaktu	81
3.3	Kompaktifikace	84
4	Metrizovatelnost a čechovská úplnost	93
4.1	Metrizovatelnost	93
4.2	Úplnost	95
4.2.1	Úplné metrické prostory	95
4.2.2	Úplně metrizovatelné prostory	98
4.2.3	Úplnost v Čechově smyslu	101
5	Uniformní prostory	107
5.1	Základní definice a vlastnosti	107
5.1.1	Topologie na uniformních prostorech	112
5.1.2	Uniformity pomocí pokrytí	115
5.1.3	Vlastnosti uniformních prostorů	121
5.2	Konstrukce	124
5.3	Úplnost	139
5.3.1	Použití uniformit na topologické prostory	143
5.3.2	Zúplnění pomocí filtrů	146

Úvodní pojmy

Kvůli terminologii a značení uvedeme v této úvodní části základní pojmy z teorie množin, uspořádaných a metrických prostorů. Půjde jen o přehled, nikoli podrobnosti. Většinu podrobností a dalších vztahů lze najít v publikaci Balcar B., Štěpánek P., Teorie množin, Academia ČR (2001).

V teorii množin budeme vždy pracovat za předpokladu axiomů ZFC, tedy i s axiomem výběru. To je jen konstatování pro znalce, text znalost axiomů nepředpokládá. Předpokládáme ovšem základní znalosti práce s množinami a zobrazeními. Zmíníme se v tomto úvodu hlavně o ordinálních a kardinálních číslech a o některých konstrukcích množin, jako jsou např. součiny. Dodáme některé další pojmy a jejich vlastnosti, které budeme používat (filtry a ultrafiltry, skoro disjunktivní soustavy množin). Kvůli značení a termínům zopakujeme i základní pojmy metrických prostorů.

Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je injektivní (neboli prosté), jestliže $f(x_1) \neq f(x_2)$ pro $x_1 \neq x_2$, je surjektivní (neboli na), jestliže $f(X) = Y$, je bijektivní (neboli isomorfismus množin), je-li injektivní i surjektivní (pak f^{-1} je inverzní bijekce $Y \rightarrow X$). Identické zobrazení na množině X budeme značit 1_X nebo Id_X . Zúžení zobrazení $f : X \rightarrow Y$ na množinu $A \subset X$ značíme $f \upharpoonright A : A \rightarrow Y$.

Symboly $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}, \mathbb{C}$ značí po řadě množinu reálných, racionálních, iracionálních, komplexních čísel spolu s jejich uspořádáním a aritmetickými vlastnostmi.

Uspořádání

Uspořádání na množině X je relace ρ na X , která je reflexivní, transitivní a slabě antisymetrická, tj. pro libovolná $x, y, z \in X$ platí:

- (1) $(x, x) \in \rho$;
- (2) $(x, y), (y, z) \in \rho \Rightarrow (x, z) \in \rho$;
- (3) $(x, y), (y, x) \in \rho \Rightarrow x = y$;

Platí-li navíc, že pro každé $x, y \in X$ platí buď $(x, y) \in \rho$ nebo $(y, x) \in \rho$, nazveme relaci ρ *lineárním uspořádáním*. Dvojice (X, ρ) se pak nazývá (lineárně) uspořádaná množina.

V literatuře se najdou pro lineární uspořádání i termíny totální nebo monotonní uspořádání. V množině všech relací uspořádání v $X \times X$ jsou lineární uspořádání maximálními prvky vzhledem k inkluzi.

Většinou budeme místo $(x, y) \in \rho$ psát $x \leq y$. Pak $x < y$ znamená, že $x \leq y, x \neq y$. Používá se i symbol $x \leqslant y$.

Nechť X je uspořádaný prostor a $x, y \in X$. Bod y se nazývá následník (nebo předchůdce) bodu x , jestliže $x < y$ (resp. $y < x$) a neexistuje $z \in X$ s vlastností $x < z < y$ (resp. $y < z < x$). Bod $x \in X$ se nazývá největší (nebo nejmenší), jestliže $y \leq x$ (resp. $x \leq y$) pro každé $y \in X$. Bod $x \in X$ se nazývá maximální (nebo minimální), jestliže $x < y$ (resp. $y < x$) pro žádné $y \in X$.

Podmnožina A v X se nazývá kofinální (správněji doprava nebo nahoru kofinální), pokud pro každé $x \in X$ existuje $a \in A$ s vlastností $x \leq a$ (např. $\mathbb{N}$ je kofinální v $\mathbb{R}$ v obvyklém uspořádání reálných čísel).

Uspořádaná množina se nazývá dobře uspořádaná, jestliže každá její neprázdná podmnožina má nejmenší prvek. Lehko nahlédneme, že každá dobře uspořádaná množina je lineárně uspořádaná (a každá lineárně uspořádaná množina má kofinální dobře uspořádanou část). Uspořádaný prostor je dobře uspořádaný právě když neobsahuje nekonečnou klesající posloupnost. Například $\mathbb{N}$ je dobře uspořádaná v obvyklém uspořádání, ale $\mathbb{Z}$ není dobře uspořádaná. Za předpokladu axiomů ZFC se dá ukázat, že každá množina se dá dobře uspořádat.

Platí tzv. transfinální indukce: *Nechť X je dobře uspořádaná množina a $P(x)$ je vlastnost prvku $x \in X$. Předpokládejme, že P v nejmenším prvku množiny X je splněno a dále také pro každé $y \in X$ je splněna implikace*

$$(\forall x < y : P(x) \text{ platí}) \Rightarrow P(y) \text{ platí.}$$

Pak $P(x)$ je splněno pro všechna $x \in X$.

Je-li $(X, \leq)$ uspořádaná množina a $A \subset X$, prvek $x \in X$ se nazývá horní mez množiny A v X , jestliže $a \leq x$ pro každé $a \in A$. Existuje-li takové x , nazývá se A shora omezená. Nejmenší horní mez množiny A , pokud existuje, je supremum $\sup A$ množiny A . Je zřejmé, jak se definuje dolní mez množiny, její infimum a omezenost zdola. Množina je omezená, je-li omezená zdola i shora.

Kuratowského-Zornovo lemma říká: *Je-li X neprázdná uspořádaná množina a každá lineárně uspořádaná podmnožina má horní mez v X , pak pro každý bod $x \in X$ existuje maximální prvek v X větší nebo roven x .*

convex lots

Podmnožina A uspořádané množiny $(X, <)$ se nazývá *konvexní*, jestliže platí $(a < b < c, a, c \in A \Rightarrow b \in A)$. Speciálními případy konvexních množin jsou intervaly. Omezený interval J je dán dvěma body $x \leq y$ a skládá se ze všech bodů z pro něž $x < z < y$, po případě do J může patřit jeden z krajních bodů x, y nebo oba (J se pak značí jako (x, y) , $[x, y)$, $(x, y]$ nebo $[x, y]$ a dostáváme interval otevřený nebo polootevřený nebo uzavřený). Mezi intervaly zařadíme i konvexní množiny tvaru $\uparrow x = \{y \in X; x \leq y\}$ (uzavřený interval) nebo $\uparrow x \setminus \{x\}$ (otevřený interval). Časté je značení $[x, \infty)$, $[x, \rightarrow)$ nebo (x, ∞) , $(x, \rightarrow)$. Je vhodné zdůraznit, že uvedené označení se použije i v případě, kdy X má největší prvek, např. m . Potom je $(x, \infty) = (x, m]$ a tento interval je otevřený. V případě, že největší prvek neexistuje, jsou tyto intervaly shora neomezené. Podobně zdola $\downarrow x, (-\infty, x)$, atd.

Mějme dvě lineárně uspořádané množiny X, Y . Na množině uspořádaných dvojic $(x, y), x \in X, y \in Y$, definujeme $(x, y) < (u, v)$ jestliže buď $x < u$ nebo $x = u, y < v$. Získané uspořádání je lineární a nazývá se lexikografické. Uspořádání po souřadnicích, tj. $(x, y) \leq (u, v)$, je-li $x \leq u, y \leq v$, není obecně lineární.

Pro definici konvergence v topologickém prostoru budeme potřebovat zobecnění posloupností. Jako u kofinality budeme potřebovat jen směr „nahoru“ („doprava“). Uvidíme později, že oproti posloupnostem (tj. zobrazením s definičním oborem $\mathbb{N}$) nestačí v topologických prostorech použít zobrazení na lineárně uspořádaných množinách.

Uspořádaná množina A se nazývá usměrněná (přesněji nahoru nebo doprava usměrněná), jestliže každé dva prvky A mají horní mez v A .

Definice 0.1. Usměrněný soubor

Usměrněný soubor v množině X je zobrazení $f : A \rightarrow X$, kde A je usměrněná množina.

Nechť $f : A \rightarrow X$ je usměrněný soubor, B je usměrněná množina, $\varphi : B \rightarrow A$ je zobrazení zachovávající uspořádání a $\varphi(B)$ je kofinální v A . Pak $f \circ \varphi : B \rightarrow X$ je usměrněný soubor, který se nazývá *usměrněným podsouborem* souboru f . $\square$

Většinou usměrněný soubor značíme $\{x_a\}_A$, kde A je ona usměrněná množina a $x_a = f(a)$. Speciálním případem usměrněného podsouboru je jeho kofinální část. Tyto speciální podsoubory stačí v případě posloupností (konvergence v metrických prostorech), v obecných topologických prostorech však musíme použít naši složitější definici.

Ordinální a kardinální čísla

Teorie ordinálních a kardinálních čísel je náročnější a nemůžeme v tomto úvodu uvést přesné definice a vztahy.

Ze dvou množin se dá vždy jedna z nich zobrazit prostě do druhé, čímž je dána relace na třídě všech množin, která je reflexivní a transitivní (říkáme, že mohutnost jedné množiny je menší nebo rovna mohutnosti druhé množiny). Není však antisymetrická. Musíme z třídy množin mající stejnou mohutnost vybrat jednu – na třídě těchto výběrů bude zmíněná relace antisymetrická a dostáváme uspořádání (na vlastní třídě). K tomu se vrátíme za chvíli.

Dvě dobře uspořádané množiny jsou stejného typu, jestliže existuje bijekce mezi nimi zachovávající uspořádání. Dá se ukázat, že jsou-li X, Y dvě dobře uspořádané množiny, existuje injekce jedné z nich do druhé, řekněme $\varphi : X \rightarrow Y$, takové, že $\varphi(X)$ je konvexní v Y a obsahuje nejmenší prvek v Y . Podobně jako výše u mohutností, máme tím definovanou relaci na třídě uspořádaných množin a po výběru reprezentantů z každého typu dostáváme uspořádanou třídu. Dá se ukázat, že tato třída je dobře uspořádaná a příslušní reprezentanti se dají vhodně rekurzivně popsat. Označíme tuto třídu Ord a její prvky nazveme ordinální čísla (krátce ordinály).

Nejmenší prvek třídy Ord přísluší prázdné množině a označíme ho 0. Další prvek bude jednobodový a dá se chápat jako množina $\{0\}$, označíme ho 1, a platí $0 < 1$. Postupně označíme n typ množiny $\{0, \dots, n-1\}$ a bude platit $n-1 < n$. Po vyčerpání všech konečných množin dostaneme množinu všech přirozených čísel, kterou jako dobře uspořádanou obsahující všechna čísla n označíme ω . Další v pořadí dobře uspořádanou množinou je množina vzniklá přidáním bodu za všechna čísla n – tento typ označíme $\omega+1$. Postupujeme

dále a dostáváme postupně $\omega + 2, \dots, \omega + n$, až vznikne typ $\omega + \omega$. Transfinitní indukci tak lze definovat všechny representanty typů dobře uspořádaných množin, které tvoří dobře uspořádanou množinu Ord.

Pokud ordinální číslo vzniklo přidáním bodu k předchozímu (např. $\omega + 1$) nazývá se izolované, tj. má předchůdce (každé ordinální číslo má následníka). Pokud ordinální číslo vzniklo sjednocením všech předešlých (jako $\omega, \omega + \omega$), nazývá se limitní, předchůdce nemá.

Po jistém kroku přidávání dalších bodů musíme poprvé dospět k nespočetné mohutnosti. Toto ordinální číslo se značí ω_1 a je to dobře uspořádaná množina všech spočetných ordinálních čísel. Tato množina se jako uspořádaná množina často v topologii používá jako příklad na specifické vlastnosti.

- Dobře uspořádaná množina ω_1 je nespočetná, má nejmenší prvek, nemá největší prvek, každý prvek má následníka.
- Každá spočetná podmnožina v ω_1 má v ω_1 supremum.
- Platí Fodorovo lemma: *Je-li zobrazení $f: \omega_1 \rightarrow \omega_1$ regresivní (tj. $f(\alpha) < \alpha$ pro každé $0 < \alpha \in \omega_1$), pak f je konstantní na nějaké neomezené podmnožině ω_1 .*

Fodorovo lemma se v angličtině často nazývá Pressing Down Lemma a platí obecněji na regulárních nespočetných kardinálech (viz dále) místo na ω_1 . Navíc nemusí být definováno na všech ordinálech v κ , stačí na tzv. stacionární množině (např. jen na všech limitních ordinálech v κ). Uvedená neomezená množina je také stacionární.

Vrátíme se k mohutnostem. Dospěli jsme k vyhledání vhodných representantů z třídy prostorů majících stejnou mohutnost. V naší konstrukci ordinálních čísel vždy pro danou mohutnost existuje první ordinální číslo oné mohutnosti (má větší mohutnost než menší ordinály). Vezmeme takové první číslo za hledaného representanta a budeme ho nazývat kardinální číslo. Dostaneme postupně čísla $0, 1, 2, \dots, \omega, \omega_1, \omega_2, \dots$ (dříve bylo standardní psát místo ω hebrejské písmeno $\aleph$, tj. alef). Pro množinu X bude symbol $|X|$ značit mohutnost množiny X ale i příslušné kardinální číslo k této mohutnosti. Konečné množiny tedy mají za své kardinální číslo počet svých prvků. Spočetná množina má kardinální číslo ω (občas značené ω_0), první nespočetná množina má kardinální číslo ω_1 , atd. Protože třída Card kardinálních čísel je částí dobře uspořádané třídy Ord, je sama dobře uspořádaná.

Nekonečné kardinální číslo κ se nazývá regulární, pokud žádná kofinální část v κ nemá mohutnost menší než κ (jinými slovy, každá neomezená podmnožina v κ má mohutnost κ). Takže čísla $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ jsou regulární, číslo ω_ω není regulární, je tzv. singulární. V některých formulacích o kardinálních číslech je třeba dávat pozor, zda jsou brána jako prvky třídy ordinálních čísel nebo třídy kardinálních čísel. Každé nekonečné kardinální číslo je limitní ve třídě ordinálních čísel, ale nemusí být limitní ve třídě kardinálních čísel, např. ω_1 má předchůdce ω . Takže limitní kardinální číslo bude znamenat limitní ve třídě kardinálních čísel. Stejně tak následník kardinálu κ (značí se κ^+) je jeho následník ve třídě Card, nikoli v Ord (takže $\omega^+ = \omega_1$, nikoli $\omega + 1$).

Dost často se mohutnost množiny $\mathbb{R}$ značí $\mathfrak{c}$ a nazývá mohutnost kontinua. Zda $\mathfrak{c} = \omega_1$ byl problém Cantora (hypotéza kontinua CH), který byl zcela vyřešen až po polovině minulého století: odpověď může být ano i ne, v závislosti na dodaných axiomech teorie množin k ZFC. V některých modelech teorie množin není $\mathfrak{c}$ regulární.

Občas budeme v dalším textu používat aritmetické operace s kardinálními čísly. Pro konečné součty a součiny nekonečných kardinálních čísel jsou výsledky jednoduché: $\kappa + \lambda = \kappa \cdot \lambda = \max\{\kappa, \lambda\}$. Složitější jsou mocniny kardinálních čísel. Mají-li množiny X, Y mohutnosti κ, λ resp., značí κ^λ mohutnost mocniny X^Y , tj. množiny všech zobrazení $Y \rightarrow X$ (viz následující část o operacích s množinami). Vždy platí $\kappa < 2^\kappa$, $(\kappa^\lambda)^\mu = \kappa^{\lambda \cdot \mu}$. Uvedená mocnina čísla 2 odpovídá tomu, že množina všech podmnožin množiny X má stejnou mohutnost jako množina všech zobrazení $X \rightarrow 2$ (připomínáme, že $2 = \{0, 1\}$). Dá se ukázat, že mohutnost množiny $\mathbb{R}$ je stejná jako mohutnost množiny všech podmnožin $\mathbb{Q}$ (např. každé reálné číslo je limitou posloupnosti racionálních čísel). Proto je $|\mathbb{R}| = 2^\omega$, a CH znamená $\omega_1 = 2^\omega$.

Speciální konstrukce a soustavy množin

Součiny a součty množin

Kvůli terminologii a značení uvedeme několik základních pojmů týkajících se operací s množinami. Můžeme vynechat podmnožiny, kde snad nemůže nastat nedorozumění. V jistém smyslu duální k podmnožinám (tj. definičním oborům injektivních zobrazení) jsou obory hodnot surjektivních zobrazení. Je-li $f: X \rightarrow Y$ libovolné zobrazení, je $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ ekvivalence na X a třídy ekvivalence jsou isomorfní množině $f(X)$ a tedy množině Y pokud je f surjekce. Opačně, je-li dána ekvivalence $\sim$ na X , vezme se za Y množina

ekvivalencí podle $\sim$ a příslušné f je dáno rovností $f(x) = [x]$, kde $[x]$ je množina prvků ekvivalentních x . Nebudeme tyto přístupy rozlišovat a budeme používat vždy ten, který je v daném případě vhodnější.

Důležitou konstrukcí je (kartézský) součin množin. Máme-li dvě množiny, pak $X \times Y$ je množina uspořádaných dvojic (x, y) , kde $x \in X, y \in Y$. Pro součin konečně mnoha množin $X_1, \dots, X_n$ je součin $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ množina příslušných n -tic $(x_1, \dots, x_n)$, kde $x_i \in X_i$. Tento součin se značí také jako $\prod_{i=1}^n X_i$.

Součin libovolně mnoha množin $X_i, i \in I$, se značí $\prod_I X_i$ a je to množina všech souborů $\{x_i\}$, kde $x_i \in X_i$. Jinou reprezentací součinu je množina zobrazení $f: I \rightarrow \bigcup_I X_i$ takových, že $f(i) \in X_i$ pro každé $i \in I$. Takže pokud jsou všechny množiny X_i stejné a rovnají se množině X , je příslušný součin množinou všech zobrazení $X \rightarrow Y$, která se značí Y^X . Souvislost mezi oběma popisy je dána rovnostmi $f(i) = x_i, i \in I$. Je tu mírný nesoulad ve značení, protože pro konečné I jsme značili prvky jako n -tice, nyní jako soubory. Přístup pomocí souborů bývá výhodnější tam, kde nám nezáleží na uspořádání prvků v souboru. Pokud $p: I \rightarrow I$ je bijekce (v tomto případě je lepší použít termín permutace), je zobrazení $\{x_i\} \rightsquigarrow \{x_{p(i)}\}$ bijekcí mezi $\prod_I X_i$ a $\prod_I X_{p(i)}$. Nebudeme tyto různé popisy rozlišovat, vždy dostaneme isomorfní množiny. Je vhodné se zastavit u $I = \emptyset$. Jednotlivé popisy dávají buď 0-tice nebo soubory indexované prázdnou množinou nebo $f: \emptyset \rightarrow \emptyset$. Tento poslední popis dá singleton jako výsledek a tak ho budeme chápat i v ostatních popisech. Můžeme se ještě zmínit o tom, že neprázdnot součinů je úzce spjata s axiomem výběru. My budeme všude v textu předpokládat axiomy teorie množin ZFC, tj. i s axiomem výběru a součin neprázdných množin je tedy vždy neprázdný.

Máme-li soubor zobrazení $f_i: X_i \rightarrow Y_i, i \in I$, definujeme tzv. součin zobrazení $\prod_{i \in I} f_i: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ rovností $\prod_{i \in I} f_i(\{x_i\}_{i \in I}) = \{f_i(x_i)\}_{i \in I}$. Pokud se všechny množiny X_i rovnají množině X , definuje se tzv. diagonální zobrazení $\Delta_{i \in I} f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ rovností $\Delta_{i \in I} f_i(x) = \{f_i(x)\}_{i \in I}$. Diagonální proto, že je to vlastně zúžení součinu zobrazení na diagonálu v X^I , která je identifikovatelná s X pomocí zobrazení $x \mapsto \{x_i\}_{i \in I}$, kde $x_i = x$ pro všechna $i \in I$. Obě zobrazení jsou charakterizována pomocí projekcí: jsou to jediná zobrazení, pro která jsou následující diagramy komutativní (pro jednodušší zápis značíme součin zobrazení jako f a diagonální zobrazení jako Δf):

$$\begin{array}{ccc} \prod_{i \in I} X_i & \xrightarrow{f} & \prod_{i \in I} Y_i \\ \downarrow \pi_i & & \downarrow \pi_i \\ X_i & \xrightarrow{f_i} & Y_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\Delta f} & \prod_{i \in I} Y_i \\ & \searrow f_i & \downarrow \pi_i \\ & & Y_i \end{array}$$

Z jistého hlediska duální konstrukcí je tzv. kosoučin, kterému budeme říkat i disjunkt ní součet nebo suma. Suma prostorů $X_i, i \in I$ je prostor $\coprod_I X_i$ skládající se z bodů (i, x) , kde $i \in I, x \in X_i$. Máme injektivní zobrazení $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_I X_i$ přiřazující bodu x bod (i, x) . Pokud jsou všechny množiny X_i disjunkt ní, většinou se berou místo dvojic (i, x) rovnou body x . Lze dodat podobné další poznámky jako u součinu, definovat sumu zobrazení a jejich diagonální verzi. Vlastně stačí všude v předchozích odstavcích o součinu otočit šipky a dostaneme vše o kosoučinu. Některé vlastnosti lze získat i pomocí jiného pohledu na sumu: $\coprod_I X_i$ je podmnožinou součinu $I \times \bigcup_I X_i$, kde bereme pouze body $(i, x), x \in X_i$.

Existuje ještě jedna množinová operace a tou je přiřazení k dané množině nějaká soustava jejích podmnožin, např. konečných, spočetných nebo všech. Soustava všech podmnožin množiny X je isomorfní množině všech zobrazení $X \rightarrow \{0, 1\}$, kde isomorfismus přiřazuje podmnožině $A \subset X$ funkci s hodnotou 1 na A a 0 na $X \setminus A$ (charakteristická funkce množiny A). Často se proto množina všech podmnožin v X značí jako 2^X . Jiná značení jsou $\mathcal{P}(X)$ nebo $\exp(X)$. Někdy se tyto množiny množin nazývají nadmnožiny (spíše se však používá tento termín pro nadprostory, kde se jedná např. o množinu kompaktních podmnožin daného topologického prostoru).

Pokud máme množinu mohutnosti κ , pak množinu všech jejích podmnožin mohutnosti λ značíme $[\kappa]^\lambda$. Je zřejmé, co znamenají symboly $[\kappa]^{<\lambda}$ nebo $[\kappa]^{\leq \lambda}$ apod. pro $>, \geq$.

Filtry a ultrafiltry

V topologických prostorech se s filtry setkáme velice často. Hausdorff v r. 1914 topologické prostory pomocí filtrů definoval (ale termín „filtr“ vznikl o dost později).

Definice 0.2. Filtr

Neprázdná soustava $\mathcal{F}$ podmnožin množiny X se nazývá *filtr* na množině X , jestliže

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$;

(F2) $\mathcal{F}$ je uzavřená na průniky konečně mnoha svých prvků;

(F3) Je-li $A \subset B \subset X$ a $A \in \mathcal{F}$, je i $B \in \mathcal{F}$.

Filtr se nazývá *volný*, jestliže má prázdný průnik, jinak je *pevný*. $\square$

Podstatnou podmínkou pro filtr je podmínka (F2). Navíc, vzhledem ke třetí podmínce, ji lze přeformulovat na tvar $(F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow \exists F \in \mathcal{F}, F \subset F_1 \cap F_2)$. Pokud soustava $\mathcal{B}$ splňuje takto přeformulovanou podmínku (F2), přidáním množin v X obsahujících nějakou množinu z $\mathcal{B}$ dostaneme filtr. To je postup, jak se většinou filtr popisuje.

Definice 0.3. Báze a subbáze filtru

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá *bází filtru* $\mathcal{F}$, jestliže každý prvek F obsahuje nějaký prvek z $\mathcal{B}$.

Soustava $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ se nazývá *subbází filtru* $\mathcal{F}$, jestliže průniky konečně mnoha prvků z $\mathcal{B}$ tvoří bázi $\mathcal{F}$. $\square$

Báze filtru $\mathcal{F}$ není nic jiného, než kofinální část v uspořádané množině $(\mathcal{F}, \supset)$. Uvědomme si také, že tato uspořádaná množina je usměrněná. Často budeme používat filtr nebo jeho bázi jako indexovou množinu pro usměrněný soubor.

Tvrzení 0.4. Charakterizace báze filtru

Nechť $\mathcal{B}$ je neprázdna soustava neprázdných podmnožin X . Pak platí následující tvrzení.

(a) Systém $\mathcal{B}$ je bázi filtru právě když platí podmínka

$$\forall A, B \in \mathcal{B} \exists C \in \mathcal{B}: C \subset A \cap B.$$

Tento filtr je pak určen jednoznačně.

(b) Systém $\mathcal{B}$ je subbází filtru právě když je tzv. centrováný, tj. průniky konečně mnoha prvků z $\mathcal{B}$ jsou neprázdné. Tento filtr je pak určen jednoznačně.

Důkaz. (a) $\Rightarrow$: Je-li $\mathcal{B}$ bázi filtru $\mathcal{F}$ a $A, B \in \mathcal{B}$, pak $A \cap B \in \mathcal{F}$, a tedy existuje $C \in \mathcal{B}$ splňující $C \subset A \cap B$.

$\Leftarrow$: Splňuje-li $\mathcal{B}$ příslušnou podmínku, položme

$$\mathcal{F} = \{A \subset X; \exists B \in \mathcal{B}: B \subset A\}.$$

Pak zřejmě $\mathcal{F}$ splňuje (F1) a (F3) z Definice 0.2. Díky předpokládané podmínce pak splňuje i (F2).

Vskutku, máme-li dány množiny $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, existují pro ně množiny $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ splňující $B_i \subset A_i$, $i = 1, \dots, n$. Induktivní aplikací podmínky v (a) nalezneme $C \in \mathcal{B}$ takové, že $C \subset \bigcap_{i=1}^n B_i$. Tedy $C \subset \bigcap_{i=1}^n A_i$, a proto je průnik $\bigcap_{i=1}^n A_i$ obsažen v $\mathcal{F}$.

Tedy $\mathcal{F}$ je filtr a z definice $\mathcal{F}$ plyne, že $\mathcal{B}$ je jeho báze.

Nechť nyní $\mathcal{G}$ je filtr s bázi $\mathcal{B}$. Uvažujme $A \in \mathcal{F}$. Pak existuje $B \in \mathcal{B}$ splňující $B \subset A$. Pak $B \in \mathcal{G}$, a tedy $A \in \mathcal{G}$ z vlastnosti (F3). Proto $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Prohozením rolí $\mathcal{F}$ a $\mathcal{G}$ získáme pak obrácenou inkluzi.

(b) $\Rightarrow$: Je-li $\mathcal{B}$ subbáze filtru $\mathcal{F}$ a množiny $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}$ jsou dány, je průnik $\bigcap_{i=1}^n B_i$ neprázdný díky vlastnostem (F2) a (F1).

$\Leftarrow$: Splňuje-li $\mathcal{B}$ podmínku v (b), splňuje systém

$$\mathcal{C} = \left\{ \bigcap_{i=1}^n B_i; B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

podmínku z (a). Existuje tedy filtr $\mathcal{F}$, jehož je $\mathcal{C}$ bázi. Tedy $\mathcal{B}$ je subbází $\mathcal{F}$.

Je-li nyní $\mathcal{G}$ filtr se subbází $\mathcal{B}$, je $\mathcal{C}$ báze $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$. Z tvrzení (a) tak dostáváme $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. $\square$

Definice 0.5. Ultrafiltr

Vztah inkluze $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ mezi filtry na množině X je uspořádáním. Maximální prvky v této uspořádané množině se nazývají *ultrafiltry*. $\square$

Tvrzení 0.6. Charakterizace ultrafiltru

Nechť $\mathcal{F}$ je filtr na množině X . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Systém $\mathcal{F}$ je ultrafiltr.

(ii) Je-li $A \subset X$ taková, že protíná každý element z $\mathcal{F}$, pak $A \in \mathcal{F}$.

(iii) Je-li $A \subset X$, pak buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

(iv) Je-li $A \cup B \in \mathcal{F}$, pak buď $A \in \mathcal{F}$ nebo $B \in \mathcal{F}$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Položme

$$\mathcal{B} = \{A \cap F; F \in \mathcal{F}\}.$$

Pak $\mathcal{B}$ je neprázdná soustava (neboť $X \in \mathcal{F}$ a $A = A \cap X \in \mathcal{B}$), sestává z neprázdných množin a pro $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ platí $(A \cap F_1) \cap (A \cap F_2) = A \cap (F_1 \cap F_2) \in \mathcal{B}$. Tedy $\mathcal{B}$ je dle Tvzení 0.4(a) báze filtru $\mathcal{G}$. Je-li $F \in \mathcal{F}$, pak $A \cap F \in \mathcal{G}$ a $A \cap F \subset F$, z čehož plyne $F \in \mathcal{G}$. Tedy $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ znamená dle (i) rovnost $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Jelikož $A \in \mathcal{B} \subset \mathcal{G}$, platí i $A \in \mathcal{F}$.

(ii) $\implies$ (iii): Chceme ověřit, že A nebo, $X \setminus A$ splňuje podmínku z (ii). Pokud tomu tak není, existují množiny $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ takové, že $F_1 \cap A = \emptyset$ a $F_2 \cap (X \setminus A) = \emptyset$. Pak ale z inkluze

$$F_1 \cap F_2 \subset (X \setminus A) \cap A = \emptyset$$

dostáváme kombinací (F2) a (F1) spor. Tedy jedna z množin A a $X \setminus A$ splňuje podmínku z (ii), což znamená, že tato množina leží v $\mathcal{F}$.

(iii) $\implies$ (iv): Pokud $A \cup B \in \mathcal{F}$ a obě množiny A, B nejsou v $\mathcal{F}$, dle (iii) platí $X \setminus A, X \setminus B \in \mathcal{F}$. Tedy dle (F2) platí

$$(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B) \in \mathcal{F}.$$

Proto opět z (F2) máme

$$\emptyset = (A \cup B) \cap (X \setminus (A \cup B)) \in \mathcal{F},$$

což je spor s (F1). Tedy alespoň jedna z množin A a B leží v $\mathcal{F}$.

(iv) $\implies$ (i): Necht $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}$ je filtr a $\mathcal{F}$ splňuje (iv). Vezměme libovolnou množinu $A \in \mathcal{G}$. Pak $X = A \cup (X \setminus A) \in \mathcal{F}$, což znamená, že buďto A , nebo $X \setminus A$ leží dle (iv) v $\mathcal{F}$. Pokud $X \setminus A \in \mathcal{F}$, platí $X \setminus A \in \mathcal{G}$, což vede ke sporu s (F1) pro $\mathcal{G}$. Tedy $A \in \mathcal{F}$. Tím dostáváme $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, tedy $\mathcal{F}$ je maximální filtr, čili ultrafiltr. $\square$

Z Kuratowského–Zornova lemmatu vyplývá následující věta.

Věta 0.7. Existence ultrafiltrů

Každý filtr na množině X je obsažen v ultrafiltru na X .

Příklad 0.8

Pro každý bod $a \in X$ je soustava $\mathcal{F}_a = \{A \subset X; a \in A\}$ ultrafiltr na X . Jsou to jediné pevné ultrafiltry, a je jich tedy stejně jako je bodů v X . $\square$

Důkaz. Zjevně je $\mathcal{F}_a$ pevný filtr na X . Je-li $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}_a$ filtr a $A \in \mathcal{G}$, pak A obsahuje bod a . (Jinak bychom totiž z rovnosti $A \cap \{a\} = \emptyset$ odvodili spor s (F1) pro $\mathcal{G}$.) Tedy $A \in \mathcal{F}_a$, což znamená, že $\mathcal{F}_a$ je maximální filtr, tj. ultrafiltr.

Necht nyní $\mathcal{G}$ je pevný ultrafiltr a $P = \bigcap \mathcal{G}$ je neprázdná. Uvažujme nějaký bod $a \in P$ a pevný ultrafiltr $\mathcal{F}_a$. Naším cílem je dokázat rovnost $\mathcal{G} = \mathcal{F}_a$.

Je-li tedy množina $A \in \mathcal{G}$, pak $A \supset \bigcap \mathcal{G} = P$, a tedy $a \in A$. Proto $A \in \mathcal{F}_a$ a $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}_a$.

Obráceně, je-li $A \in \mathcal{F}_a$, pak dle Tvzení 0.6(iii) je buďto $A \in \mathcal{G}$, nebo $X \setminus A \in \mathcal{G}$. Druhá možnost však nepřípadá v úvahu, neboť pak $A \in \mathcal{F}_a$ a $X \setminus A \in \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_a$ dává spor s (F1) pro $\mathcal{F}_a$. Proto $\mathcal{F}_a \subset \mathcal{G}$, a $\mathcal{G}$ je tak požadovaného tvaru. $\square$

Sestrojit volný ultrafiltr na nekonečné množině X konstruktivně nejde, máme jen existenci, protože existují volné filtry, např. $\mathcal{F} = \{X \setminus K; K \in [X]^{<\omega}\}$, takže každý ultrafiltr obsahující $\mathcal{F}$ je volný. Volných ultrafiltrů na množině X je $2^{2^{|X|}}$, vizte Věta 3.49. Takže volných ultrafiltrů na $\mathbb{N}$ je tolik jako je reálných funkcí na $\mathbb{R}$.

Tvrzení 0.9. Filtr jako průnik ultrafiltrů

Necht $\mathcal{F}$ je filtr na množině X , pak $\mathcal{F} = \bigcap \{\mathcal{U}; \mathcal{U} \text{ ultrafiltr}, \mathcal{U} \supset \mathcal{F}\}$.

Důkaz. Jelikož je každý filtr obsažen v nějakém ultrafiltru, je množina na pravé straně rovnosti neprázdná. Zjevně platí inkluze

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{G} = \bigcap \{\mathcal{U}; \mathcal{U} \text{ ultrafiltr}, \mathcal{U} \supset \mathcal{F}\}.$$

K důkazu obrácené nerovnosti uvažujme pro spor, že existuje $A \in \mathcal{G} \setminus \mathcal{F}$. Pak $(X \setminus A) \cap F \neq \emptyset$ pro každé $F \in \mathcal{F}$. Vskutku, v opačném případě by existovala množina $F \in \mathcal{F}$ splňující $F \cap (X \setminus A) = \emptyset$, tj. $F \subset A$. Pak ovšem $A \in \mathcal{F}$, což by byl spor.

Z tohoto pozorování plyne, že systém $\mathcal{F} \cup \{X \setminus A\}$ je báze filtru. Ten pak lze vložit do ultrafiltru $\mathcal{U}$. Pak $\mathcal{U} \supset \mathcal{G}$, takže $A \in \mathcal{U}$. Ale $X \setminus A \in \mathcal{U}$ díky konstrukci $\mathcal{U}$. Tedy $\emptyset = A \cap (X \setminus A) \in \mathcal{U}$, což je spor.

Tedy $A \in \mathcal{F}$, tj. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Tvrzení 0.10. Obraz ultrafiltru

Nechť $\mathcal{F}$ je ultrafiltr na množině X a $f: X \rightarrow Y$ je surjektivní zobrazení. Pak $f(\mathcal{U}) = \{f(A); A \in \mathcal{U}\}$ je ultrafiltr na Y .

Důkaz. Jsou-li $A, B \in \mathcal{U}$, pak $f(A) \cap f(B) \supset f(A \cap B)$, tedy $f(\mathcal{U})$ má konečnou průnikovou vlastnost. Dále je-li $A \in \mathcal{U}$ a $C \supset f(A)$, pak $A \subset f^{-1}(f(A)) \subset f^{-1}(C)$, takže $f^{-1}(C) \in \mathcal{U}$. Proto $C = f(f^{-1}(C)) \in f(\mathcal{U})$. Tedy $f(A) \cap f(B) \in f(\mathcal{U})$, pokud $A, B \in \mathcal{U}$. Tedy $f(\mathcal{F})$ je filtr.

Nechť nyní $C \subset Y$ je množina splňující $C \cap f(A) \neq \emptyset$ pro každou $A \in \mathcal{U}$. Pak $f^{-1}(C) \cap A \neq \emptyset$ pro každé $A \in \mathcal{U}$, takže $f^{-1}(C) \in \mathcal{U}$. Proto $C = f(f^{-1}(C)) \in f(\mathcal{U})$. Takže $f(\mathcal{U})$ je ultrafiltr. $\square$

Skoro disjunktí soustavy množin

Následující soustavy použijeme vícekrát v různých příkladech a protipříkladech. Zavedeme jen jednodušší speciální definici na spočetné množině, kterou si označíme N . Podle anglického termínu (almost disjoint) se skoro disjunktí soustava označuje AD.

Soustava $\mathcal{S}$ nekonečných podmnožin spočetné množiny N se nazývá *skoro disjunktí*, jestliže průnik každých dvou různých množin z $\mathcal{S}$ je konečný.

Jestliže použijeme na množinu všech skoro disjunktí soustav uspořádaných inkluzí Kuratowského-Zornovo lemma, zjistíme, že každá skoro disjunktí soustava je obsažena v maximální skoro disjunktí soustavě (MAD). Skoro disjunktí soustava $\mathcal{S}$ na množině N je maximální, právě když každá nekonečná podmnožina N protíná nějakou množinu z $\mathcal{S}$ v nekonečně mnoha bodech. Tedy např. jednobodový soubor $\{N\}$ je maximální skoro disjunktí.

Jestliže za N vezmeme množinu všech racionálních čísel a pro každé reálné číslo a zvolíme jednu prostou posloupnost S_a racionálních čísel konvergující k a , je soustava $\mathcal{S} = \{S_a; a \in \mathbb{R}\}$ skoro disjunktí a má mohutnost kontinua. Tato skoro disjunktí soustava na racionálních číslech není maximální, i když má mohutnost kontinuum.

Každá nekonečná maximální skoro disjunktí soustava je nespočetná. Vskutku, pokud maximální skoro disjunktí soustava $\mathcal{S}$ lze psát jako $\mathcal{S} = \{S_i; i \in \mathbb{N}\}$, vybereme $x_1 \in S_1$ a induktivně nalezneme pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek

$$x_{n+1} \in S_{n+1} \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n S_i \cup \{x_i; 1 \leq i \leq n\} \right).$$

Pak nekonečná množina $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ protíná každou množinu z $\mathcal{S}$ pouze v konečně mnoha bodech, a tedy $\mathcal{S}$ není maximální.

Existují modely teorie množin obsahující maximální skoro disjunktí soustavu mohutnosti menší než kontinuum.

Je-li $\{S_n\}$ spočetná skoro disjunktí soustava na N , existují konečné množiny $K_n \subset S_n$, že soustava $\{S_n \setminus K_n\}$ je disjunktí soustava nekonečných množin na N . Opravdu, stačí položit $K_n = \bigcup \{S_n \cap S_k; k < n\}$. Pro nespočetné skoro disjunktí soustavy uvedený výsledek neplatí. Lze připomenout podobný výsledek, který později použijeme: je-li X nekonečná množina mohutnosti κ a $\{A_\alpha\} \subset [X]^\kappa$, existuje disjunktí soustava $\{B_\alpha\} \subset [X]^\kappa$, že $B_\alpha \subset A_\alpha$ pro každé $\alpha \in \kappa$. Rozdíl proti předchozímu tvrzení je ve velikosti $A_\alpha \setminus B_\alpha$, které mohou být veliké, i mohutnosti κ .

Pro úplnost připomeneme obecnější definici AD, která závisí na třech kardinálních číslech $\omega \leq \mu \leq \kappa \leq \lambda$: soustava $\mathcal{S} \subset [\lambda]^\kappa$ s vlastností $(S_1, S_2 \in \mathcal{S} \Rightarrow |S_1 \cap S_2| < \mu)$. V našem případě jsou všechna uvedená kardinální čísla spočetná.

Metrické prostory

Připomeňme, že *metrika* ρ na množině X je funkce $\rho: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ splňující následující vlastnosti:

- (1) Pro každé $x, y \in X$ platí, že $\rho(x, y) = 0$, právě když $x = y$;

- (2) Pro každé $x, y \in X$ platí $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (*symetrie*);
 (3) Pro každé $x, y, z \in X$ platí $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (*trojúhelníková nerovnost*).

Pak dvojice (X, ρ) se nazývá metrický prostor.

Jedna část první vlastnosti, a to, že pro $x \neq y$ je $\rho(x, y) > 0$, není podstatná pro obecné vlastnosti metrického prostoru. Pokud ji vynecháme, tj. předpokládáme jen $(x = y \Rightarrow \rho(x, y) = 0)$, nazývá se ρ *pseudometrikou* a dvojice (X, ρ) *pseudometrický prostor*.

Pokud metrika ρ na X splňuje místo (3) následující silnější vlastnost

- (3') Pro každé $x, y, z \in X$ platí $\rho(x, z) \leq \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}$,

nazýváme ρ *ultrametrikou* a dvojici (X, ρ) *ultrametrickým prostorem*.

Extrémními příklady pseudometrik jsou tzv. diskrétní metrika, nabývající jen hodnoty 0 pro $x = y$ a 1 pro $x \neq y$, a indiskrétní pseudometrika $\rho = 0$. Na euklidovských prostorech a jejich podmnožinách bereme, pokud není řečeno jinak, euklidovskou vzdálenost $\rho(x, y) = |x - y|$ (někdy psáno $\|x - y\|$).

Příkladem ultrametricky je diskrétní metrika nebo Baireova metrika nebo p -adická metrika (viz ??).

V pseudometrickém prostoru (X, ρ) se přirozeným způsobem definuje konvergence posloupností, vzdálenosti bodů nebo množin od množiny a diametr (průměr) množiny. Nechť $a, x_n \in X$ a $A, B \subset X$, pak položíme

- $x_n \rightarrow a$ (nebo $\lim_n x_n = a$), jestliže $\lim_n \rho(x_n, a) = 0$;
- $\rho(a, B) = \inf \{\rho(a, b); b \in B\}$;
- $\rho(A, B) = \inf \{\rho(a, b); a \in A, b \in B\}$;
- $\text{diam } A = \sup \{\rho(a, b); a, b \in A\}$.

Jsou to suprema a infima v rámci $[0, \infty]$, takže $\rho(a, \emptyset) = \infty$ a $\text{diam } \emptyset = 0$. Podmnožinu (X, ρ) nazveme *omezenou*, má-li konečný diametr.

Dvě pseudometricky na X se nazývají ekvivalentní (přesněji topologicky ekvivalentní), jestliže mají stejnou konvergenci.

Základní topologické pojmy

Topologické prostory vznikly abstrakcí vlastností potřebných pro práci se spojitostí. Spojitost reálných funkcí reálné proměnné lze charakterizovat pomocí konvergence, pomocí okolí nebo otevřených (resp. uzavřených) množin. Jsou i další méně používané možnosti. Nemuselo být ovšem jasné, jaké požadavky se na konvergenci nebo soustavy okolí nebo soustavy otevřených množin mají klást. Začátkem 20. století vykryštovaly základní požadavky, které se vzaly za axiomy. Je zřejmé, že ve speciálních případech mohly být vybrané axiomy příliš obecné (pak bylo nutné přidat další vlastnosti) nebo naopak příliš zužující (a pak bylo nutné některé axiomy oslabit). Vznikly tak speciální topologické prostory nebo zobecněné topologické prostory.

V tomto textu se nebudeme zobecněnými topologiemi zabývat. Speciální topologické prostory, splňující další přidání podmínky, jsou však velmi důležité a budou obsahem této i dalších kapitol.

Po zavedení topologických prostorů a některých základních pojmů pro podmnožiny (např. konvergence nebo hustota, váha, charakter a jejich chápání jako kardinální funkce) a pro zobrazení (spojitost), probereme tzv. oddělovací axiomy, které určují základní třídy zmíněných speciálních topologických prostorů.

1.1 Topologický prostor, otevřené a uzavřené množiny

Vzhledem k návaznosti na spojitost probíranou v matematické analýze nebo v teorii metrických prostorů by bylo přirozené definovat topologické prostory pomocí okolí bodů nebo pomocí konvergence. Obě možnosti jsou však složitější než definice pomocí otevřených množin. Použijeme tedy otevřené množiny a později ukážeme ekvivalentní charakterizaci pomocí okolí (definice topologie pomocí konvergence uvádět nebudeme, prakticky se nepoužívá pro svou složitost).

Definice 1.1. Topologický prostor

Uspořádaná dvojice (X, τ) se nazývá *topologický prostor*, pokud X je množina, $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ a platí:

(T1) $\emptyset, X \in \tau$,

(T2) jsou-li $U, V \in \tau$, pak $U \cap V \in \tau$,

(T3) je-li $\mathcal{U} \subset \tau$, pak $\bigcup \mathcal{U} \in \tau$.

Systém τ se nazývá *topologie* na X . Někdy mluvíme pouze o prostoru X , je-li topologie τ zřejmá z kontextu. Prvky X se nazývají *body*, prvky τ se nazývají *otevřené množiny*. Množina $V \subset X$ se nazývá *okolí* bodu $x \in X$, pokud existuje $U \in \tau$, pro které $x \in U \subset V$. Množinu všech okolí bodu x značíme $\mathcal{U}(x)$. Soubor množin $\mathcal{B} \subset \tau$ se nazývá *báze* prostoru X , pokud každé $U \in \tau$ lze vyjádřit jako sjednocení nějakého $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$. Soubor $\mathcal{S} \subset \tau$ se nazývá *subbáze*, pokud je systém $\{\bigcap \mathcal{F} : \mathcal{F} \subset \mathcal{S}, \mathcal{F} \text{ je konečná}\}$ báze. $\square$

Z formálního hlediska lze uvedené axiomy zjednodušit vynecháním axiomu (T1). Axiom (T3) pro $\mathcal{U} = \emptyset$ dává výsledek $\emptyset$, což je tedy podle (T3) otevřená množina. Pokud axiom (T2) formulujeme ve tvaru „*průnik konečného systému množin z τ náleží do τ* “, dostaneme jako průnik prázdného systému celý prostor X (protože operace jsou vzhledem k množině X).

Uvedeme nyní několik jednoduchých příkladů topologických prostorů, ve kterých je ověření axiomů (T1)–(T3) velice snadné. Další a složitější příklady budou uvedeny později po zavedení jiných možností charakterizace topologií. Body x topologického prostoru budeme nazývat *izolované*, jestliže jednobodová množina $\{x\}$ je otevřená.

Příklady 1.2. Jednoduché příklady pomocí otevřených množin

1. (Diskrétní prostor) Soustava $\mathcal{P}(X)$ všech podmnožin množiny X je zřejmě topologie. Je to největší topologie na množině X a nazývá se *diskrétní topologie*. Dvoubodový diskrétní prostor značíme jako $2 = \{0, 1\}$.

Každý bod diskretního prostoru je izolovaný.

2. (Indiskretní prostor) Opačným extrémem je nejmenší možná topologie na množině X , která obsahuje jen $\emptyset$ a X . Nazývá se *indiskretní topologie*. Neprázdný prostor, který je současně diskretní a indiskretní, je již jednobodový.

3. (Ko-konečná topologie, z anglického „cofinite“, complements of finite sets) Na nekonečné množině X vezmeme za otevřené množiny prázdnou množinu a všechny doplňky konečných množin. Modifikací je ko-početná topologie (doplňky nejvýše spočetných množin, obecněji topologie na nekonečné množině X mohutnosti κ , kde za otevřené množiny vezmeme prázdnou množinu a doplňky množin mohutnosti menší než daný kardinál $\lambda \leq \kappa$).

4. (Sierpiňského prostor) Na dvoubodové množině $2 = \{0, 1\}$ existují přesně 4 topologie: diskretní, indiskretní a dvě topologie mezi nimi. Tyto dvě topologie mají za otevřené množiny prázdnou množinu, celý prostor a přesně jeden z bodů 0, 1. Je zřejmé, že permutace 0 a 1 převede jednu z těchto topologií na druhou (tzv. homeomorfismus - vizte Definicí 1.41). Tyto topologie nebo prostory se nazývají Sierpiňského. Pro další použití zvolíme za Sierpiňského prostor topologii τ na $2 = \{0, 1\}$ sestávající z množin $\tau = \{\emptyset, 2, \{1\}\}$. Označíme ho S (nebo S_2). Tento prostor má jediný izolovaný bod, a to bod 1. $\square$

V posledním příkladě byl určen počet topologií na dvoubodové množině. Na prázdné a jednobodové množině existuje přesně jedna topologie. Spočítat, kolik topologií je na trojbodové množině ještě dobře jde – je jich 29. Pak už je to složitější. Na čtyřbodové množině je 355 topologií, na pětibodové už 7 181, na šestibodové množině je 145 807 topologií. Zatím se nezjistila zákonitost závislosti počtu topologií na počtu bodů, existují jen asymptotické odhady. Pokud se spočítá počet T_0 -topologií (viz oddělovací axiomy pro tento pojem) na všech množinách s k prvky, $k \leq n$, pak se pomocí tzv. Stirlingových čísel dostane počet všech topologií na množině s n prvky. Úloha počtu topologií na konečné množině je úloha z teorie grafů nebo uspořádaných množin, protože taková topologie je jednoznačně určena jistým uspořádáním prvků množiny: $x \leq y$, jestliže každá otevřená množina obsahující x obsahuje i y (toto uspořádání nemusí být slabě antisymetrické).

Definice 1.3. Uzavřené množiny

Podmnožina topologického prostoru se nazývá *uzavřená*, jestliže její doplněk je otevřenou množinou.

Podmnožina topologického prostoru se nazývá *obojetná*, jestliže je současně otevřená i uzavřená. $\square$

Každá podmnožina diskretního prostoru je obojetná.

Tvrzení 1.4. Charakteristické vlastnosti uzavřených množin

Soustava všech uzavřených množin topologického prostoru obsahuje prázdnou množinu i celý prostor a je uzavřená na libovolné průniky a na konečná sjednocení.

Obráceně, je-li X množina a $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$ je systém obsahující prázdnou množinu, celý prostor a je uzavřený na libovolné průniky a na konečná sjednocení, pak existuje právě jedna topologie τ na X taková, že $\mathcal{F}$ je právě systém všech uzavřených množin v (X, τ) .

Důkaz. Vlastnosti systému uzavřených množin ihned plynou z de Morganových pravidel a axiomů (T1), (T2) a (T3).

Je-li $\mathcal{F}$ systém splňující uvedené předpoklady, položme $\tau = \{X \setminus F; F \in \mathcal{F}\}$. Opět z de Morganových pravidel plyne, že τ je topologie na X . Z definice uzavřených množin pro topologii τ pak dostáváme, že $\mathcal{F}$ je přesně systém všech uzavřených množin vzhledem k topologii τ . Z definice uzavřených množin navíc plyne, že tato topologie je jednoznačně určená. $\square$

Zadávat všechny otevřené nebo uzavřené množiny bývá někdy komplikované. Zadávají se proto jen některé z nich, které celou topologii v nějakém jednoduchém smyslu vytvářejí. To jsou báze a subbáze (otevřené i uzavřené) a soustavy okolí. Nejdříve probereme báze a subbáze otevřených množin, které se používají nejvíce. Přechodem k doplňkům a pomocí de Morganových vzorců lze získat příslušné vztahy pro báze uzavřených množin. Potřebujeme charakterizace bází a subbází, abychom je mohli k popisu topologie použít.

Tvrzení 1.5. Vlastnosti báze

Je-li (X, τ) topologický prostor a $\mathcal{B}$ jeho báze, pak

(B1) pro každé $U, V \in \mathcal{B}$ a $x \in U \cap V$ existuje $W \in \mathcal{B}$ takové, že $x \in W \subset U \cap V$;

$$(B2) \cup \mathcal{B} = X.$$

Je-li X množina a $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ systém množin splňující podmínky (B1) a (B2), pak existuje jediná topologie na X , jejíž báze je $\mathcal{B}$.

Důkaz. Ověření vlastností (B1) a (B2) je jednoduché. Vskutku, pokud $U, V \in \mathcal{B}$ a $x \in U \cap V$ jsou dány, je $U \cap V$ otevřená množina obsahující x . Tedy existuje $W \in \mathcal{B}$ splňující $x \in W \subset U \cap V$. Tedy (B1) platí. Je-li x bod v X , pak $X \in \mathcal{U}(x)$, a tedy existuje $W \in \mathcal{B}$ splňující $x \in W$. Proto $x \in W \subset \bigcup \mathcal{B} \subset X$, a tedy (B2) platí.

Je-li $\mathcal{B}$ systém splňující obě podmínky, pak snadno ověříme, že systém

$$\tau = \left\{ \bigcup \mathcal{U}; \mathcal{U} \subset \mathcal{B} \right\}$$

je topologie. Vskutku, (T1) plyne z (B2). Pro ověření (T2) volme $U, V \in \tau$. Pak existují $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{B}$, že $U = \bigcup \mathcal{U}$ a $V = \bigcup \mathcal{V}$. Nyní pro každé $x \in U \cap V$ existuje $U_0 \in \mathcal{U}$ a $V_0 \in \mathcal{V}$, že $x \in U_0 \cap V_0$. Tedy dle (B1) existuje množina $W_x \in \mathcal{B}$, že $W_x \subset U_0 \cap V_0$. Zřejmě potom $U \cap V = \bigcup_{x \in U \cap V} W_x$. Tedy $U \cap V \in \tau$. Ověření (T3) je přímočaré, neboť je-li $\mathcal{U} \subset \tau$, pak pro každý element $U \in \mathcal{U}$ existuje systém $\mathcal{V}_U \subset \mathcal{B}$ splňující $U = \bigcup \mathcal{V}_U$. Pak ovšem $\mathcal{W} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_U \subset \mathcal{B}$, a tedy

$$\bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \bigcup \mathcal{V}_U = \bigcup \left(\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \mathcal{V}_U \right) = \bigcup \mathcal{W} \in \tau.$$

Zřejmě τ má bázi $\mathcal{B}$.

Nechť nyní σ je topologie na X , která má též $\mathcal{B}$ za bázi. Je-li pak $U \in \sigma$, existuje z definice báze systém $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ splňující $U = \bigcup \mathcal{U}$. Tedy $U \in \tau$, a proto $\sigma \subset \tau$. Obráceně, pokud $U \in \tau$, $U = \bigcup \mathcal{U}$ pro nějaký systém $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$. Jelikož $\mathcal{B} \subset \sigma$ a σ je topologie, platí $U = \bigcup \mathcal{U} \in \sigma$. Tedy $\tau \subset \sigma$. Proto je τ jednoznačně určena systémem $\mathcal{B}$. $\square$

Důsledek 1.6. Subbáze

Je-li $\mathcal{S}$ libovolný systém množin množiny X takový, že $\bigcup \mathcal{S} = X$, pak $\mathcal{S}$ je subbáze jediné topologie na X .

Důkaz. Předpokládejme, že X je neprázdný, pak je totiž i systém $\mathcal{S}$ neprázdný. Položme

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap \mathcal{U}; \mathcal{U} \subset \mathcal{S} \text{ konečný neprázdný systém} \right\}.$$

Pak $\mathcal{B}$ splňuje (B1) a (B2) z Tvzení 1.5, a tedy existuje právě jedna topologie τ na X , jejíž je $\mathcal{B}$ báze. Tedy $\mathcal{S}$ je subbáze τ .

Pokud σ je topologie na X se subbází $\mathcal{S}$, pak $\mathcal{B}$ je báze σ . Z Tvzení 1.5 pak plyne $\sigma = \tau$. $\square$

Uvedeme nyní několik příkladů zadání topologie pomocí báze nebo subbáze. Při ověřování vlastností báze budeme vynechávat druhou vlastnost, která bývá zřejmá. Je vhodné si uvědomit, že každý izolovaný bod musí být prvkem každé otevřené báze.

Příklady 1.7. Prostory definované pomocí otevřené báze

1. Metrizovatelný prostor. Je-li (X, ρ) metrický prostor, tvoří množina jeho koulí $B_\rho(x, r) = \{y \in X; \rho(x, y) < r\}$, $x \in X, r > 0$, bázi. Opravdu, pro $a \in B_\rho(x, r) \cap B_\rho(y, s)$ a volbu $t = \min\{r - \rho(a, x), s - \rho(a, y)\}$ platí $B_\rho(a, t) \subset B_\rho(x, r) \cap B_\rho(y, s)$. Tato báze tedy určuje topologii, které říkáme *topologie vytvořená (generovaná, indukovaná) metrikou ρ* . Z důkazu vlastností báze je vidět, že není třeba brát všechna kladná r jako poloměry koulí, ale jen posloupnost kladných čísel konvergující k 0.

Mluvíme-li o nějakém metrickém prostoru jako o topologickém, máme na mysli právě zmíněnou topologii. Pokud je topologie na X vytvořená uvedeným způsobem pomocí nějaké metriky, nazývá se *metrizovatelná* a celý prostor metrizovatelný. Pokud je ρ pseudometrika nebo ultrametrika, dostáváme pseudometrizovatelné nebo ultrametrizovatelné prostory.

2. Ježek. Nechť X je konvergentní posloupnost $\{0\} \cup \{1/n; n \in \mathbb{N}\}$. Symbolem V_ω se označí množina $\{0\} \cup \{(k, y); k \in \mathbb{N}, y \in X, y \neq 0\}$. Množina X se ve V_ω vyskytuje ve spočetně mnoha kopiích. Množina V_ω se dá také chápat jako kvocient množiny $\mathbb{N} \times X$, který ztotožní všechny body mající nulovou druhou souřadnici.

Na množině V_κ lze zavést metriku. Pro $x, y \in V_\kappa$ definujeme

$$d(x, y) = \begin{cases} |x - y|, & \text{leží-li } x, y \text{ na stejné kopii } X, \\ x + y, & \text{jinak.} \end{cases}$$

Množina V_ω s topologií vytvořenou touto metrikou se nazývá *ježek*. Všechny body, kromě bodu 0, jsou izolované. Příslušná otevřená báze koulí je spočetná.

Je zřejmé, že lze místo naší volby X použít i jiné prostory. Často se používá uzavřený interval $[0, 1]$. Místo spočetně mnoha kopií X lze vzít i jiný počet κ - pak se výsledný prostor značí jako V_κ .

3. Vějíř Na množině V_ω lze zavést jinou topologii. Otevřené množiny budou ty, jejichž průnik s každou kopií X je otevřenou množinou v X . S touto topologií se V_ω nazývá *vějíř*. Topologie vějíře má za otevřenou bázi všechny body různé od 0 a pak množiny tvaru

$$U_f = \{0\} \cup \{(k, 1/n); n > f(k)\},$$

kde $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Ověření příslušných axiomů je jednoduché. I v tomto prostoru jsou izolované všechny body kromě bodu 0, ale uvedená otevřená báze není spočetná a můžeme ukázat, že vějíř nemá spočetnou bázi (z toho vyplývá, že vějíř není metrizable).

Nechť $\mathcal{B}$ je spočetná báze otevřených množin ve vějíři, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pokud $0 \in B_n$, existuje $f_n: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, že $U_{f_n} \subset B_n$. Vezmeme nyní libovolnou funkci $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, že $U_f \supset B_n$, takže $U_f \supset U_{f_n}$, což z definice množin U_f znamená, že $f(k) \leq f_n(k)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$. Takže množina $\{f_n\}$ je kofinální množinou v $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ s uspořádáním po bodech. To však není možné. Vskutku, vezmeme funkci f s hodnotami $f(n) > f_n(n)$, $n \in \mathbb{N}$, a pak nemůže platit $f \leq f_n$ pro žádné n .

4. Uspořádatelný prostor. Je-li $(X, \leq)$ lineárně uspořádaný prostor, je množina všech otevřených intervalů v X báze. Otevřený interval je tvaru (a, b) pro $a < b$, nebo $(a, m]$ pro $a < m$, m největší prvek v X , nebo $[n, b)$ pro $n < b$, n nejmenší prvek v X , nebo $[n, m]$. Průnik dvou intervalů uvedených typů má opět jeden z uvedených typů, takže tyto intervaly tvoří podle Tvzení 1.5 otevřenou bázi topologie, která se nazývá *topologie vytvořená (generovaná, indukovaná) uspořádáním $\leq$* , nebo častěji jen *uspořádaný topologický prostor*. V literatuře se často používá zkratka LOTS (z angličtiny „linearly ordered topological space“).

Pokud je topologie na X vytvořená uvedeným způsobem, nazývá se *uspořádatelná* a celý prostor uspořádatelný.

Množina G je otevřená v X , právě když je sjednocením disjunktních konvexních množin, které jsou otevřené.

Ihned vidíme, že každé sjednocení disjunktních konvexních otevřených množin je otevřená množina. Abychom obdrželi obrácenou implikaci, uvažujeme otevřenou množinu $G \subset X$ a relaci ekvivalence na G , která je dána pro $x, y \in G$ vztahem $x \sim y$, jestliže existuje konvexní množina K taková, že $x, y \in K \subset G$. Snadno vypočítáme, že sjednocení dvou konvexních množin s neprázdným průnikem je opět konvexní množina. Z toho však již plyne, že vztah $\sim$ je vskutku relace ekvivalence na G . Uvažujeme nyní třídu ekvivalence $[x]$ danou prvkem $x \in G$. Pak z výše uvedeného pozorování plyne konvexita $[x]$. Tato třída ekvivalence je dokonce otevřená. Vskutku, pro $y \in [x]$ nalezneme bazový interval I takový, že $y \in I \subset G$. Pak I je konvexní množina. Dále existuje konvexní $K \subset G$ splňující $x, y \in K$. Z našeho pozorování plyne konvexita $I \cup K$, a tedy $I \cup K \subset [x]$. Proto $[x]$ obsahuje s y i otevřenou množinu obsahující y , takže $[x]$ je otevřená množina. Příslušný rozklad G na otevřené konvexní množiny tak získáme uvažováním tříd ekvivalence $\sim$.

Povšimněme si, že získané konvexní disjunktní množiny nemusí být intervaly. K tomu stačí uvažovat prostor $X = \mathbb{Q} \cap [0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{3}, 5]$. Pak otevřená konvexní množina $G = X \cap [0, \sqrt{2})$ nelze vyjádřit jako interval (s koncovými body v X).

Význačnými příklady uspořádaných topologických prostorů jsou různé podmnožiny reálných čísel (kromě $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}$ a iracionální čísla $\mathbb{P}$) a prostory ordinálních čísel, zvláště prostor ω_1 všech spočetných ordinálních čísel nebo $\omega_1 + 1$ všech spočetných ordinálních čísel spolu s prvním nespočetným.

5. Sorgenfreyova přímka. Na uspořádaných množinách lze zadat topologii i pomocí jiných tvarů intervalů než jen otevřených. Uvedeme dva takové příklady. Prvním z nich je tzv. Sorgenfreyova přímka, což je množina reálných čísel s topologií zadanou otevřenou bází $\{[a, b); a < b\}$. Je to opravdu báze: je-li $a \in [p, q) \cap [r, s)$, je $a \in [a, \min\{q, s\})$.

6. Michaelova přímka Druhým příkladem, který se také často vyskytne jako zajímavý příklad na různé vlastnosti, je tzv. Michaelova přímka. Je to opět množina reálných čísel s topologií opět zadanou otevřenou

bází složenou ze všech otevřených intervalů a z jednobodových uzavřených intervalů $\{\{a\}; a \text{ iracionální číslo}\}$. Platnost (B1) pro otevřené intervaly jsme dokázali v příkladě definující LOTS. Pokud je jedna z množin U, V v (B1) jednobodová, není co dokazovat. Každé iracionální číslo je tedy izolované. $\square$

Zmínili jsme se, že Hausdorff definoval topologické prostory pomocí filtrů, konkrétně pomocí filtrů okolí bodů. To je častý případ popisu topologie. Potřebná tvrzení nyní uvedeme.

Tvrzení 1.8. Charakterizace otevřených množin pomocí okolí

Ať (X, τ) je topologický prostor a $U \subset X$. Pak $U \in \tau$, právě když platí

$$\forall x \in U \exists V \in \mathcal{U}(x): V \subset U.$$

Důkaz. Přímá implikace je snadná - volíme $V = U$. Dokažme zpětnou implikaci. Pro každé $x \in U$ existuje $V_x \in \mathcal{U}(x)$, že $V_x \subset U$. Z definice okolí existuje otevřená množina U_x taková, že $x \in U_x \subset V_x$. Zřejmě $U = \bigcup_{x \in U} U_x$. Množiny U_x jsou otevřené, tedy i U je otevřená. $\square$

Tvrzení 1.9. Vlastnosti systému všech okolí

Je-li (X, τ) topologický prostor, pak soubor množin $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x)$ všech okolí bodu $x \in X$ splňuje následující vlastnosti:

(U1) *pro každé $x \in X$ je $\mathcal{U}(x) \neq \emptyset$, $x \in \bigcap \mathcal{U}(x)$;*

(U2) *je-li $U \in \mathcal{U}(x)$ a $U \subset V \subset X$, pak $V \in \mathcal{U}(x)$;*

(U3) *jsou-li $U, V \in \mathcal{U}(x)$, pak $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$;*

(U4) *pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ existuje $V \in \mathcal{U}(x)$, že pro každé $y \in V$ je $U \in \mathcal{U}(y)$.*

Je-li X libovolná množina a soubory množin $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{P}(X)$, $x \in X$, splňují podmínky (U1)-(U4), pak na množině X existuje jediná topologie τ , jejíž systémy okolí jsou $\{\mathcal{U}(x)\}_{x \in X}$.

Důkaz. První část je snadná: Vlastnost (U1) plyne z toho, že pro každé $x \in X$ je množina $X \in \mathcal{U}(x)$ a že $x \in U$ pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$. Pro ověření vlastnosti (U2) uvažujme $U \subset V \subset X$, kde $U \in \mathcal{U}(x)$ pro nějaké $x \in X$. Pak existuje $W \in \tau$ takové, že $x \in W \subset U$. Tedy i $x \in W \subset V$, a proto V náleží do $\mathcal{U}(x)$. Pokud je $U, V \in \mathcal{U}(x)$, existují $A, B \in \tau$, takové, že $x \in A \subset U$ a $x \in B \subset V$. Pak $A \cap B \in \tau$ a přitom $x \in A \cap B \subset U \cap V$. Tedy $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$ a (U3) platí. Je-li $U \in \mathcal{U}(x)$, zvolme $V \in \tau$ splňující $x \in V \subset U$. Pak pro každé $y \in V$ je $U \in \mathcal{U}(y)$, neboť $V \in \tau$ a $y \in V \subset U$. Tedy platí i (U4).

Nechť nyní X je množina a $\mathcal{U}(x)$, $x \in X$, jsou soubory množin splňující (U1)-(U4). Můžeme předpokládat, že X je neprázdná. Definujeme systém

$$\tau = \{U \in \mathcal{P}(X); \forall x \in U: U \in \mathcal{U}(x)\}. \quad (1.1) \quad \boxed{\text{eq-tau}}$$

Pak z vlastností (U1)-(U3) plynou vlastnosti (T1), (T2) a (T3) pro τ . Vskutku, $\emptyset \in \tau$ z definice τ . Dále $X \in \mathcal{U}(x)$ pro každé $x \in X$ dle (U2), a tedy $X \in \tau$. Jsou-li $U, V \in \tau$ libovolné a $x \in U \cap V$, pak U i V jsou v $\mathcal{U}(x)$ dle (1.1). Vlastnost (U3) pak implikuje $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$, což znamená, že $U \cap V \in \tau$. Ohledně ověření (T3), nechť $U \subset \tau$, $V = \bigcup U$ a $x \in V$. Pak existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $x \in U$. Jelikož $U \in \tau$ a $V \supset U$, je dle (U2) $V \in \mathcal{U}(x)$. Tedy $V \in \tau$ dle (1.1).

Dále ověříme, že prvky $\mathcal{U}(x)$ jsou okolí bodu x v topologii τ , tj. že $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{U}_\tau(x)$. Vskutku, pro $U \in \mathcal{U}(x)$ položme $G = \{z \in U; U \in \mathcal{U}(z)\}$. Zřejmě $x \in G \subset U$. Tvrdíme, že $G \in \tau$. Je-li totiž $z \in G$, pak $U \in \mathcal{U}(z)$, a tedy dle (U4) existuje $V \in \mathcal{U}(z)$, že pro každé $y \in V$ platí $U \in \mathcal{U}(y)$. Pak $V \subset U$ a dokonce $V \subset G$. Tedy $G \in \mathcal{U}(z)$, a proto $G \in \tau$.

Nyní chceme dokázat, že $\mathcal{U}_\tau(x) \subset \mathcal{U}(x)$. Nechť tedy $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$ je dána. Pak existuje $V \in \tau$ taková, že $x \in V \subset U$. Z (1.1) plyne, že $V \in \mathcal{U}(x)$. Z (U2) pak odvodíme $U \in \mathcal{U}(x)$. Tedy $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x)$ pro každé $x \in X$.

Nechť nyní σ je topologie, jejíž systém okolí jsou též $\{\mathcal{U}(x)\}_{x \in X}$. Nechť $A \in \tau$ je dáno. Pak pro $x \in A$ existuje $U \in \mathcal{U}(x)$ splňující $x \in U \subset A$. Jelikož $\{\mathcal{U}(z)\}_{z \in X}$ je systém okolí pro σ , z Tvrzení 1.8 plyne $A \in \sigma$. Prohozením rolí τ a σ pak dostáváme rovnost $\tau = \sigma$. $\square$

Vlastnosti (U2) a (U3) říkají, že $\mathcal{U}(x)$ je filtr a podle (U1) každý jeho prvek obsahuje x . Můžeme tedy okolí bodů stručně popisovat jako filtry, jejichž každý prvek obsahuje daný bod a splňující (U4). Při popisu

topologie pomocí báze okolí obvykle nedělá potíže ověření prvních tří vlastností (U1)-(U3). Ověření (U4) bývá někdy obtížnější. Pokud použijeme k popisu otevřených množin podle 1.8 jen filtry bez vlastnosti (U4), splňují získané množiny axiomy pro otevřené množiny, ale ony zadávací filtry nebudou obecně filtry okolí, mohou být značně větší než filtry $\mathcal{U}(x)$. Nicméně, i tento postup je někdy vhodný pro popis topologie.

Definice 1.10. Lokální báze okolí

Systém množin $\mathcal{B}(x)$ se nazývá *bází okolí* nebo *lokální bázi* v bodě x , pokud $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ a pro každé $V \in \mathcal{U}(x)$ existuje prvek $U \in \mathcal{B}(x)$, že $U \subset V$. Indexovaný soubor $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ se nazývá *báze okolí* prostoru X . $\square$

Snadno je vidět, že v diskrétním prostoru je $\{x\}$ bázi okolí bodu x . V indiskrétním prostoru je bázi okolí každého bodu celá množina.

Tvrzení 1.11. Vlastnosti báze okolí

Je-li (X, τ) topologický prostor a $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ báze okolí, pak platí následující tvrzení.

- (O1) pro každé $x \in X$ platí $\mathcal{B}(x) \neq \emptyset$ a $x \in \bigcap \mathcal{B}(x)$;
- (O2) pro každé $x \in X$ a $U, V \in \mathcal{B}(x)$ existuje $W \in \mathcal{B}(x)$, že $W \subset U \cap V$;
- (O3) pro každé $x \in X$ a pro každé $U \in \mathcal{B}(x)$ existuje $V \in \mathcal{B}(x)$, že pro každé $y \in V$ existuje $W \in \mathcal{B}(y)$, že $W \subset U$.

Je-li X libovolná množina a soubory množin $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{P}(X)$, $x \in X$, splňují podmínky (O1), (O2) a (O3), pak na množině X existuje jediná topologie τ s bázi okolí $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$.

Důkaz. Ověření vlastností (O1), (O2) a (O3) je přímočaré.

Začneme vlastností (O1). Nechť $x \in X$, pak z neprázdnoti $\mathcal{U}(x)$ plyne existence $V \in \mathcal{U}(x)$. Dle Definice 1.10 existuje $U \in \mathcal{B}(x)$ splňující $U \subset V$. Tedy $\mathcal{B}(x)$ je neprázdny systém. Dále $x \in \bigcap \mathcal{U}(x) \subset \bigcap \mathcal{B}(x)$, a (O1) tak platí.

Jsou-li U, V v nějakém $\mathcal{B}(x)$, pak $U \cap V \in \mathcal{U}(x)$ dle (U3). Proto existuje $W \in \mathcal{B}(x)$ splňující $W \subset U \cap V$. Tedy máme (O2).

Pokud U je v nějakém $\mathcal{B}(x)$, pak existuje $A \in \mathcal{U}(x)$ takové, že $U \in \mathcal{U}(y)$ pro každé $y \in A$. Nechť $V \in \mathcal{B}(x)$ splňuje $V \subset A$. Pro $y \in V$ nyní platí, že $U \in \mathcal{U}(y)$. Existuje proto $W \in \mathcal{B}(y)$ takové, že $W \subset U$. Tedy i (O3) platí.

Je-li nyní $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ systém splňující všechny tři podmínky, pak

$$\mathcal{U}(x) = \{U \in \mathcal{P}(X); \exists B \in \mathcal{B}(x): B \subset U\}, \quad x \in X,$$

je systém splňující podmínky (U1) díky (O1), (U2) z definice, (U3) díky (O2). (U4) plyne z (O3): Je-li $U \in \mathcal{U}(x)$, pak existuje $B \in \mathcal{B}(x)$, že $B \subset U$. Použijeme podmínku (O3), tedy existuje $V \in \mathcal{B}(x)$ (a tedy speciálně $V \in \mathcal{U}(x)$), že pro každé $y \in V$ existuje $W \in \mathcal{B}(y)$, že $W \subset U$, tedy speciálně $U \in \mathcal{U}(y)$.

Systém $\{\mathcal{U}(x); x \in X\}$ splňuje předpoklady druhé části Tvrzení 1.9, tedy na množině X existuje topologie τ , že $\mathcal{U}(x) = \mathcal{U}_\tau(x)$, pro $x \in X$. Systém $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ je pak zřejmě báze okolí bodu $x \in X$.

Je-li nyní σ topologie na X taková, že $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ je báze okolí vzhledem k σ , nechť $U \in \tau$ je dána. Pak pro každé $x \in U$ existuje množina $V \in \mathcal{U}_\tau(x)$ taková, že $V \subset U$. Zvolme $W \in \mathcal{B}_\tau(x)$ splňující $W \subset V$. Pak $x \in W$ and $W \in \mathcal{B}_\tau(x) = \mathcal{B}_\sigma(x) \subset \mathcal{U}_\sigma(x)$, a tedy $U \in \sigma$ dle Tvrzení 1.8. Prohozením rolí τ a σ pak dostáváme rovnost $\tau = \sigma$. $\square$

Z důkazu vyplývá, že pokud je $\mathcal{B}$ otevřená báze prostoru X , tak pro $x \in X$ je $\{B \in \mathcal{B}; x \in B\}$ báze okolí bodu x . Dokonce stačí vzít místo $\{B \in \mathcal{B}; x \in B\}$ bázi filtru vytvořeného touto soustavou. Obráceně, pokud jsou $\mathcal{B}(x)$ lokální báze složené z otevřených množin, je $\bigcup_{x \in X} \mathcal{B}(x)$ otevřená báze prostoru.

Je vhodné si všimnout, že pokud jsou všechny body prostoru izolované kromě jednoho, řekněme x_0 , je vlastnost (U4), resp. (O3) automaticky splněna a pro lokální bázi v x_0 stačí požadavek, že je to báze filtru.

Příklady 1.12. Prostory definované pomocí okolí

1. Metrizovatelné prostory mají v každém bodě x nejvýše spočetnou lokální bázi koulí $\{B(x, 1/n); n \in \mathbb{N}\}$. To vyplývá z toho, že všechny otevřené koule tvoří otevřenou bázi a uvedené množiny tvoří bázi filtru.

2. Vějíř a ježek mají báze okolí určené funkcemi $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Pro $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ definujme $B(0, f) = \{0\} \cup \{(k, 1/n); n > f(k)\}$. Vějíř má za bázi okolí bodu 0 množiny $B(0, f)$ pro všechna $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, kdežto ježek má za bázi okolí bodu 0 jen množiny $B(0, f)$ pro konstantní $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Ježek tedy má v 0 spočetnou lokální bázi, ale

vějíř nespočetnou (viz příklad vějíře v 1.7). Vějíř tedy nemůže být metrizable. Tyto dva prostory mají vlastnost uvedenou v odstavci před příklady.

3. Uspořádaný prostor má v bodě x lokální bázi složenou ze všech otevřených intervalů obsahujících x .

4. Zobecněný uspořádaný prostor. Na uspořádaných množinách X lze definovat i topologii pomocí jiných než otevřených intervalů. Pro každý bod bude $\mathcal{B}(x)$ báze filtru složeného z nějakých intervalů obsahujících x (nevylučujeme interval $[x, x]$). Protože $\mathcal{B}(x)$ je filtr, lze brát intervaly stejného typu: buď všechny otevřené, nebo tvaru $[x, b)$, $b > x$ nebo tvaru $(a, x]$, $a < x$ nebo rovné $[x]$. V různých bodech se mohou brát různé typy. Ověření vlastnosti (O3) je stejné jako jsme použili v definici uspořádaných prostorů.

Topologie vzniklé tímto způsobem se nazývají *zobecněné uspořádané* prostory, z anglického *generalized ordered* často nazývané GO-prostory (někdy též *suborderable*, protože, jak později uvidíme, jsou to právě podprostory uspořádaných prostorů).

Význačnými příklady GO-prostorů, které nejsou LOTS, jsou Sorgenfreyova a Michaelova přímka z 1.7. Jednoduchým příkladem je i diskretní prostor.

5. Dlouhá přímka. Můžeme si představit, že $\mathbb{R}$ vznikne vyplněním mezer mezi po sobě jdoucími celými čísly intervalem $(0, 1)$. Přesně vyjádřeno, vezmeme lexikografické uspořádání na součinu $\mathbb{Z} \times [0, 1)$ a bijekci $\{(n, r) \rightsquigarrow n + r\} : \mathbb{Z} \times [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$. Uděláme něco podobného pro ω_1 místo $\mathbb{Z}$. Označíme L^+ lexikografický součin $\omega_1 \times [0, 1)$ a tento uspořádaný topologický prostor nazveme dlouhou polopřímkou. Dlouhou přímkou nazývají někteří autoři $L^+ \setminus \{0\}$. Druhou možností, kterou budeme používat, je vzít ω_1^* (ω_1 s obráceným uspořádáním), přilepit ho v 0 k ω_1 jako „zápornou“ část. Potom dlouhá přímka L je lexikografický součin tohoto slepeného prostoru s $[0, 1)$.

6. Topologie určená filtrem. Nechť X je nekonečná množina, $x_0 \in X$ a $\mathcal{F}$ je filtr na množině X . Lokální báze v bodě x_0 je soubor $\{x_0\} \cup F$; $F \in \mathcal{F}$. Body $x \neq x_0$ mají za bázi okolí množinu $\{x\}$ a jsou tedy izolované. Uvedená topologie se nazývá topologie *určená filtrem $\mathcal{F}$ v bodě x_0* . Vlastnost (O3) triviálně platí, protože se jedná o prostory z odstavce před příklady.

Příklady jsou vějíř i ježek. Význačnými příklady jsou prostory určené ultrafiltry, zvláště na spočetných množinách. Označíme $X = \mathbb{N} \cup \{\xi\}$, kde ξ je volný ultrafiltr na $\mathbb{N}$. Pak $X = \mathbb{N} \cup \{\xi\}$ a x_0 z předchozí definice je právě přidáný bod ξ . Tento prostor se často značí symbolem $\mathbb{N}_\xi$.

7. Isbellův-Mrówkův prostor skoro disjunktních množin. Isbellův-Mrówkův prostor je množina $\mathbb{N} \cup \mathcal{S}$ s topologií zadanou pomocí otevřené báze okolí bodů následujícím způsobem:

- pro $n \in \mathbb{N}$ systém $\mathcal{B}(n)$ sestává z jednobodové množiny $\{n\}$,
- pro $S \in \mathcal{S}$ je báze okolí $\mathcal{B}(S)$ tvořena množinami typu $\{S\} \cup (S \setminus F)$, kde $F \subset \mathbb{N}$ je konečná.

Ověření vlastnosti (O3) plyne skoro z odstavce před příklady, protože body z $\mathbb{N}$ v uvedených okolích jsou izolované.

8. Niemytzkého rovina. Nechť $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ s následující topologií. Body $z = (x, y)$ s kladnou druhou souřadnicí mají za bázi euklidovská okolí $U(z, r) = \{t \in X; \|t - z\|_2 < r\}$, $r > 0$, zatímco body $z = (x, 0)$ mají za bázi okolí množiny

$$\{z\} \cup U((x, r), r), \quad r > 0.$$

Snadno se přesvědčíme, že X je vskutku topologický prostor.

9. Nuldimenzionální prostory. Množina $\mathcal{O}(x)$ všech obojetných množin obsahujících daný bod x triviálně splňuje (O1)-(O3), a určuje tak topologii. Topologický prostor, který má bázi (ekvivalentně lokální bázi) složenou z obojetných množin, se nazývá *nuldimenzionální*. Nuldimenzionálními prostory jsou diskretní i indiskretní prostory, prostory určené filtrem (takže vějíř i ježek), Isbellův-Mrówkův prostor, Sorgenfreyova i Michaelova přímka, prostory $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{P}$. V těchto případech se příslušná obojetná okolí snadno najdou. Euklidovské prostory nejsou nuldimenzionální, ale důkaz (ani pro $\mathbb{R}$) není zcela jednoduchý (při použití zatím probraných znalostí).

□

1.2 Konvergence

I když konvergenci nepoužijeme k charakterizaci topologie, její použití v mnoha pojmech a postupech je důležité. Kromě zobecnění známé konvergence posloupností bude potřeba i konvergence filtrů. Oba pojmy spolu souvisí.

V topologických prostorech můžeme přirozeným způsobem definovat co znamená, že posloupnost (x_n) konverguje k bodu x . Posloupností jsou ale příliš malé k tomu, abychom mohli popsat např. uzávěr množiny nebo spojitost zobrazení. Posloupnosti indexované přirozenými čísly jsou prostě „příliš krátké“. Proto byly v úvodní části definovány usměrněné množiny, které nyní použijeme k indexování takzvaných usměrněných souborů, podobně jako slouží přirozená čísla k indexování posloupností.

Definice 1.13. Konvergence usměrněných souborů

Řekneme, že usměrněný soubor $(x_i)_{i \in I}$, kde I je usměrněná množina, *konverguje* k bodu $x \in X$, pokud pro každé okolí U bodu x existuje $i \in I$, že pro každé $j \geq i$ platí $x_j \in U$. Bod x se pak nazývá *limitou* usměrněného souboru $(x_i)_{i \in I}$. Bod x se nazývá *hromadným* bodem usměrněného souboru $(x_i)_{i \in I}$, pokud pro každé okolí U bodu x a každé $i \in I$ existuje $j \geq i$, že $x_j \in U$. $\square$

Jinými slovy, v každém okolí limity leží „skoro celý“ usměrněný soubor, kdežto v každém okolí hromadného bodu leží kofinální část usměrněného souboru.

Příklady 1.14. Příklady konvergence

1. V diskretním prostoru konvergují jen soubory, které jsou od jistého indexu konstantní. V indiskretním prostoru konverguje libovolný usměrněný soubor k libovolnému bodu.
2. Každá lineárně uspořádaná množina je usměrněná. Posloupnost je indexovaná množinou $\mathbb{N}$ s jejím obvyklým uspořádáním. Snadno je vidět, že konvergence posloupnosti v metrickém prostoru je totožná s konvergencí tohoto usměrněného souboru v topologii vytvořené metrikou, protože otevřené koule okolo limity tvoří jeho bázi okolí.
3. V prostoru X určeném filtrem $\mathcal{F}$ v bodě x_0 (vizte Příklady 1.12(6)) konverguje k x_0 soubor $\{x_F; F \in \mathcal{F}\}$, kde x_F je libovolný bod náležející do F . Je-li $\mathcal{F}$ volný ultrafiltr, nekonverguje k x_0 žádná posloupnost z $X \setminus \{x_0\}$. Vskutku, nechť to neplatí a $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konverguje k x_0 . Můžeme předpokládat, že posloupnost je prostá (jinak vybereme prostou podposloupnost z $\{x_n\}$ a ta pak též konverguje k x_0). Podposloupnosti $\{x_{2n}\}$ a $\{x_{2n+1}\}$ mají disjunktní hodnoty a tedy existuje $F \in \mathcal{F}$ disjunktní s hodnotami jedné z těchto podposloupností, která tedy k x_0 nemůže konvergovat.
4. Ve vějíři musí každá prostá posloupnost konvergující k 0 ležet v konečně mnoha ostnech. V ježkovi konverguje k 0 např. posloupnost $(n, 1/n); n \in \mathbb{N}$.
5. Na Sorgenfreyově přímce konverguje posloupnost $\{x_n\}$ k x právě když konverguje k x na $\mathbb{R}$ zprava. $\square$

Konvergence usměrněných souborů má stejné obecné vlastnosti jako konvergence posloupností v metrických prostorech. I postupy důkazů jsou přímočaré.

Tvrzení 1.15. Vlastnosti konvergence

Nechť X je topologický prostor.

- (a) Nechť usměrněný soubor $\{x_i\}_{i \in I}$ v X splňuje, že pro nějaké $i_0 \in I$ je $x_i = x$, $i \geq i_0$. Pak $\{x_i\}$ konverguje k x .
- (b) Jestliže usměrněný soubor konverguje v X , konverguje ke stejné limitě i každý jeho usměrněný podsoubor.

Důkaz. (a) Mějme $U \in \mathcal{U}(x)$ dáno, pak pro $i \geq i_0$ platí $x_i = x \in U$. Tedy $\{x_i\}$ konverguje k x .

(b) Nechť $\varphi: J \rightarrow I$ zachovává uspořádání a $\varphi(J)$ je kofinální v I . Chceme ověřit, že $\{y_j\}_{j \in J}$, kde $y_j = x_{\varphi(j)}$, $j \in J$, konverguje k x . Nechť tedy $U \in \mathcal{U}(x)$ je dáno. Pak existuje $i_0 \in I$ takové, že $x_i \in U$ pro každé $i \geq i_0$, $i \in I$. Nechť $j_0 \in J$ splňuje $\varphi(j_0) \geq i_0$. Pak pro $j \geq j_0$ platí $i = \varphi(j) \geq \varphi(j_0) \geq i_0$, takže

$$y_j = x_{\varphi(j)} = x_i \in U.$$

Tedy x je limita usměrněného souboru $\{y_j\}_{j \in J}$. $\square$

V metrickém prostoru platí, že hromadný bod posloupnosti je limitou podposloupnosti, tj. kofinální části posloupnosti. Hromadný bod usměrněného souboru obecně není limitou kofinální části souboru. Musí se použít usměrněný podsoubor definovaný v úvodní části. Jako příklad lze použít výše uvedený prostor určený volným ultrafiltrem v nějakém bodě, např. N_ξ . Bod ξ je hromadným bodem posloupnosti $\{n; n \in \mathbb{N}\}$, ale žádná její podposloupnost k ξ nekonzverguje (viz předchozí příklady).

Tvrzení 1.16. Hromadný bod versus limita

Bod x je hromadný bod usměrněného souboru $(x_i)_{i \in I}$ v prostoru X , právě když existuje usměrněný podsoubor $\{x_i\}$ konvergující v X k x .

Důkaz. $\Rightarrow$: Položíme $J = \{(U, i) \in \mathcal{U}(x) \times I; x_i \in U\}$ s uspořádáním $(U, i_1) \leq (V, i_2)$ pokud $U \supset V, i_1 \leq i_2$. Uspořádání je usměrněné, protože pro každé $(U_k, i_k), k = 1, 2$, existuje $i_3 \in I$ takové, že $i_3 \geq i_1, i_2$ takové, že $x_{i_3} \in U_1 \cap U_2$, protože $\{i \in I; x_i \in U_1 \cap U_2\}$ je kofinální v I . Nyní vezmeme $\varphi = \{(U, i) \rightsquigarrow i\}: J \rightarrow I$. Je snadno vidět, že dostáváme usměrněný podsoubor $\{x_{\varphi(j)}\}_{j \in J}$, který konverguje k x .

Vskutku, je-li totiž $V \in \mathcal{U}(x)$ dáno, nalezneme $U_0 \in \mathcal{U}(x)$ splňující $U_0 \subset V$ a $i_0 \in I$ takové, že $x_{i_0} \in U_{i_0}$. Položíme $j_0 = (U_0, i_0) \in J$. Pokud $j = (U, i) \geq j_0$ leží v J , pak $U \subset U_0$ a $i \geq i_0$. Pak

$$x_{\varphi(j)} = x_{\varphi(U, i)} = x_i \in U \subset U_0 \subset V.$$

Tedy $x_{\varphi(j)} \in V$ pro každé $j \geq j_0$, tj. $\{x_{\varphi(j)}\}_{j \in J}$ konverguje k x .

$\Leftarrow$: Necht $\{y_j\}_{j \in J}$ je usměrněný podsoubor souboru $\{x_i\}$ konvergující k x . Pak existuje zobrazení $\varphi: J \rightarrow I$ zachovávající uspořádání takové, že $\varphi(j)$ je kofinální v I a $y_j = x_{\varphi(j)}$, $j \in J$. Necht $U \in \mathcal{U}(x)$ a $i_0 \in I$ jsou dány. Nalezneme $j_0 \in J$ splňující $\varphi(j_0) \geq i_0$ a $j_1 \in J$ takové, že $y_{j_1} \in U$ pro $j \geq j_1$. Necht $j_2 \geq j_0, j_1$ a $i = \varphi(j_2)$. Pak $i \geq i_0$ a

$$x_i = x_{\varphi(j_2)} = y_{j_2} \in U.$$

Tedy x je hromadným bodem $\{x_i\}$. □

Příbuzným pojmem je konvergence filtrů, která v některých případech (např. v kompaktnosti a úplnosti) bývá výhodnější než konvergence usměrněných souborů.

Definice 1.17. Konvergence filtru

Řekneme, že filtr $\mathcal{F}$ v prostoru X konverguje k bodu $x \in X$, pokud každé okolí U bodu x náleží do $\mathcal{F}$. Bod x se pak nazývá limitou filtru $\mathcal{F}$.

Bod x se nazývá hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, pokud každé okolí U bodu x protíná každou množinu z $\mathcal{F}$. □

Jinými slovy, konvergence $\mathcal{F}$ k x znamená $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{F}$ a x je hromadným bodem $\mathcal{F}$ znamená, že existuje filtr obsahující jak $\mathcal{U}(x)$ tak $\mathcal{F}$. Z toho vyplývá jednak to, že limita je vždy hromadným bodem a že hromadný bod ultrafiltru je jeho limitou. Po definici uzávěru množiny v další části získáme další popis hromadných bodů filtrů.

V diskretním prostoru konverguje filtr $\mathcal{F}$ k bodu x právě když $\{x\} \in \mathcal{F}$. Jako jiný příklad lze uvést prostor určený filtrem $\mathcal{F}$ v bodě x_0 – v tomto případě filtr $\mathcal{F}$ konverguje k x_0 a, je-li volný, k žádnému jinému bodu.

Paralela mezi konvergencí usměrněných souborů a filtrů je obdobná jako u posloupností a průniky klesajících posloupností množin. Důkaz následujícího tvrzení je opět přímočarý.

Tvrzení 1.18. Filtry versus usměrněné soubory

- (a) Bod $x \in X$ je limitou (resp. hromadným bodem) usměrněného souboru $\{x_i; i \in I\}$, právě když je limitou (resp. hromadným bodem) filtru s bází $\{x_i, i \geq j\}, j \in I$.
- (b) Bod $x \in X$ je limitou filtru $\mathcal{F}$, právě když je limitou každého usměrněného souboru $\{x_F; F \in \mathcal{F}\}$, kde $x_F \in F$ a $\mathcal{F}$ je uspořádán obrácenou inkluzí.

Důkaz. (a) Necht x je limitou usměrněného souboru $\{x_i\}$ a $\mathcal{F}$ je filtr s bází tvořenou množinami $\{x_i; i \geq j\}, j \in I$. Necht $U \in \mathcal{U}(x)$ je dáno. Nalezneme $j \in I$ splňující $x_i \in U$ pro $i \geq j$. Pak $\{x_i; i \geq j\} \subset U$, a tedy $U \in \mathcal{F}$. Tedy $\mathcal{F}$ konverguje k x .

Obráceně, necht filtr $\mathcal{F}$ vytvořený jako výše konverguje k bodu x . Necht $U \in \mathcal{U}(x)$ je dáno. Pak $U \in \mathcal{F}$ a dle Definice 0.3 existuje $j \in I$ takové, že $\{x_i; i \geq j\} \subset U$. Tedy $x_i \in U$ pro $i \geq j$, takže $\{x_i\}$ konverguje k x .

Druhá část (a) týkající se hromadného bodu se dokáže obdobně. Vskutku, necht x je hromadný bod usměrněného souboru $\{x_i\}_{i \in I}$ a $\mathcal{F}$ je vytvořen jako výše. Necht U je okolí x a $F \in \mathcal{F}$ je dáno. Pak existuje

$j \in I$ takové, že $\{x_i; i \geq j\} \subset F$. Zvolíme $k \in I$ splňující $k \geq j$ a $x_k \in U$. Pak

$$x_k \in U \cap \{x_i; i \geq j\} \subset U \cap F.$$

Tedy F protíná U , a tedy x je hromadným bodem $\mathcal{F}$.

Obráceně, nechť x je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ vytvořeného jako výše. Nechť $U \in \mathcal{U}(x)$ a $j \in I$ jsou dány. Pak U protíná básovou množinu filtru $\{x_i; i \geq j\}$, takže existuje $i \geq j$ splňující $x_i \in U$. Tedy x je hromadným bodem usměrněného souboru $\{x_i\}$.

(b) Nechť $\mathcal{F}$ je filtr na X a $\{x_F; F \in \mathcal{F}\}$ je usměrněný soubor vytvořený z $\mathcal{F}$, tedy $x_F \in F$ pro $F \in \mathcal{F}$. Nechť $\mathcal{F}$ konverguje k x . Pro dané okolí $U \in \mathcal{U}(x)$ víme, že $U \in \mathcal{F}$. Uvažujme nyní libovolné $F \in \mathcal{F}$, které splňuje $U \leq F$. Pak $F \subset U$, a tedy $x_F \in F \subset U$. Proto $\{x_F\}_{F \in \mathcal{F}}$ konverguje k x .

Obráceně, nechť x není limitou $\mathcal{F}$. Pak existuje $U \in \mathcal{U}(x)$ splňující $U \notin \mathcal{F}$. Uvažujme libovolné $F \in \mathcal{F}$. Pak $F \not\subset U$, a tedy existuje $x_F \in F \setminus U$. Pak $\{x_F\}_{F \in \mathcal{F}}$ je usměrněný soubor vytvořený z $\mathcal{F}$, jehož všechny hodnoty leží mimo U . Tedy tento soubor nekonverguje k x . $\square$

1.3 Vnitřek, uzávěr a hranice

Uvedeme nyní několik dalších základních pojmů úzce spjatých s otevřenými a uzavřenými množinami a které se dají použít k charakterizaci topologií.

Definice 1.19. Uzávěr, vnitřek a hranice množiny

Je-li $A \subset X$, pak *uzávěr* množiny A je množina

$$\overline{A} = \bigcap \{F; F \text{ je uzavřená, } A \subset F\}.$$

Vnitřek množiny A je množina

$$\text{Int } A = \bigcup \{U \in \tau; U \subset A\}.$$

Hranice množiny A je množina $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$. $\square$

Pokud potřebujeme zdůraznit, že se jedná o operaci v prostoru X , píšeme $\overline{A}^X, \text{Int}_X A, \partial_X A$. Pokud chceme zdůraznit vztah operace k topologii τ , píšeme $\overline{A}^\tau, \text{Int}_\tau A, \partial_\tau A$.

Příklady 1.20. Příklady uzávěrů

1. V diskrétním prostoru X pro každé $A \subset X$ platí $\overline{A} = \text{Int } A = A, \partial A = \emptyset$.

V indiskrétním prostoru X pro $A \subset X$ je $\overline{A} = X$ pro $A \neq \emptyset$, $\text{Int } A = \emptyset$ pro $A \neq X$ a $\partial A = X$ pro $A \neq X, \emptyset$.

2. V $\mathbb{R}$ je $\partial \mathbb{Q} = \partial \mathbb{P} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{P}} = \mathbb{R}$, $\text{Int } \mathbb{Q} = \text{Int } \mathbb{P} = \emptyset$.

3. Na Michaelově přímce je $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}, \overline{\mathbb{P}} = \mathbb{R}$, $\text{Int } \mathbb{P} = \mathbb{P}, \text{Int } \mathbb{Q} = \emptyset$.

4. V Isbellově-Mrówkové prostoru $X = N \cup S$ je $\overline{N} = X, \overline{S} = S$, $\text{Int } N = N, \text{Int } S = \emptyset$. $\square$

Uvedeme nyní několik jednoduchých vztahů mezi uvedenými operátory.

Tvrzení 1.21. Základní vlastnosti

(a) Uzávěr i hranice jsou uzavřené množiny, vnitřek je otevřená množina.

(b) Množina je uzavřená, právě když se rovná svému uzávěru, a je otevřená, právě když se rovná svému vnitřku.

Důkaz. (a) Toto tvrzení plyne z (T3) a Tvrzení 1.4.

(b) Je-li $A \subset X$ uzavřená, pak $A \subset \overline{A} \subset A$, tedy $A = \overline{A}$. Pokud $\overline{A} = A$, z (a) máme uzavřenost A .

Pokud $A \subset X$ je otevřená, pak zjevně $A \supset \text{Int } A \supset A$, a tedy $A = \text{Int } A$. Pokud $A = \text{Int } A$, A je otevřená díky (a). $\square$

Tvrzení 1.22. Vztah vnitřku a uzávěru

Je-li (X, τ) topologický prostor a $A \subset X$, pak platí následující vztahy.

- (a) $X \setminus \overline{A} = \text{Int}(X \setminus A)$;
- (b) $X \setminus \text{Int } A = \overline{X \setminus A}$.

Důkaz. (a) Množina $X \setminus \overline{A}$ je otevřená podmnožina $X \setminus A$, tedy $X \setminus \overline{A} \subset \text{Int}(X \setminus A)$. Na druhou stranu $X \setminus A \supset \text{Int}(X \setminus A)$, tedy přechodem k doplňku $A \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$, což je uzavřená množina, tedy $\overline{A} \subset X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$. Po přechodu k doplňkům $X \setminus \overline{A} \supset \text{Int}(X \setminus A)$.

(b) Druhá část se dokáže přechodem k doplňku $B = X \setminus A$ a využitím první části. Máme totiž dle (a)

$$X \setminus \overline{B} = \text{Int}(X \setminus B) = \text{Int } A,$$

a tedy $X \setminus \text{Int } A = \overline{B} = \overline{X \setminus A}$. □

Tvrzení 1.23. Charakterizace uzávěru pomocí okolí

Bud' (X, τ) topologický prostor, $x \in X$, $A \subset X$ a $\mathcal{B}(x)$ báze okolí v bodě x . Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:

- (i) $x \in \overline{A}$,
- (ii) pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ je $U \cap A \neq \emptyset$,
- (iii) pro každé $U \in \mathcal{B}(x)$ je $U \cap A \neq \emptyset$.

Důkaz. Implikaci (i) $\implies$ (ii) dokážeme sporem. Kdyby pro nějaké $U \in \mathcal{U}(x)$ bylo $U \cap A = \emptyset$, pak existuje $V \in \mathcal{U}(x)$ otevřená, že $V \subset U$. Tedy $V \cap A = \emptyset$. Množina $X \setminus V$ je uzavřená a $A \subset X \setminus V$. Tedy také $\overline{A} \subset X \setminus V$. Pak ovšem $x \notin \overline{A}$, což je spor.

Implikace (ii) $\implies$ (iii) je triviální. Implikaci (iii) $\implies$ (i) dokážeme opět sporem. Kdyby $x \notin \overline{A}$, pak $x \in X \setminus \overline{A}$, což je otevřená množina. Tedy existuje $U \in \mathcal{B}(x)$, že $U \subset X \setminus \overline{A}$. Tedy $U \cap A = \emptyset$, což je spor. □

V předchozím tvrzení nelze vzít místo báze $\mathcal{B}(x)$ subbázi okolí bodu x . Např. v $X = \mathbb{R}$ vezmeme $A = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Víme, že $0 \notin \overline{A}$, ale každý prvek subbáze okolí 0 $\{(r, \infty); r < 0\} \cup \{(-\infty, r); r > 0\}$ protíná A .

Poznámka 1.24

Jako speciální důsledky dostáváme následující. Je-li U otevřená, pak $U \cap A = \emptyset$ právě když $U \cap \overline{A} = \emptyset$. Jsou-li U, V otevřené disjunktní množiny, pak $U \cap \overline{V} = \emptyset = \overline{U} \cap V$.

Často se používá popis uzávěru množiny pomocí konvergence a popis hromadných bodů filtru pomocí uzávěru.. Tento popis odpovídá situaci v metrických prostorech.

Tvrzení 1.25. Vztah uzávěru a konvergence

- (a) Je-li A podmnožina prostoru X , pak

$$\begin{aligned} \overline{A} &= \{x \in X; x \text{ je limitou nějakého usměrněného souboru v } A\} \\ &= \{x \in X; x \text{ je hromadným bodem nějakého usměrněného souboru v } A\} \\ &= \{x \in X; x \text{ je limitou nějakého filtru v } A\} \\ &= \{x \in X; x \text{ je hromadným bodem nějakého filtru v } A\}. \end{aligned}$$

- (b) Bod $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, právě když $x \in \bigcap \{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

- (c) Bod $x \in X$ je limitou ultrafiltru $\mathcal{F}$, právě když $x \in \bigcap \{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$.

Důkaz. (a) Je-li $x \in \overline{A}$, vezmeme pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ bod $x_U \in U \cap A$ (podle Tvrzení 1.23). Pak usměrněný soubor $\{x_U; U \in \mathcal{U}(x)\}$ leží v A a konverguje k x .

Je-li x limitou nějakého usměrněného souboru v A , je zjevně i hromadným bodem usměrněného souboru v A .

Je-li x hromadným bodem usměrněného souboru v A , dle Tvzení 1.16 existuje usměrněný soubor $\{x_i\}$ v A s limitou x . Pak filtr $\mathcal{F}$ s bází $\{x_i; i \geq j\}$, $j \in I$, dle Tvzení 1.18(a) konverguje k x . Tedy x je limitou filtru obsaženého v A .

Zjevně je bod $x \in X$ hromadným bodem filtru ležícího v A , je-li limitou filtru ležícího v A .

Pokud $\mathcal{F}$ je filtr v A , jehož je bod $x \in X$ hromadným bodem, pak pro každé okolí $U \in \mathcal{U}(x)$ a každé $F \in \mathcal{F}$ platí $U \cap F \neq \emptyset$. Jelikož $F \subset A$, dostáváme, že každé okolí x protíná A , tj. $x \in \overline{A}$.

(b) Bod $x \in X$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, právě když každé jeho okolí protíná každou množinu $F \in \mathcal{F}$, což platí právě když $x \in \overline{F}$ pro každé $F \in \mathcal{F}$.

(c) Jelikož je hromadný bod ultrafiltru jeho limitou, plyne (c) z (b). $\square$

Z důkazu (a) je vidět, že místo $\mathcal{U}(x)$ pro indexování usměrněného souboru stačí brát lokální bázi v bodě x . Protože lokální báze v metrickém prostoru lze vzít spočetné, vyplývá z tvrzení, že uzávěry v metrických prostorech jsou určeny limitami posloupností, což je ve shodě s výsledky v metrických prostorech.

Tvrzení 1.26. Vlastnosti uzávěru

Pro množiny A, B v topologickém prostoru (X, τ) platí

$$(C1) \quad \overline{\emptyset} = \emptyset,$$

$$(C2) \quad A \subset \overline{A},$$

$$(C3) \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$(C4) \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}.$$

Je-li $\mathcal{C}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ libovolné zobrazení splňující podmínky (C1)-(C4), pak na X existuje jediná topologie, jejíž operátor uzávěru se shoduje s $\mathcal{C}$.

Důkaz. Ověření (C1) a (C2) je triviální. Z definice uzávěru vyplývá, že pro $A \subset B$ je $\overline{A} \subset \overline{B}$. Z tohoto vztahu plyne jedna inkluze v (C3), totiž $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cup \overline{B}$. Obrácená inkluze plyne z Tvzení 1.23: pokud $x \notin \overline{A \cup B}$, existují jeho okolí U, V , že $U \cap A = \emptyset, V \cap B = \emptyset$. Potom ale $(U \cap V) \cap (A \cup B) = \emptyset$ a tedy $x \notin \overline{A \cup B}$. Ohledně (C4), pokud $F \supset A$ je uzavřená, pak $F = \overline{F} \supset \overline{A}$. Tedy

$$\overline{A} = \bigcap \{F \subset X; F \supset \overline{A} \text{ uzavřená}\} = \bigcap \{F \subset X; F \supset A \text{ uzavřená}\} = \overline{A}.$$

Nechť nyní $\mathcal{C}$ je zobrazení splňující (C1)-(C4). Položme

$$\mathcal{F} = \{A \subset X; \mathcal{C}(A) = A\}.$$

Ukážeme, že $\mathcal{F}$ obsahuje $\emptyset, X$ a je uzavřený vzhledem k libovolným průnikům a konečným sjednocením.

Za prvé máme z (C1) vztah $\emptyset \in \mathcal{F}$. Dále $X \subset \mathcal{C}(X) \subset X$, takže i $X \in \mathcal{F}$. Pokud $A, B \in \mathcal{F}$, pak $\mathcal{C}(A) = A$ a $\mathcal{C}(B) = B$. Dle (C3) platí $\mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) = A \cup B$, a tedy $\mathcal{F}$ je uzavřený na konečná sjednocení. Povšimněme si, že pokud $A \subset B$, pak $A \cup B = B$, a tedy (C3) implikuje $\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B) = \mathcal{C}(A \cup B) = \mathcal{C}(B)$. Tedy $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(B)$.

Mějme nyní systém $\mathcal{H} \subset \mathcal{F}$. Pak pro $H \in \mathcal{H}$ platí $\mathcal{C}(\bigcap \mathcal{H}) \subset \mathcal{C}(H) = H$, a tedy $\mathcal{C}(\bigcap \mathcal{H}) \subset \bigcap \mathcal{H}$. Vlastnost (C2) nyní dává $\mathcal{C}(\bigcap \mathcal{H}) = \bigcap \mathcal{H}$ a $\mathcal{F}$ je uzavřený na libovolné průniky.

Dle Tvzení 1.4 tak existuje právě jedna topologie τ na X , pro níž systém $\mathcal{F}$ tvoří soubor všech uzavřených množin v τ . Nechť $\overline{A}^\tau$ značí uzávěr v topologii τ . Chceme ověřit, že $\overline{A}^\tau = \mathcal{C}(A)$ pro každou $A \subset X$.

Je-li tedy $A \subset X$, pak $\mathcal{C}(A) \in \mathcal{F}$ dle (C4). Tedy $\mathcal{C}(A)$ je uzavřená v τ , a proto $\overline{A}^\tau \subset \mathcal{C}(A)$. Vezměme nyní libovolnou τ -uzavřenou množinu F obsahující A . Pak $F \in \mathcal{F}$, a tedy $\mathcal{C}(F) = F$. Z monotonie operace $\mathcal{C}$ pak dostáváme $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{C}(F) = F$, a tedy

$$\mathcal{C}(A) \subset \bigcap \{H \in \mathcal{F}; H \supset A\} = \overline{A}^\tau.$$

Tedy $\mathcal{C}(A) = \overline{A}^\tau$.

Pokud σ je topologie na X , pro kterou platí $\mathcal{C}(A) = \overline{A}^\sigma$, $A \subset X$, pak pro $F \subset X$ máme následující ekvivalence:

$$F \text{ je } \tau\text{-uzavřená} \iff F = \overline{F}^\tau \iff F = \mathcal{C}(F) \iff F = \overline{F}^\sigma \iff F \text{ je } \sigma\text{-uzavřená}.$$

Tedy $\tau = \sigma$. $\square$

Za povšimnutí stojí monotónnost uzávěru ukázaná v důkazu a z toho plynoucí inkluze $\overline{\bigcap_I A_i} \subset \bigcap_I \overline{A_i}$.

Uvedené vlastnosti (C1)-(C4), charakterizující uzávěr a přes uzávěr topologické prostory, se nazývají Kuratowského axiomy (z r. 1922).

Použitím doplňků a de Morganových vzorců jsme z topologie definované pomocí otevřených množin popsali topologii pomocí uzavřených množin. Stejným způsobem získáme z předchozího tvrzení popis topologie pomocí vnitřku množin, jen místo doplňků použijeme vztahy z Tvrzení 1.22: $\text{Int } A = X \setminus \overline{X \setminus A}$, $\overline{A} = X \setminus \text{Int}(X \setminus A)$.

Tvrzení 1.27. Vlastnosti vnitřku

Pro množiny A, B v topologickém prostoru (X, τ) platí

$$(I1) \text{ Int } X = X;$$

$$(I2) \text{ Int } A \subset A;$$

$$(I3) \text{ Int}(A \cap B) = \text{Int } A \cap \text{Int } B;$$

$$(I4) \text{ Int}(\text{Int } A) = \text{Int } A.$$

Je-li $\mathcal{I}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ libovolné zobrazení splňující podmínky (I1)-(I4), pak na X existuje jediná topologie, jejíž operátor vnitřku se shoduje s $\mathcal{I}$.

Důkaz. (I1) plyne z otevřenosti X , (I2) je jasné z definice a (I4) plyne z otevřenosti $\text{Int } A$. Ohledně ověření (I3) počítejme

$$\begin{aligned} \text{Int}(A \cap B) &= X \setminus \overline{X \setminus (A \cap B)} = X \setminus \overline{(X \setminus A) \cup (X \setminus B)} = X \setminus (\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}) \\ &= (X \setminus \overline{X \setminus A}) \cap (X \setminus \overline{X \setminus B}) = \text{Int } A \cap \text{Int } B. \end{aligned}$$

Nechť nyní $\mathcal{I}$ je zobrazení splňující (I1)-(I4). Uvažujme operátor $\mathcal{C}: \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definovaný jako $\mathcal{C}(A) = X \setminus \mathcal{I}(X \setminus A)$, $A \in \mathcal{P}(X)$. Pak $\mathcal{C}$ splňuje vlastnosti (C1)-(C4) z Tvrzení 1.26. Máme tak jednoznačně určenou topologii τ , pro kterou je $\mathcal{C}$ operátor uzávěru. Proto

$$\mathcal{I}(A) = X \setminus \mathcal{C}(X \setminus A) = X \setminus \overline{X \setminus A}^\tau = \text{Int}_\tau(A).$$

Tedy $\mathcal{I}$ je operátor vnitřku pro τ . Z jednoznačnosti τ vzhledem k $\mathcal{C}$ pak plyne i jednoznačnost τ vzhledem k $\mathcal{I}$. $\square$

Předchozí popis topologie pomocí vnitřku se příliš nepoužívá, stejně tak, jako popis pomocí hranice. Proto ho neuvádíme, ale shrneme jeho vlastnosti.

Tvrzení 1.28. Charakterizace hranice

Ať $A \subset X$ a $x \in X$. Pak $x \in \partial A$, právě když každé okolí bodu x protíná jak A , tak $X \setminus A$.

Důkaz. Plyne okamžitě z definice hranice $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$ a charakterizace uzávěru. $\square$

Tvrzení 1.29. Vlastnosti hranice

Pro množinu A v prostoru X platí:

$$(a) \partial A = \partial(X \setminus A),$$

$$(b) \partial A = \overline{A} \setminus \text{Int } A,$$

$$(c) \overline{A} = A \cup \partial A,$$

$$(d) \text{Int } A = A \setminus \partial A,$$

$$(e) \partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B,$$

$$(f) \partial(A \cap B) \subset \partial A \cup \partial B,$$

$$(g) X = \text{Int } A \cup \partial A \cup \text{Int}(X \setminus A),$$

$$(h) \partial(\overline{A}) \subset \partial A,$$

$$(i) \partial(\text{Int } A) \subset \partial A,$$

(j) A je otevřená, právě když $\partial A = \bar{A} \setminus A$,

(k) A je uzavřená, právě když $\partial A = A \setminus \text{Int } A$,

(l) A je obojetná, právě když $\partial A = \emptyset$.

Důkaz. (a) Plyne ihned z definice.

(b) Použitím vztahu vnitřku a uzávěru dostáváme

$$\partial A = \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} = \bar{A} \cap (X \setminus \text{Int } A) = \bar{A} \setminus \text{Int } A.$$

(c) Díky (b) máme

$$\bar{A} \supset A \cup \partial A \supset \text{Int } A \cup \partial A = \text{Int } A \cup (\bar{A} \setminus \text{Int } A) = \bar{A}.$$

(d) Z (b) máme

$$A \setminus \partial A = A \setminus (\bar{A} \cap (X \setminus \text{Int } A)) = (A \setminus \bar{A}) \cup (A \setminus (X \setminus \text{Int } A)) = \emptyset \cup \text{Int } A = \text{Int } A.$$

(e) Užitím definic a vztahů mezi uzávěrem a průnikem (resp. sjednocením) dostáváme

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &= \overline{A \cup B} \cap \overline{X \setminus (A \cup B)} = \overline{A \cup B} \cap (\overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B}) \\ &\subset (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap \overline{X \setminus A} \cap \overline{X \setminus B} \subset \partial A \cup \partial B. \end{aligned}$$

(f) Máme

$$\begin{aligned} \partial(A \cap B) &= \overline{A \cap B} \cap \overline{X \setminus (A \cap B)} = \overline{A \cap B} \cap (\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}) \\ &\subset \bar{A} \cap \bar{B} \cap (\overline{X \setminus A} \cup \overline{X \setminus B}) \subset \partial A \cup \partial B. \end{aligned}$$

(g) Je-li $x \in X$ a $x \notin \partial A$, pak buď $x \notin \bar{A}$, pak ovšem $x \in \text{Int}(X \setminus A)$, nebo $x \notin \overline{X \setminus A}$, pak ale $x \in \text{Int } A$.

(h) Máme

$$\partial \bar{A} = \bar{A} \cap \overline{X \setminus \bar{A}} \subset \bar{A} \cap \overline{X \setminus A} = \partial A.$$

(i) Máme

$$\partial(\text{Int } A) \subset \overline{\text{Int } A} \subset \bar{A}$$

a navíc

$$\partial(\text{Int } A) = \partial(X \setminus \overline{X \setminus A}) = \partial(\overline{X \setminus A}) \subset \overline{X \setminus A}.$$

(j) Je-li A otevřená, pak dle (b) platí $\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int } A = \bar{A} \setminus A$. Obráceně, pokud platí $\partial A = \bar{A} \setminus A$, pak opět z (b) plyne $\bar{A} \setminus A = \partial A = \bar{A} \setminus \text{Int } A$. Tedy $A = \text{Int } A$ je otevřená.

(k) Pokud A je uzavřená, pak dle (b) platí $\partial A = \bar{A} \setminus \text{Int } A = A \setminus \text{Int } A$. Obráceně, pokud platí příslušná rovnost, máme $\bar{A} \setminus \text{Int } A = \partial A = A \setminus \text{Int } A$. Tedy $A = \bar{A}$ je uzavřená.

(l) Je-li A obojetná, pak dle (j) platí $\partial A = \bar{A} \setminus A = A \setminus A = \emptyset$. Obráceně, pokud $\partial A = \emptyset$, pak dle (b) je $\bar{A} \setminus \text{Int } A = \emptyset$. Tedy $\bar{A} = \text{Int } A \subset A \subset \bar{A}$, a množina A je tak uzavřená i otevřená, tj. obojetná. $\square$

1.4 Husté a řídké množiny, hromadné body množiny

V této části uvedeme několik vlastností podmnožin, které mohou ovlivnit chování celého prostoru. Zvláště husté podmnožiny jsou důležité, protože často umožňují převést zkoumání celého prostoru na značně menší podmnožinu.

Definice 1.30. Hustá a řídká množina

Množina $A \subset X$ se nazývá *hustá*, pokud $\bar{A} = X$. Množina A se nazývá *řídká*, pokud $X \setminus \bar{A}$ je hustá v X . $\square$

Víme, že $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ jsou husté množiny v $\mathbb{R}$, množina $\mathbb{Z}$ je řídká v $\mathbb{R}$.

V diskrétním prostoru je jedinou hustou množinou celý prostor a jedinou řídkou množinou prázdná množina. V indiskrétním prostoru je každá neprázdná množina hustá a jediné prázdná množina je řídká.

V Sierpińského prostoru je bod 0 hustý, bod 1 řídký (chápeme-li body jako jednobodové množiny).

V Sorgenfreyově přímce jsou množiny $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{P}$ husté. V Michaelově přímce je $\mathbb{P}$ hustá, kdežto $\mathbb{Q}$ řídká.

Tvrzení 1.31. Charakterizace hustých a řídkých množin

V topologickém prostoru X pro množinu $A \subset X$ platí následující tvrzení.

- (a) Množina A je hustá, právě když každá neprázdná otevřená množina $U \subset X$ protíná A .
- (b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní.
 - (bi) Množina A je řídká.
 - (bii) Každá otevřená neprázdná množina V obsahuje neprázdnou otevřenou množinu U , která je disjunktní s A .
 - (biii) Platí $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$.

Důkaz. (a) $\implies$: Je-li A hustá a $U \subset X$ je otevřená neprázdná, pak pokud $U \cap A = \emptyset$, dostáváme z rovnosti $X = \overline{A} \subset X \setminus U = X \setminus U$ spor. Tedy $U \cap A \neq \emptyset$.

$\impliedby$: Je-li $x \in X$ a $U \in \mathcal{U}(x)$, pak $U \cap A \neq \emptyset$ z předpokladu. Tedy $x \in \overline{A}$ dle Tvrzení 1.23. Proto $X \subset \overline{A}$.

(b)(bi) $\implies$ (bii): Necht $V \subset X$ je otevřená neprázdná. Jelikož je $X \setminus \overline{A}$ hustá, je otevřená množina $V \cap (X \setminus \overline{A})$ neprázdná. Zvolme neprázdnou $U \subset V \cap (X \setminus \overline{A})$. Pak $U \subset V$ a přitom $U \cap A \subset U \cap \overline{A} = \emptyset$.

(bii) $\implies$ (biii): Pokud $V = \text{Int}(\overline{A}) \neq \emptyset$, dle (bii) existuje $U \subset V$ neprázdná otevřená disjunktní s A . Zvolme libovolné $x \in U$. Pak dle Tvrzení 1.23 platí $U \cap A \neq \emptyset$, neboť $x \in U \subset V \subset \overline{A}$ a $U \in \mathcal{U}(x)$. To je však spor s volbou U . Tedy $\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset$.

(biii) $\implies$ (bi): Necht $V \subset X$ je otevřená neprázdná. Pokud $V \cap (X \setminus \overline{A}) = \emptyset$, tj. $V \subset \overline{A}$, je $\text{Int}(\overline{A}) \neq \emptyset$, což je spor s (biii). Tedy V protíná $X \setminus \overline{A}$, což dle (a) znamená, že $X \setminus \overline{A}$ je hustá. Tedy A je řídká. $\square$

V 1.1 jsme definovali izolovaný bod prostoru. Tento pojem usnadnil popis různých příkladů. Můžeme ho zrelativizovat vzhledem k podmnožinám prostoru. V další kapitole uvidíme, že to není nic jiného než izolovaný bod podprostoru.

Definice 1.32. Izolovaný a hromadný bod

Ať X je topologický prostor a $A \subset X$.

- Bod $x \in X$ se nazývá *izolovaným bodem* množiny A , pokud existuje otevřená množina $U \subset X$, že $U \cap A = \{x\}$.
- Bod $x \in X$ se nazývá *hromadným bodem* množiny A , pokud každé okolí U bodu x protíná $A \setminus \{x\}$ (tj. $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$). Množinu všech hromadných bodů množiny A značíme A' (tzv. derivace množiny A). $\square$

V diskrétním prostoru jsou všechny body izolované a žádné hromadné. V indiskrétním aspoň dvoubodovém prostoru není žádný bod izolovaný a všechny body jsou hromadnými body každé neprázdné množiny.

Je-li $X = \mathbb{R}$ a $A = \mathbb{Q}$, pak $A' = \mathbb{R}$ a žádný bod z A není izolovaný.

Tvrzení 1.33. Vlastnosti derivace

V topologickém prostoru X platí pro množiny $A, B \subset X$ vztahy $\overline{A} = A \cup A'$, $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

Důkaz. Z charakterizace uzávěru plyne $\overline{A} \supseteq A'$, tedy $\overline{A} \supseteq A \cup A'$. Je-li $x \in \overline{A} \setminus A$, pak opět z charakterizace uzávěru je $x \in A'$, tedy $\overline{A} \subset A \cup A'$. Druhá rovnost se dokáže snadno. $\square$

Poznámka 1.34

Souvislost hromadných bodů množiny a hromadných bodů usměrněného souboru je stejná jako u hromadných bodů podmnožin metrických prostorů a hromadných bodů posloupností.

- (a) Platí, že $x \in A'$, právě když existuje usměrněný soubor v A , jehož všechny body jsou různé od x a který konverguje k x (nebo jehož hromadná hodnota je x).
- (b) Hromadný bod x usměrněného souboru $(x_i)_{i \in I}$ nemusí být hromadným bodem množiny $\{x_i; i \in I\}$.

Důkaz. (a) Víme z Tvrzení 1.25, že $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$, právě když existuje usměrněný soubor v $A \setminus \{x\}$, který konverguje k x (nebo jehož hromadná hodnota je x).

(b) Stačí vzít konstantní posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, kde $x_n = z$ pro vybraný bod z našeho prostoru X . Pak $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = z$, ale $x \notin \{z\}'$. $\square$

V následující definici je nejdůležitějším pojmem 2. kategorie. Prostory s touto vlastností plní důležitou roli ve funkcionální analýze i v jiných odvětvích matematiky. Budeme se později tomuto pojmu věnovat více, nyní jen základní charakterizace.

Definice 1.35. Množiny 1. a 2. kategorie, Baireův prostor

d: kategorie

Množina A v topologickém prostoru X se nazývá *1. kategorie*, je-li spočetným sjednocením řídkých množin. Nazývá se *2. kategorie*, pokud není 1. kategorie. Dále je *reziduální*, pokud její doplněk je 1. kategorie. A konečně se nazývá *Baireův*, splňuje-li jednu z ekvivalentních vlastností v Tvzení 1.36. $\square$

Tvrzení 1.36. Charakterizace Baireova prostoru

Pro topologický prostor X jsou následující vlastnosti ekvivalentní:

- (i) Je-li $\{G_n\}$ posloupnost hustých otevřených množin v X , je $\bigcap_n G_n$ hustý v X .
- (ii) Jsou-li F_n , $n \in \mathbb{N}$, řídké množiny v X , je $X \setminus \bigcup_n F_n$ hustý.

Důkaz. Ekvivalence obou vlastností je skoro zřejmá (doplňky a de Morganovy vzorce).

Vskutku, dokažme (i) $\implies$ (ii). Nechť F_n , $n \in \mathbb{N}$ jsou řídké množiny v X . Pak $G_n = X \setminus \overline{F_n}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřené husté. Tedy $\bigcap_n G_n$ je hustá množina v X . Proto je

$$X \setminus \bigcup_n F_n = \bigcap_n (X \setminus F_n) \supset \bigcap_n (X \setminus \overline{F_n}) = \bigcap_n G_n$$

hustá množina.

Pro implikaci (ii) $\implies$ (i) uvažujme otevřené husté množiny G_n , $n \in \mathbb{N}$, v X . Pak $F_n = X \setminus G_n$, $n \in \mathbb{N}$ jsou řídké, takže

$$X \setminus \bigcup_n F_n = \bigcap_n (X \setminus F_n) = \bigcap_n G_n$$

je hustá množina v X . $\square$

Příklady 1.37. Příklady Baireových prostorů

1. Každý konečný prostor je Baireův.
2. Je známo z metrických prostorů, že pro každý úplný metrický prostor platí Baireova věta (viz ??), která jinými slovy říká, že daný prostor je Baireův. Takže např. každý diskretní prostor je Baireův, každý euklidovský prostor je Baireův.
3. Pokud podmnožina obsahuje izolovaný bod celého prostoru, je v tomto prostoru 2. kategorie. Opak samozřejmě neplatí, např. $\mathbb{R}$.
4. Každý spočetný prostor bez izolovaných bodů je 1. kategorie. takže $\mathbb{Q}$ je 1. kategorie v jakémkoli větším prostoru.
5. Prostor $\mathbb{N}$ je jako podmnožina $\mathbb{R}$ 1. kategorie, ale jako samostatný prostor je 2. kategorie. Totéž platí o Cantorově množině, která je nespočetná. Podobně $\mathbb{R}$ je 2. kategorie v sobě, ale je řídká v $\mathbb{R}^2$.
6. Prostor $[0, 1] \cup (\mathbb{Q} \cap [2, 3])$ uvažovaný s euklidovskou topologií je 2. kategorie, ale není Baireův. $\square$

Lze ukázat, že každý prostor 2. kategorie bez izolovaných bodů má mohutnost kontinua, takže je z jistého hlediska veliký (vizte [?]). Nicméně, např. $\mathbb{R}$ lze napsat jako sjednocení dvou „malých“ množin, z nichž jedna je 1. kategorie a druhá má lebesgueovskou míru rovnou nule.

Vskutku, uvažujme očíslování $\mathbb{Q} = \{q_n; n \in \mathbb{N}\}$ a množiny $G_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} (q_n - 2^{-k-n}, q_n + 2^{-k-n})$, $k \in \mathbb{N}$. Pak G_k je otevřená hustá a

$$\lambda(G_k) \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cdot 2^{-k-n} = 2 \cdot 2^{-k} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = 2^{-k+1}.$$

Jelikož $G_k \supset G_{k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, máme pro $G = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_k$ odhad $\lambda(G) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda(G_k) = 0$. Jelikož je $\mathbb{R}$ úplný metrický prostor, je G hustá množina nulové míry. Navíc $\mathbb{R} \setminus G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus G_k)$ je spočetné sjednocení uzavřených řídkých množin, tedy množina 1. kategorie.

1.5 Základní kardinální charakteristiky topologického prostoru

V předchozích částech jsme pracovali s filtrem okolí bodů, s otevřenými bázemi a s hustými množinami. Je zřejmé, že pro práci s nimi je lepší, pokud jsou tyto množiny co nejmenší. Proto se zavádějí tzv. kardinální funkce, které nám popisují velikost těchto množin a jejich znalost dává určité informace o prostorech. Jsou to zobrazení, které bodům, množinám nebo prostorům přiřazují kardinální čísla. V dalších kapitolách budou postupně další kardinální funkce přibývat, nyní se omezíme na případy souvisejících s bázemi a s hustotou.

Definice 1.38. Váha, charakter, hustota

- (a) *Váhu* prostoru X značíme $w(X)$ (z anglického *weight*) a je to nejmenší mohutnost báze. Přesnější značení $w(X, \tau)$ použijeme tehdy, pokud topologie τ není zřejmá z kontextu.
- (b) *Charakter v bodě* $x \in X$ značíme $\chi(x, X)$ a je to nejmenší mohutnost báze okolí v bodě x . *Charakter prostoru* X značíme $\chi(X)$ a jedná se o supremum charakterů v jednotlivých bodech.
- (c) *Hustota* prostoru X je nejmenší mohutnost husté množiny v X a značí se $d(X)$ (z anglického *density*). Prostor, jehož hustota je nejvýše spočetná, se nazývá *separabilní*

□

V předchozí definici se připouští konečné hodnoty kardinálních funkcí. Např. $\chi(X) = 1$ pro každý neprázdný diskrétní prostor. Někdy se definují kardinální funkce s hodnotami aspoň ω , takže v předchozím příkladě by bylo $\chi(X) = \omega$. Oba přístupy mají kladné i záporné stránky a nelze říci, který přístup je lepší.

Je vhodné si všimnout, že h, w mohou nabývat libovolných hodnot (viz následující druhý příklad), ale $\chi(X)$ je buď rovno 1 ($\chi(x, X) = 1$, pokud x je izolovaným bodem v X) nebo má nekonečnou hodnotu. Je zřejmé, že hustá množina musí obsahovat všechny izolované body prostoru.

V následujících nedokazovaných příkladech plyne výsledek přímo z definic.

Příklady 1.39. Kardinální funkce

1. Platí $w(\emptyset) = \chi(\emptyset) = d(\emptyset) = 0$.
2. Je-li X diskrétní, je $w(X) = d(X) = |X|$, $\chi(X) = 1$.
3. Pro neprázdný indiskrétní prostor X platí $w(X) = d(X) = \chi(X) = 1$.
4. Je-li topologický prostor X metrizable, pak $\chi(X) \leq \omega$ protože $\{B(x, 1/n); n \in \mathbb{N}\}$ je lokální báze v bodě x .
5. Pro euklidovský prostor X dimenze aspoň 1 je $w(X) = \chi(X) = d(X) = \omega$. Tyto prostory jsou nekonečné, konečné množiny jsou uzavřené, takže hustota nemůže být konečná. Máme $d(X) = \omega$, protože X má spočetnou hustou část (např. body s racionálními souřadnicemi). Z předchozího bodu víme, že $\chi(X) \leq \omega$ – toto číslo nemůže být konečné, protože body v X nejsou izolované. Proto nemůže být ani $w(X)$ konečné číslo a je tedy spočetné, protože $\bigcup \{B(x, 1/n); n \in \mathbb{N}, x \in H\}$, kde H je hustá část v X , je spočetná otevřená báze v X .
6. Pro Sierpiňského prostor S_2 je $w(S_2) = \chi(S_2) = d(S_2) = 1$.
7. Pro nekonečný prostor X s ko-konečnou topologií je $w(X) = \chi(X) = |X|$, $d(X) = \omega$.
8. Je-li $X = N \cup S$ Isbellův-Mrówkův prostor, S nekonečný, je $d(X) = \chi(X) = \omega$, $w(X) = |S|$. K důkazu si stačí uvědomit, že body N jsou izolované v X , body S mají spočetné báze okolí a jsou izolované v S .
9. Je-li X Sorgenfreyova přímka, je $d(X) = \chi(X) = \omega$, což je jednoduché. Ukážeme, že $w(X) = 2^\omega$. Je-li $\mathcal{B}$ otevřená báze v X a $r \in X$, existuje $B_r \in \mathcal{B}$ splňující $r \in B_r \subset [r, r+1)$. Pak je zobrazení $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}$ přiřazující $r \in \mathbb{R}$ množinu B_r prosté, takže $|\mathcal{B}| \geq |\mathbb{R}| = 2^\omega$. Na druhou stranu, soustava intervalů $[r, r+1/n)$, $r \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ je otevřená báze a má mohutnost stejnou jako má $\mathbb{R}$.
10. Je-li X Michaelova přímka, je $\chi(X) = \omega$, $w(X) = d(X) = 2^\omega$. První rovnost je triviální. Hustá množina obsahuje všechny izolované body, což jsou všechna iracionální čísla, takže $d(X) = 2^\omega$. Otevřená báze musí také obsahovat všechny izolované body a tedy $w(X) \geq 2^\omega$. Platí však rovnost, protože množina izolovaných bodů a otevřených intervalů s racionálními konci má mohutnost 2^ω .
11. Je-li X dlouhá přímka, je $\chi(X) = \omega$, $d(X) = w(X) = \omega_1$. Stačí rovnosti dokázat pro dlouhou polopřímku L^+ . Zřejmě je množina $\omega_1 \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1))$ hustou částí L^+ a má mohutnost ω_1 . Žádná spočetná část S nemůže být hustá, protože $\sup S < \omega_1$.

Pro výpočet charakteru vezmeme bod $(\alpha, r) \in L^+$. Pokud je $r \neq 0$, má za bázi okolí intervaly $\{\alpha\} \times (r - 1/n, r + 1/n)$, kde volíme $n \in \mathbb{N}$ tak, aby $(r - 1/n, r + 1/n) \subset (0, 1)$. Bod $(\alpha, 0)$, α limitní, má za bázi okolí intervaly $((\beta, 0), (\alpha, r))$, kde volíme $\beta < \alpha, r \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Těchto okolí je spočetně mnoho. Má-li α v ω_1 předchůdce β , tvoří lokální bázi bodu $(\alpha, 0)$ intervaly $(\beta, 1 - 1/n), (\alpha, 1/n), n > 1$, kterých je také spočetně mnoho.

Sjednocení všech uvedených okolí z lokálních bází všech bodů v L^+ je otevřená báze mohutnosti ω_1 . Protože $w \geq d$ (viz následující tvrzení), nemůže být otevřená báze v L^+ spočetná. $\square$

Na závěr uvedeme několik vztahů mezi kardinálními funkcemi.

Tvrzení 1.40. Vztahy kardinálních funkcí

Nechť X je topologický prostor.

1. $\chi(X) \leq w(X) \leq 2^{|X|}, d(X) \leq |X|$.
2. $d(X) \leq w(X)$, rovnost platí pro metrizovatelné prostory.

Důkaz. Je-li $\mathcal{B}$ báze X a $x \in X$, pak $\mathcal{B}(x) = \{U \in \mathcal{B}; x \in U\}$ je zřejmě báze okolí v bodě x . Tedy $|\mathcal{B}(x)| \leq |\mathcal{B}|$, a proto $\chi(X) \leq w(X)$. Protože $\mathcal{B}$ je soustava podmnožin X , je $w(X) \leq |\mathcal{B}| \leq 2^{|X|}$. Vztah $d(X) \leq |X|$ je triviální.

Je-li $\mathcal{B}$ báze X (a můžeme předpokládat, že $\emptyset \notin \mathcal{B}$), vybereme $x_U \in U$ pro $U \in \mathcal{B}$. Pak množina $D = \{x_U; U \in \mathcal{B}\}$ je hustá v X . Zřejmě $|D| \leq |\mathcal{B}|$. Tedy $d(X) \leq w(X)$. Je-li X metrizovatelný metrikou ρ a H je hustá množina v X splňující $|H| = d(X)$, je množina $\bigcup \{B_\rho(x, 1/n); n \in \mathbb{N}, x \in H\}$ otevřená báze v X . Její mohutnost je $\chi(X)|H|$, což je $|X| = d(X)$ pokud je X konečný a $|H|$ pokud je X nekonečný. V obou případech máme $w(X) \leq d(X)$. $\square$

Neexistuje obecně žádný vztah mezi charakterem a hustotou. Např. prostor s ko-konečnou topologií je separabilní a může mít libovolně velký charakter, metrizovatelný prostor má spočetný charakter a může mít libovolně velkou hustotu.

V nerovnostech v předchozím tvrzení mohou nastat všechny možné případy. Např. pro prostor $X = \mathbb{N}_\xi$ určený ultrafiltrem ξ je $d(X) = \omega$ a $\chi(X) = w(X) > \omega$ (výsledek závisí na ξ , může být 2^ω , ale i menší než 2^ω). Pro Isbellův-Mrówkův prostor $X = N \cup \mathcal{S}, \mathcal{S}$ infinite, je $d(X) = \chi(X) = \omega$ a $w(X) = |\mathcal{S}|$, takže může být $w(X) = 2^\omega = 2^{d(X)}$.

1.6 Spojitá zobrazení

V této části uvedeme základní pojem teorie topologických prostorů, a to je spojitost zobrazení. Uvedeme různé charakterizace spojitosti a základní vlastnosti.

Definice 1.41. Spojitost

Ať $(X, \tau), (Y, \sigma)$ jsou dva topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazení.

- (a) Zobrazení f se nazývá *spojité*, pokud pro každé $U \in \sigma$ je $f^{-1}(U) \in \tau$.
- (b) Zobrazení f je spojitě v bodě x , pokud pro každé okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x , že $f(U) \subset V$.
- (c) Zobrazení f se nazývá *homeomorfismus*, pokud f je bijekce a f i f^{-1} jsou spojitá.
- (d) Zobrazení f se nazývá *otevřené (uzavřené)*, pokud je množina $f(M)$ je otevřená (uzavřená) v Y pro každou otevřenou (uzavřenou) $M \subset X$.
- (e) Zobrazení f se nazývá *retrakce*, pokud f spojitě a existuje spojitě $g: Y \rightarrow X$, že $f \circ g$ je identita na Y . Potom Y se nazývá retracts prostoru X . $\square$

Pro $A \subset X$ a $f: X \rightarrow Y$ musíme rozlišovat mezi „ f je spojitě na A “ a „ f je spojitě vzhledem k A “. První možnost znamená, že pro každé $x \in A$ a každé okolí V bodu $f(x)$ existuje okolí U bodu x , že $f(U) \subset V$, kdežto v druhé možnosti je na konci $f(U \cap A) \subset V$. V druhé možnosti nezávisí spojitost na hodnotách f v bodech $X \setminus A$, kdežto v první možnosti na těchto hodnotách záleží. V příští kapitole budou definovány

podprostory, potom druhá možnost znamená, že f je spojitá na podprostoru A . Je zřejmé, že je-li $f: X \rightarrow Y$ spojitá na $A \subset X$, je spojitá i vzhledem k A .

Poznamenejme, že slovo homeomorfismus je složením řeckých slov homeo (podobný) a morphe (tvar). Vlastnosti topologických prostorů, které se zachovávají homeomorfismy, se nazývají *topologické*. Vlastnost být diskretním prostorem je topologická, vlastnost metrického prostoru být úplný není topologická, protože např. metrické prostory $\mathbb{R}$ a $(0, 1)$ jsou homeomorfní, ale první je úplný a druhý není. Seznam zatímních topologických vlastností uvedeme po charakterizaci spojitosti.

V geometrii se definuje n dimenzionální varieta jako topologický prostor, ve kterém má každý bod okolí homeomorfní s $\mathbb{R}^n$. Není těžké ukázat, že dlouhá přímka je 1-dimenzionální varieta. Je to příklad variety, která není separabilní ani metrizable (to ukážeme v kapitole o kompaktnosti. [odkaz](#))

Příklady 1.42. Příklady spojitých zobrazení

1. Každé zobrazení na diskretním prostoru je spojitě.
2. Každé zobrazení do indiskretního prostoru je spojitě.
3. Identita na topologickém prostoru je homeomorfismus.
4. Každá spojitá funkce $f: \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ je konstantní na nějakém intervalu (α_0, ω_1) .
5. $[0, 1]$ je retracts $\mathbb{R}$.
6. Každá omezená, uzavřená a konvexní podmnožina euklidovského prostoru je retracts celého prostoru. ■■■
7. Nekonvexní písmeno „Y“ je retracts roviny. ■■■ □

Důkaz. Tvzení 1.-3. jsou zřejmá. Dokažme tedy tvrzení 4.

Nechť $f: \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Ověříme následující fakt: *Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\alpha < \omega_1$ splňující $|f(\alpha) - f(\beta)| < \varepsilon$ pro každé $\beta \in (\alpha, \omega_1)$.*

Vskutku, pokud by tomu tak nebylo, nalezneme $\varepsilon > 0$ a ordinální čísla $\alpha = \alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \omega_1$ tak, že $|f(\alpha_{n+1}) - f(\alpha_n)| \geq \varepsilon$. Položme $\gamma = \sup\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pak $\gamma < \omega_1$ a $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \gamma$. Ze spojitosti f v bodě γ existuje interval $(\eta_1, \eta_2) \subset \omega_1$ obsahující γ takový, že $|f(\gamma) - f(\eta)| \leq \frac{\varepsilon}{4}$ pro každé $\eta \in (\eta_1, \eta_2)$. Nechť $n \in \mathbb{N}$ splňuje $\alpha_n \in (\eta_1, \eta_2)$. Pak platí $\alpha_n < \alpha_{n+1} < \gamma$, takže dostáváme

$$\varepsilon \leq |f(\alpha_n) - f(\alpha_{n+1})| \leq |f(\alpha_n) - f(\gamma)| + |f(\gamma) - f(\alpha_{n+1})| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tento spor dokazuje náš fakt.

Nyní již použitím faktu nalezneme $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \dots < \omega_1$ splňující $|f(\alpha_n) - f(\eta)| < \frac{1}{n}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $\eta \in [\alpha_n, \omega_1)$. Pak $\alpha = \sup\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\} < \omega_1$ a pro každé $\eta_1, \eta_2 \in [\alpha, \omega_1)$ platí

$$|f(\eta_1) - f(\eta_2)| \leq |f(\eta_1) - f(\alpha_n)| + |f(\alpha_n) - f(\eta_2)| \leq \frac{2}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedy $f(\eta_1) = f(\eta_2)$, což jsme chtěli dokázat.

Tvrzení 5. je víceméně zřejmé, stačí uvažovat zobrazení $f(x) = \max\{\min\{x, 1\}, -1\}$, $x \in \mathbb{R}$

Tvrzení 6. dokážeme později, vizte ???■■■. □

Pokud nebude řečeno jinak, v případě, že $f: X \rightarrow Y$ je retrakce a $Y \subset X$, budeme chápat g jako identické zobrazení $g(y) = y$ pro $y \in Y$. Ospravedlnění tohoto požadavku je v Tvzení 1.45. Podle definice je totiž retrakce „poloviční“ homeomorfismus (homeomorfismus má navíc rovnost $g \circ f = 1_X$). Ukážeme v Tvzení 1.45, že je v retrakci vskutku homeomorfismus skrytý.

Tvrzení 1.43. Charakterizace spojitých zobrazení

Ať (X, τ) , (Y, σ) jsou topologické prostory a $f: X \rightarrow Y$ zobrazení a ať $\mathcal{B}$ je báze Y a $\mathcal{S}$ subbáze Y . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) f je spojitě;
- (ii) vzory množin ze subbáze $\mathcal{S}$ jsou otevřené;
- (iii) f je spojitě v každém bodě;
- (iv) vzory množin z báze $\mathcal{B}$ jsou otevřené;

- (v) vzory uzavřených množin jsou uzavřené;
- (vi) pro každé $A \subset X$ platí $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
- (vii) pro každé $B \subset Y$ platí $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$;
- (viii) pro každé $B \subset Y$ platí $f^{-1}(\text{Int } B) \subset \text{Int } f^{-1}(B)$;
- (ix) jestliže x je limitou usměrněného souboru $\{x_i\}_{i \in I}$ v X , je $f(x)$ limitou usměrněného souboru $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ v Y ;
- (x) jestliže x je hromadným bodem usměrněného souboru $\{x_i\}_{i \in I}$ v X , je $f(x)$ nebo hromadným bodem usměrněného souboru $\{f(x_i)\}_{i \in I}$ v Y ;
- (xi) jestliže x je limitou filtru $\mathcal{F}$ v X , je $f(x)$ limitou filtru s bází $\{f(F); F \in \mathcal{F}\}$ v Y ;
- (xii) jestliže x je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$ v X , je $f(x)$ hromadným bodem filtru s bází $\{f(F); F \in \mathcal{F}\}$ v Y .

Důkaz.

Implikace (i) $\implies$ (ii) je triviální.

(ii) $\implies$ (iii): Necht $x \in X$ a $V \in \mathcal{U}(f(x))$ jsou dány. Pak existují $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{S}$ splňující $f(x) \in \bigcap_{i=1}^n V_i \subset V$. Jelikož $x \in \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(V_i)$ a tato množina je otevřená z (ii), existuje $U \in \tau$ obsahující x taková, že $x \in U \subset \bigcap_{i=1}^n f^{-1}(V_i)$. Pak $f(U) \subset \bigcap_{i=1}^n V_i \subset V$ a tedy f je spojitě v x .

(iii) $\implies$ (i): Ať $V \in \sigma$ je dána a $x \in f^{-1}(V)$. Pak $f(x) \in V$, a tedy existuje dle (iii) $U \in \mathcal{U}(x)$ takové, že $f(U) \subset V$. Tedy $U \subset f^{-1}(V)$, což znamená, že $f^{-1}(V)$ je v τ .

Implikace (i) $\implies$ (iv) je zjevná a (iv) $\implies$ (i) plyne následovně: Je-li $V \in \sigma$, pak zvolme $\mathcal{V} \subset \mathcal{B}$ splňující $\bigcup \mathcal{V} = V$. Pak vzory množin z $\mathcal{V}$ jsou v τ dle (iv), a tedy $f^{-1}(V) = \bigcup_{W \in \mathcal{V}} f^{-1}(W) \in \tau$.

(i) $\implies$ (v): Ať $F \subset Y$ je uzavřená. Pak $f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus F)$ je uzavřená, neboť $f^{-1}(Y \setminus F)$ je otevřená.

(v) $\implies$ (vi): Množina $f^{-1}(\overline{f(A)})$ je uzavřená a obsahuje A , tedy i $\overline{A}$. Odtud $f(\overline{A}) \subset f(f^{-1}(\overline{f(A)})) \subset \overline{f(A)}$.

(vi) $\implies$ (vii): Aplikujeme (vi) na $A = f^{-1}(B)$. Dostaneme $f(\overline{f^{-1}(B)}) \subset \overline{ff^{-1}(B)} \subset \overline{B}$. Po aplikování vzoru obdržíme $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.

(vii) $\implies$ (viii): Vyjádřením vnitřku pomocí uzávěru dostáváme

$$\begin{aligned} f^{-1}(\text{Int } B) &= f^{-1}(Y \setminus \overline{Y \setminus B}) = X \setminus f^{-1}(\overline{Y \setminus B}) \subset X \setminus \overline{f^{-1}(Y \setminus B)} \\ &= X \setminus \overline{X \setminus f^{-1}(B)} = \text{Int}(f^{-1}(B)). \end{aligned}$$

(viii) $\implies$ (i): Je-li $V \subset Y$ otevřená, pak $f^{-1}(V) \subset \text{Int}(f^{-1}(V))$, ovšem obrácená inkluze platí triviálně. Tedy $f^{-1}(V)$ je otevřená.

(i) $\implies$ (ix): vyplývá hned z definice spojitosti a konvergence. Vskutku, necht x je limita usměrněného souboru $\{x_i\}$. Pak pro $V \in \mathcal{U}(f(x))$ je $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$. Tedy existuje $i_0 \in I$ takové, že pro $i \geq i_0$ platí $x_i \in f^{-1}(V)$. Proto $f(x_i) \in V$ pro $i \geq i_0$, tj. $f(x)$ je limitou $\{f(x_i)\}$.

(ix) $\implies$ (x): Necht x je hromadným bodem $\{x_i\}_{i \in I}$. Pak existuje usměrněný podsoubor $\{y_j\}_{j \in J}$ souboru $\{x_i\}_{i \in I}$ takový, že x je limitou $\{y_j\}$ (Tvzení 1.16). Dle (ix) je $f(x)$ limita $\{f(y_j)\}$. Jelikož je $\{f(y_j)\}$ usměrněný podsoubor souboru $\{f(x_i)\}$, dostáváme, že $f(x)$ je hromadným bodem $\{f(x_i)\}$ (Tvzení 1.16).

(x) $\implies$ (iii): Necht f není spojitě v $x \in X$. Pak existuje $V \in \mathcal{U}(f(x))$ takové, že pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ můžeme nalézt $x_U \in U$ splňující $f(x_U) \notin V$. Pak x je limitou, a tedy i hromadným bodem, $\{x_U\}$, ale $f(x)$ není hromadným bodem $\{f(x_U)\}$.

(i) $\implies$ (xi): Necht x je limitou filtru $\mathcal{F}$ a $V \in \mathcal{U}(f(x))$. Pak $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}(x)$, takže $U \in \mathcal{F}$. Proto $V = f(U)$ leží ve filtru s bází $\{f(F); F \in \mathcal{F}\}$, tj. $f(x)$ je limitou tohoto filtru.

(xi) $\implies$ (iii): Necht f není spojitě v $x \in X$. Pak existuje $V \in \mathcal{U}(f(x))$ takové, že pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ neplatí $f(U) \subset V$, tj. $f(U) \setminus V \neq \emptyset$. Uvažujme filtr $\mathcal{F}$ s bází $\{U; U \in \mathcal{U}(x)\}$. Pak x je limita filtru $\mathcal{F}$, ale $f(x)$ není limitou filtru $\mathcal{G}$ s bází $\{f(F); F \in \mathcal{F}\}$, neboť pro naše okolí V neplatí $V \in \mathcal{G}$. (Abychom to ověřili, uvažujme opak. Pak existuje $F \in \mathcal{F}$ splňující $f(F) \subset V$, tedy existuje $U \in \mathcal{U}(x)$ takové, že $U \subset F$. Tedy $f(U) \subset f(F) \subset V$, což je spor.)

(vi) $\implies$ (xii): Je-li $x \in X$ hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$, pak $x \in \bigcap \{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$. Pak pro $f(x)$ a $F \in \mathcal{F}$ platí $f(x) \in f(\overline{F}) \subset \overline{f(F)}$, tedy $f(x)$ je hromadným bodem filtru s bází $\{f(F); F \in \mathcal{F}\}$.

(xii) $\implies$ (iii): Postupujeme jako v důkazu (xi) $\implies$ (iii). Necht f není spojitě v $x \in X$. Pak existuje otevřené okolí W bodu $f(x)$ takové, že pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$ neplatí $f(U) \subset W$, tj. existuje $x_U \in U$ splňující

$f(x_U) \notin W$. Uvažujme filtr $\mathcal{F}$ s bází tvořenou množinami $F_U = \{x_V; V \subset U, V \in \mathcal{U}(x)\}$, kde $U \in \mathcal{U}(x)$. Pak x je limita filtru $\mathcal{F}$, ale $f(x)$ není hromadným bodem filtru $\mathcal{G}$ s bází $\{f(F); F \in \mathcal{F}\}$, neboť pro naše okolí W platí, že $W \cap \overline{f(F_U)} = \emptyset$ pro každé $U \in \mathcal{U}(x)$. $\square$

V poznámce po Tvzení 1.25 jsme konstatovali, že stačí uvažovat jen usměrněné soubory indexované lokálními bázemi okolí. To znamená, že i pro spojitost v (ix) stačí uvažovat jen tyto usměrněné soubory. Protože ty jsou v pseudometrickém prostoru nejvýše spočetné, lze i v pseudometrických prostorech pro ověření spojitosti pomocí (ix) použít jen posloupnosti. Jsme tedy opět v souladu s použitím konvergence v pseudometrických prostorech.

Z teorie pseudometrických prostorů je známo (a pomocí trojúhelníkové nerovnosti je snadné dokázat), že funkce $\{x \rightsquigarrow \rho(x, a)\} : (X, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá pro každé $a \in X$ a stejně tak je spojitá funkce $\{x \rightsquigarrow \rho(x, A)\} : (X, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$ pro každé $A \subset X$.

Následující tvrzení je sice triviální, ale je nutné ho uvést.

Tvrzení 1.44. Skládání spojitých zobrazení

Jsou-li $f: X \rightarrow Y$ a $g: Y \rightarrow Z$ spojitá zobrazení, pak $g \circ f: X \rightarrow Z$ je spojité. Je-li f spojité v bodě x a g spojité v bodě $f(x)$, pak $g \circ f$ je spojité v bodě x .

Důkaz. Stačí si uvědomit, že $(g \circ f)^{-1}(V) = f^{-1}(g^{-1}(V))$ a je-li V okolí $g \circ f(x)$, pak $g^{-1}(V)$ je okolí $f(x)$, a tedy $f^{-1}(g^{-1}(V))$ je okolí x . $\square$

Podíváme se na slíbený skrytý homeomorfismus v retrakci. Podle terminologie z další kapitoly výsledek znamená, že retrakty prostoru X se dají vnořit do X , tj. jsou homeomorfní podprostorům v X .

Tvrzení 1.45. Vlastnosti retrakce

Je-li $f: X \rightarrow Y$ retrakce a $g: Y \rightarrow X$ příslušné zobrazení, že $f \circ g = 1_Y$, pak g je injektivní a f je surjektivní. Navíc, zobrazení f je na $g(Y)$ prosté a inverzní ke g , takže f je vzhledem k $g(Y)$ homeomorfismus na Y s inverzním zobrazením g .

Důkaz. Protože $y = f(g(y))$ pro každé $y \in Y$, je f surjekce. Navíc uvedená rovnost dává i to, že zobrazení g je injektivní a že f je prosté na $g(Y)$. Takže nejen $f(g(y)) = y$ pro každé $y \in Y$, ale i $g(f(x)) = x$ pro každé $x \in g(Y)$ a f je tedy injektivní na $g(Y)$ a je vzhledem k $g(Y)$ spojité. $\square$

Následující seznam topologických vlastností má přímočaré důkazy s použitím vhodných, výše uvedených, charakterizací spojitosti. Např. je-li $f: X \rightarrow Y$ homeomorfismus, je A hustá podmnožina X , právě když je $f(A)$ hustá podmnožina Y .

Tvrzení 1.46. Topologické vlastnosti

Následující pojmy jsou topologické: separabilita, prostor 1. kategorie, prostor 2. kategorie, Baireův prostor, prostor se spočetnou otevřenou bází, hustota, váha, charakter.

Často se používají různé množiny spojitých zobrazení mezi topologickými prostory. Označíme $F(X, Y)$ množinu všech zobrazení definovaných na X s hodnotami v Y a $C(X, Y)$ její podmnožinu všech spojitých zobrazení. V případě $Y = \mathbb{R}$ se píše pouze $F(X)$ a $C(X)$. V tomto případě značí $F^*(X)$ (respektive $C^*(X)$) množinu všech omezených (respektive spojitých omezených) reálných funkcí na X . Na tyto množiny lze zavést různé vhodné topologie. V tuto chvíli se zmíníme jen o tzv. topologii stejnoměrné konvergence.

Definice 1.47. Topologie stejnoměrné konvergence

Ať X je topologický prostor a (Y, ρ) je metrický prostor. Na množině $F(X, Y)$ se definuje topologie pomocí bází okolí $\mathcal{B}(f)$, $f \in F(X, Y)$:

$$\mathcal{B}(f) = \{B(f, r); r > 0\}, \quad \text{kde} \quad B(f, r) = \{g \in F(X, Y); \forall x \in X : \rho(f(x), g(x)) < r\}.$$

Tato topologie se nazývá *topologií stejnoměrné konvergence*. $\square$

Uvedená okolí připomínají definici otevřené koule v metrickém prostoru. Opravdu, pokud definujeme $d(f, g) = \sup\{\rho(f(x), g(x)); x \in X\}$, je $B(f, r) = B_d(f, r)$. Funkce d má všechny vlastnosti metriky, ale může nabývat nekonečných hodnot (které však na popis koulí nemají vliv). Stačí vzít $\sigma = \min\{1, \rho\}$ a množiny $B(f, r)$ vzniklé pomocí ρ nebo σ budou pro $r < 1$ totožné. Je vhodné upozornit, že nelze za σ

vzít libovolnou omezenou metriku ekvivalentní s ρ , ale tzv. stejnoměrně ekvivalentní metriku (o tom více v kapitole o uniformních prostorech).

Právě jsme dokázali první bod z následujícího tvrzení (a současně, že uvedená soustava $\mathcal{B}(f)$ splňuje požadavky na lokální báze okolí bodů). Druhý bod je velmi důležitý pro aplikace.

Tvrzení 1.48. Stejnoměrná konvergence funkcí

At X je topologický prostor a (Y, ρ) je metrický prostor a $F(X, Y)$ je prostor s topologií stejnoměrné konvergence

- (a) *Prostor $F(X, Y)$ je metrizovatelný topologický prostor.*
- (b) *Množina $C(X, Y)$ je uzavřená v $F(X, Y)$.*
- (c) *Limita posloupnosti spojitých zobrazení v $F(X, Y)$ je spojitě zobrazení.*

Důkaz. Důkaz tvrzení (a) proběhne dle postupu naznačeného výše.

Nejprve musíme ukázat, že $\{\mathcal{B}(f)\}_{f \in F(X, Y)}$ splňuje vlastnosti (O1)-(O3) z Tvrzení 1.11. Vlastnost (O1) je splněna zjevně. Máme-li $f \in F(X, Y)$ a $B(f, r_1), B(f, r_2)$, kde $r_1 > 0, r_2 > 0$, jsou dány, pak $B(f, \min\{r_1, r_2\}) \subset B(f, r_1) \cap B(f, r_2)$, Tedy (O2) platí.

Nechť $f \in F(X, Y)$ a $U = B(f, r) \in \mathcal{B}(f)$ jsou dány. Uvažujme $V = B(f, \frac{r}{2}) \subset U$ a libovolné $g \in V$. Položíme $W = B(g, \frac{r}{4})$. Pak $W \subset U$, neboť pro $h \in W$ a $x \in X$ platí

$$\rho(f(x), h(x)) \leq \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), h(x)) \leq \frac{r}{2} + \frac{r}{4} < r.$$

Tedy $W \subset U$ a (O3) tak platí.

Máme tak jednoznačně určenou topologii τ na $F(X, Y)$ s bází okolí $\{\mathcal{B}(f)\}_{f \in F(X, Y)}$. Chceme ukázat, že je metrizovatelná. Uvažujme proto na Y metriku $\sigma = \min\{1, \rho\}$ a metriku ω na $F(X, Y)$ definovanou jako

$$\omega(f, g) = \sup\{\sigma(f(x), g(x)); x \in X\}, \quad f, g \in F(X, Y).$$

Je snadné se přesvědčit, že ω je vskutku metrika na $F(X, Y)$. Zbývá dokázat, že generuje topologii τ . Nechť tedy $f \in F(X, Y)$ a $B(f, r)$ jsou dány. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $r < 1$. Hledáme $s > 0$ takové, že $B_\omega(f, s) \subset B(f, r)$. K tomu postačí volit $s = \frac{r}{2}$. Vskutku, nechť $g \in B_\omega(f, s)$. Pak

$$\rho(f(x), g(x)) = \sigma(f(x), g(x)) \leq s = \frac{r}{2} < r, \quad x \in X.$$

Tedy $g \in B(f, r)$, tj. $B_\omega(f, s) \subset B(f, r)$.

Obráceně, nechť koule $B_\omega(f, r)$ je dána. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $r < 1$. Pak $B(f, \frac{r}{2}) \subset B_\omega(f, r)$. Vskutku, je-li $g \in B(f, \frac{r}{2})$, pak

$$\omega(f, g) = \sup\{\sigma(f(x), g(x)); x \in X\} \leq \sup\{\rho(f(x), g(x)); x \in X\} \leq \frac{r}{2} < r.$$

Tedy $g \in B_\omega(f, r)$.

Dostáváme tak, že systémy $\mathcal{U}_\tau(f)$ a $\mathcal{U}_\omega(f)$ jsou stejné pro každé $f \in F(X, Y)$. Topologie τ a topologie generovaná metrikou ω jsou tak též stejné.

(b),(c): Vlastnosti (b) a (c) jsou zřejmě ekvivalentní. Dokážeme (b). Nechť $f \in F(X, Y) \setminus C(X, Y)$. Hledáme $r > 0$ takové, že $B(f, r) \cap C(X, Y) = \emptyset$. Zobrazení f není spojitě, tedy existuje $x \in X$ a $s > 0$ takové, že $f(U) \setminus B_\rho(f(x), s) \neq \emptyset$ pro každé okolí U bodu x . Vezmeme $r = s/3$, $g \in B(f, r)$ a libovolné okolí U bodu x . Pak existuje $y \in U$, že $f(y) \notin B_\rho(f(x), s/3)$. Protože $\rho(f(x), f(y)) \leq \rho(f(x), g(x)) + \rho(g(x), g(y)) + \rho(g(y), f(y))$, musí být $\rho(g(x), g(y)) \geq s/3$, takže g není spojitě v bodě x . $\square$

Poznámka 1.49

Konvergence v uvedené topologii na $F(X, Y)$ se nazývá stejnoměrná konvergence, protože pokud $f_n \rightarrow f$ v této topologii, pak konvergence posloupností $f_n(x) \rightarrow f(x)$ je stejně rychlá pro všechny body $x \in X$. Stejnoměrná konvergence (jako každá konvergence metrického prostoru) určuje topologii ve smyslu, že uzávěr množiny je množina všech limitních bodů posloupností z této množiny. To už neplatí, vezmeme-li za konvergenci v $F(X, Y)$ tzv. bodovou konvergenci, tj. $f_n \rightarrow f$ pokud $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pro každé $x \in X$. Tato konvergence obecně neurčuje topologii v právě uvedeném smyslu, ani když vezmeme $F(X)$. Označíme-li množinu bodových limit posloupností z A jako $u(A)$, pak nemusí platit čtvrtá vlastnost uzávěru, tj. může

nastat situace $u(u(A)) \neq u(A)$. To nastane např. pro $A = C([0, 1])$. H. Lebesgue dokonce v tomto případě dokázal, že $u_\beta(A) \neq u_\alpha(A)$ pro žádné $\beta < \alpha < \omega_1$, kde definujeme $u_0(A) = u(A)$, $u_\alpha(A) = u(\bigcup\{u_\beta(A); \beta < \alpha\})$. Funkce z $u_\alpha(A)$ se nazývají funkce α -té Baireovy třídy.

1.7 Oddělovací axiomy

Pro zajištění dostatečné pestrosti systému otevřených množin zavádíme pojmy, které nám oddělují body resp. uzavřené množiny pomocí otevřených množin. Jde o základní přiblížení k metrizovatelnosti, protože všechny uvedené definice jsou v metrizovatelných prostorech splněny. Označení následujících pojmů má svoji tradici vycházející z minulosti, proto působí lehce nesystematicky.

Nejdříve uvedeme obecné pojmy a jednoduché vztahy a vlastnosti, poté v jednotlivých částech speciální a složitější vlastnosti.

Definice 1.50. Oddělování bodů 1

Topologický prostor X se nazývá

- T_0 , pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existuje otevřená U , že $|U \cap \{x, y\}| = 1$,
- T_1 , pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existuje otevřená U , že $x \in U$ a $y \notin U$,
- T_2 (nebo *Hausdorffův*), pokud pro každé různé body $x, y \in X$ existují otevřené disjunktní množiny U, V , že $x \in U, y \in V$,
- *regulární*, pokud pro každou uzavřenou $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existují otevřené disjunktní množiny U, V , že $x \in U$ a $F \subset V$,
- *normální*, pokud pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny E, F existují disjunktní otevřené množiny U, V , že $E \subset U$ a $F \subset V$.

□

Zdá se, že postupně jsou vlastnosti silnější a silnější, ale zcela tomu tak není, protože v regularitě a normalitě vystupují uzavřené množiny, kdežto v předchozích vlastnostech uzavřenost bodů není zmíněna. Proto se dodefinovává regularita a normalita za předpokladu uzavřenosti bodů.

Definice 1.51. Oddělování bodů 2

Topologický prostor X se nazývá

- T_3 , pokud je regulární a T_1 ,
- T_4 , pokud je normální a T_1 .

□

V případě axiomů T_2, T_3, T_4 mluvíme o tom, že dvojice otevřených množin *odděluje* dvojici bodů, resp. bod a uzavřenou množinu, resp. dvě uzavřené množiny.

Platí jedno důležité pozorování:

Je-li (X, τ) T_i -prostor, $i=0,1,2$, pak každý prostor $(X, \sigma), \sigma \supset \tau$, je také T_i -prostor.

Z uvedených pojmů T_0 – T_2 , nejdůležitější roli pro nás budou mít Hausdorffovy prostory. T_2 axiom použil Hausdorff ve své knize v r.1914 jako jeden z axiomů topologických prostorů (pomocí soustav okolí). Také u ostatních oddělovacích axiomů jsou známy jejich „objevitelé“, ale příslušná jména se neužívají (výjimku poznáme později u dalšího oddělovacího axiomu). Např. T_0 -prostory se připisují A.Kolmogorovovi, normální prostory se nezávisle v průběhu let 1921–1924 objevily u L.Vietorise, H.Tietzeho a P.S.Aleksandrova s P.S.Urysohnem, kteří dokázali nejdůležitější výsledky o normálních prostorech.

Následující příklady jsou jednoduché a výsledky plynou přímo z popisu těchto prostorů. Některé z uvedených prostorů mají silnější vlastnosti, např. jsou normální, to už ale není jednoduché, jak uvidíme později.

Příklady 1.52. Jednoduché příklady oddělovacích axiomů

1. Diskrétní prostory jsou T_4 .
2. Indiskrétní prostory jsou normální i regulární a, pokud jsou aspoň dvoubodové, nejsou T_0 ,
3. Sierpiňského prostor S_2 je T_0 a není T_1 , je normální (nemá dvě disjunktní neprázdné uzavřené množiny)

a není regulární (bod 1 nelze oddělit od uzavřené množiny $\{0\}$).

4. Prostory s ko-konečnou topologií jsou T_1 a, jsou-li nekonečné, nejsou T_2 . Nekonečná množina X s ko-konečnou topologií z Příkladu 1.2(3) je T_1 (doplňky konečných množin jsou otevřené, takže každý bod je uzavřený), ale není T_2 (okolí jsou doplňky konečných množin, takže průnik dvou okolí jakýchkoli dvou bodů má za doplněk konečnou množinu a tedy je neprázdný). Konečný ko-konečný prostor je diskrétní.

Doplňme, že prostory s ko-konečnou topologií jsou nejmenšími topologiemi na dané množině, které jsou T_1 . Je to proto, že mají za uzavřenou bázi všechny konečné podmnožiny a celý prostor. Striktně menší topologie tedy bude obsahovat bod x , který není uzavřený, jeho uzávěr obsahuje jiný bod y a každé okolí bodu y tedy obsahuje x , což je negace T_1 -axiomu. Proto se prostory s ko-konečnou topologií nazývají hrubé T_1 -prostory.

5. Uspořádatelné i zobecněné uspořádatelné prostory jsou T_2 (později ukážeme, že jsou normální).

6. Metrizovatelné prostory jsou T_2 (později ukážeme, že jsou normální).

7. Nuldimenzionální prostory jsou regulární (později ukážeme, že nemusí být normální).

8. Prostory s jedním hromadným bodem jsou T_0 , regulární i normální, protože pokud uvedený hromadný bod neleží v uzavřené množině, je ta uzavřená množina obojetná. Takže prostory určené filtrem jsou normální (např. vějíř, $\mathbb{N}\xi$). Jsou T_1 právě když definující filtr je volný.

9. Isbellův-Mrówkův prostor je T_3 , protože je T_1 a je nuldimenzionální (později ukážeme, že nemusí být normální). $\square$

Následující lemma budeme často používat automaticky.

Lemma 1.53. Jednoduché popisy oddělování

Ať X je topologický prostor. Pak platí:

(a) Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(ai) Topologický prostor X je T_1 .

(aii) Každá jednoprvková podmnožina X je uzavřená.

(aiii) Každá konečná podmnožina X je uzavřená.

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(bi) Topologický prostor X je T_2 .

(bii) $\forall x, y \in X$ různé $\exists U \in \mathcal{U}(x): x \in U$ a $y \notin \bar{U}$.

(c) Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(ci) Topologický prostor X je regulární.

(cii) $\forall x \in X \forall U \in \mathcal{U}(x) \exists V \in \mathcal{U}(x): \bar{V} \subset U$.

(d) Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(di) Topologický prostor X je normální.

(dii) $\forall V \subset X$ otevřenou $\forall E \subset V$ uzavřenou $\exists U \subset X$ otevřená, že $E \subset U \subset \bar{U} \subset V$.

Důkaz. (a)(ai) $\implies$ (aai): Je-li $\{x\}$ jednoprvková množina v X a $y \in X \setminus \{x\}$, pak dle (ai) existuje otevřená $U_y \subset X$ taková, že $y \in U_y$ a $x \notin U_y$. Tedy

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} U_y$$

je otevřená množina, tj. $\{x\}$ je uzavřená.

(aai) $\implies$ (aaii): Indukcí dokážeme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je n -prvková podmnožina X uzavřená. Pro $n = 1$ toto víme z (aai). Předpokládejme, že tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N}$. Pokud $\{x_1, \dots, x_n, x_{n+1}\}$ je $n + 1$ -prvková množina, pak $Y = \{x_1, \dots, x_n\}$ je uzavřená z indukčního předpokladu. Jelikož $\{x_{n+1}\}$ je uzavřená z (aai), je i množina $X = Y \cup \{x_{n+1}\}$ uzavřená.

(aiii) $\implies$ (ai): Necht $x, y \in X$ jsou různé body. Jelikož $\{x\}$ je uzavřená množina dle (aiii) a $y \notin \{x\}$, existuje otevřená množina $U \subset X$ taková, že $x \notin U$ a $y \in U$. Tedy X je T_1 .

(b)(bi) $\implies$ (bii): Mějme dva různé body $x, y \in X$ dány. Nalezneme $U, V \subset X$ otevřené disjunktní takové, že $x \in U$ a $y \in V$. Pak $U \subset X \setminus V$, a tedy $\overline{U} \subset \overline{X \setminus V} = X \setminus V$, tj. $y \notin \overline{U}$.

(bii) $\implies$ (bi): Mějme opět dva různé body $x, y \in X$ dány. Nalezneme $U \in \mathcal{U}(x)$ takovou, že $x \in U$ a $y \notin \overline{U}$. Pak $V = X \setminus \overline{U}$ splňuje $y \in V$ a $V \cap U = \emptyset$. Tedy X je Hausdorffův.

(c)(ci) $\implies$ (cii): Mějme $x \in X$ a $U \in \mathcal{U}(x)$ dány. Vezměme $W \in \tau$ splňující $x \in W \subset U$. Pak $F = X \setminus W$ je uzavřená množina neobsahující bod x . Tedy existují otevřené disjunktní množiny $V, H \subset X$ takové, že $x \in V$ a $F \subset H$. Pak

$$\overline{V} \subset \overline{X \setminus H} = X \setminus H \subset X \setminus F = W \subset U.$$

(d)(di) $\implies$ (dii): Je-li X normální a V otevřená, $E \subset V$ uzavřená, pak E a $X \setminus V$ jsou disjunktní uzavřené, tedy z normality existují otevřené disjunktní množiny U, W , že $E \subset U$ a $X \setminus V \subset W$. Nyní $U \subset X \setminus W$. Množina $X \setminus W$ je uzavřená, tedy $\overline{U} \subset X \setminus W \subset V$.

(di) $\implies$ (diii): Mějme uzavřené disjunktní množiny E, F . Máme, že $E \subset X \setminus F$ a $X \setminus F$ je otevřená. Tedy existuje otevřená množina U , že $E \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus F$. Nyní $E \subset U$ a $F \subset X \setminus \overline{U}$ a $U, X \setminus \overline{U}$ jsou disjunktní otevřené množiny. $\square$

Z definic je snadno vidět, že platí implikace $T_4 \implies T_3 \implies T_2 \implies T_1 \implies T_0$. Žádnou z uvedených implikací nelze obrátit. Uveďme protipříklady na jednotlivé implikace.

Příklady 1.54. Protipříklady na oddělování

1. Příklady 1.52 ukazují, že $T_0 \not\Rightarrow T_1$ (Sierpiňského prostor) a $T_1 \not\Rightarrow T_2$ (ko-konečná topologie na nekonečném prostoru).

2. $T_2 \not\Rightarrow T_3$:

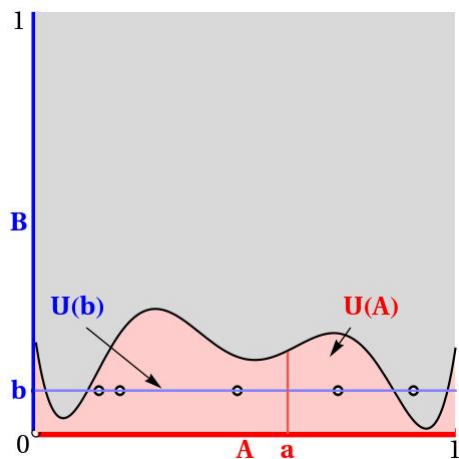
Uvažujme množinu $X = \mathbb{R}$ a množinu $Z = \{\frac{1}{k}; k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}$. Pro každé $x \in X$ položme

$$\mathcal{B}(x) = \begin{cases} \{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})\}_{n=1}^{\infty}, & x \in X \setminus \{0\}, \\ \{(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \setminus Z\}_{n=1}^{\infty}, & x = 0. \end{cases}$$

Pak systém $\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$ splňuje požadavky (O1)-(O3) z Tvzení 1.11, takže generuje na X jednoznačně určenou topologii τ . Prostor (X, τ) je T_2 -prostor (jeho topologie je větší než obvyklá topologie na $\mathbb{R}$), který není T_3 , protože uzávěry bazových okolí bodu 0 jsou intervaly $[x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}]$ a ty nejsou bází v $\mathcal{U}(0)$.

3. $T_3 \not\Rightarrow T_4$:

(J.Thomas (1969)) Originální příklad nepatrně změníme kvůli vhodnějšímu vyobrazení. Ať $X = ([0, 1] \times (\mathbb{Q} \cap [0, 1])) \setminus \{(0, 0)\}$ s následující topologií. Body $(x, y) \in X, x > 0, y > 0$, jsou izolované. Body $(a, 0)$ mají za okolí množiny $\{(a, y); 0 \leq y \leq z\}, z \in (0, 1)$ (svíslá červená úsečka na obrázku), Body $(0, b)$ mají za okolí množiny $([0, 1] \times \{b\}) \setminus K, |K| < \omega$ (vodorovná modrá úsečka na obrázku bez vyznačených bodů). Prostor X je nuldimenzionální a T_1 , takže je T_3 . Ukážeme, že není normální. Nelze oddělit uzavřené množiny $A = (0, 1] \times \{0\}$ a $B = \{0\} \times (\mathbb{Q} \cap (0, 1])$ neboť každé otevřené okolí $U(B)$ množiny B má za doplněk v $(0, 1] \times (\mathbb{Q} \cap (0, 1])$ spočetnou množinu a každé okolí $U(A)$ množiny A splňuje, že průnik $U(A)$ a $(0, 1] \times (\mathbb{Q} \cap (0, 1])$ je nespočetný. $\square$



Přejdeme k hlubším tvrzením. Následující oddělování je dobře známé z teorie metrických prostorů.

Tvrzení 1.55. Metrizovatelné prostory jsou normální

V každém metrizovatelném prostoru X existuje pro každou dvojici disjunktních uzavřených množin E a F spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$, že $f(E) \subset \{0\}$ a $f(F) \subset \{1\}$. Metrizovatelné prostory jsou tedy T_4 .

Důkaz. Ať ρ je metrika na X , která generuje uvažovanou topologii. Definujme

$$f(x) = \frac{\rho(x, E)}{\rho(x, E) + \rho(x, F)}. \quad (1.2) \quad \text{eq:distance}$$

Jelikož funkce $z \mapsto \rho(z, A)$ pro $A \subset X$ neprázdnou je 1-lipschitzovská, a tedy spojitá, sestává vzorec pro f ze spojitých zobrazení. Navíc víme, že $\text{dist}(z, A) = 0$, právě když $z \in \bar{A}$. Tedy jmenovatel v (1.2) je kladná funkce. Proto je f spojitá funkce. Nyní otevřené množiny $\{x \in X; f(x) < \frac{1}{2}\}$ a $\{x \in X; f(x) > \frac{1}{2}\}$ oddělují E a F . $\square$

Předchozí tvrzení se zdá být silnější než normalita, protože odděluje disjunktní uzavřené množiny v metrizovatelném prostoru spojitou funkcí. P.S.Urysohn (1924) ukázal, že tyto dvě vlastnosti jsou v normálních prostorech ekvivalentní. Je to velice silné tvrzení.

Věta 1.56. Urysohnovo lemma

Topologický prostor X je normální, právě když pro každé dvě disjunktní uzavřené množiny A a B existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$, že $f(A) \subset \{0\}$ a $f(B) \subset \{1\}$.

Důkaz. Pro každé racionální číslo $r \in [0, 1]$ nalezneme otevřenou množinu $V_r \subset X$ tak, že platí

- (1) $\overline{V_r} \subset V_{r'}$, pokud $r < r'$;
- (2) $A \subset V_0$ a $B \subset X \setminus V_1$.

Množiny $\{V_r\}$ nalezneme induktivně. Položme $r_1 = 0$, $r_2 = 1$ a uspořádejme racionální čísla v $(0, 1)$ do prosté posloupnosti $r_3, r_4, r_5, \dots$

Nejprve nalezneme $U \subset X$ otevřenou takovou, že $A \subset U \subset \overline{U} \subset X \setminus B$ a položíme $V_0 = U$, $V_1 = X \setminus B$. Zjevně $\overline{V_0} \subset V_1$. Pak (2) je splněna, stejně jako podmínka

$$(3_k) \quad \overline{V_{r_i}} \subset V_{r_j}, \text{ kdykoliv } r_i < r_j \text{ a } i, j \leq k,$$

pro $k = 2$.

Nechť nyní množiny V_{r_i} pro $i \leq n$ jsou pro nějaké $n \geq 2$ definovány tak, že splňují (3_n). Nechť $r_l \in \{r_1, \dots, r_n\}$ je vybráno tak, že se jedná z těchto čísel o nejbližší číslo k r_{n+1} zleva; podobně nechť $r_m \in \{r_1, \dots, r_n\}$ je číslo nejbližší k r_{n+1} zprava. Pak díky $r_l < r_m$ z (3_n) plyne inkluze $\overline{V_{r_l}} \subset V_{r_m}$. Nechť U je otevřená množina splňující $\overline{V_{r_l}} \subset U \subset \overline{U} \subset V_{r_m}$, pak položením $V_{n+1} = U$ obdržíme posloupnost $V_{r_1}, \dots, V_{r_{n+1}}$ splňující (3_{n+1}). Tím je induktivní konstrukce ukončena.

Položíme

$$f(x) = \begin{cases} \inf\{r; x \in V_r\}, & x \in V_1, \\ 1, & x \in X \setminus V_1. \end{cases}$$

Z (2) plyne $f(A) \subset \{0\}$ a $f(B) \subset \{1\}$, je tedy třeba dokázat spojitost f . K tomuto stačí ověřit, že vzory intervalů $[0, a)$ a $[b, 1]$ jsou otevřené v X pro každé $a \leq 1$ a $b \geq 0$.

Jelikož platí $f(x) < a$ právě tehdy, když existuje $r < a$ racionální splňující $x \in V_r$, máme

$$f^{-1}([0, a)) = \bigcup \{V_r; r < a \text{ racionální}\},$$

což je otevřená množina.

Dále $f(x) > b$, právě když existuje $r' > b$ racionální takové, že $X \notin V_{r'}$. To však dle (1) znamená, že existuje $r > b$ racionální splňující $x \notin \overline{V_r}$. Tedy

$$f^{-1}((b, 1]) = \bigcup \{X \setminus \overline{V_r}; r > b \text{ racionální}\} = X \setminus \bigcap \{\overline{V_r}; r > b \text{ racionální}\}$$

je též otevřená množina. Funkce f je tak spojitá, což dokazuje první implikaci.

Obrácená implikace je snadná stejně jako v Tvrzení 1.55 o normalitě metrizable prostorů. $\square$

Poznámka 1.57

Z Urysohnova lematu snadno plyne, že pro $a < b$ v $\mathbb{R}$ a dvě disjunktní uzavřené množiny A, B v normálním prostoru X existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [a, b]$ taková, že $f(A) \subset \{a\}$ a $f(B) \subset \{b\}$. Vskutku, zkonstruujeme funkci $g: X \rightarrow [0, 1]$ jako ve Větě 1.56 a složíme ji s rostoucím homeomorfismem $g: [0, 1] \rightarrow [a, b]$.

Vzniká otázka, zda i pro regulární prostory je oddělování bodu od uzavřené množiny otevřenými množinami ekvivalentní oddělování pomocí spojitých funkcí. Následující příklad ukazuje, že tomu tak není.

Příklad 1.58. A.Mysior (1981)

Ať X je množina $X_0 \cup \{\infty\}$, kde $X_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$, s topologií definovanou následovně.

- Každý bod $(x, y) \in X$, kde $y > 0$, je izolovaný.
- Pro bod $z = (x, 0)$ definujeme

$$A_1(z) = \{(x, y); 0 \leq y \leq 2\} \quad A_2(z) = \{(x + y, y); 0 \leq y \leq 2\}.$$

Báze okolí bodu z pak sestává z množin

$$(A_1(z) \cup A_2(z)) \setminus K, \quad |K| < \omega, z \notin K.$$

- Báze okolí bodu ∞ pak sestává z množin $U_{\infty, n} = \{\infty\} \cup \{(x, y) \in X_0; x \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$.

Na obrázku je okolí bodu s konečně mnoha odstraněnými body jen pro bod $(0, 0)$, u ostatních by to bylo podobné.

Bázová okolí bodů $z \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$ jsou obojetná, a $\overline{U_{\infty, n+2}} \subset U_{\infty, n}$, takže každý bod je uzavřený a má bázi uzavřených okolí. Tudíž X je T_3 .

Označme $L_i = \{(x, 0) \in X_0; i - 1 \leq x \leq i\}$, $i \in \mathbb{N}$. Pak L_1 je uzavřená množina. Uvažujme spojitou funkci $f: X \rightarrow [0, 1]$ splňující $f(L_1) = \{0\}$. Ukážeme, že také $f(\infty) = 0$, což znamená, že L_1 nelze oddělit od bodu ∞ spojitou funkcí, tj. X není úplně regulární.

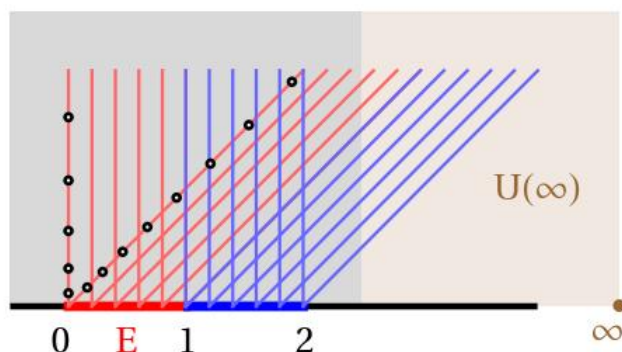
Abychom toho dosáhli, dokážeme indukcí, že pro každé $i \in \mathbb{N}$ je množina $K_i = \{z \in L_i; f(z) = 0\}$ nekonečná. Tvrzení zřejmě platí pro $i = 1$. Předpokládejme nyní jeho platnost pro nějaké $i \in \mathbb{N}$. Nejprve nalezneme spočetnou nekonečnou množinu $K'_i \subset K_i$. Pak ze spojitosti f v bodě $z \in K'_n$ plyne existence spočetné množiny $A_0(z) \subset A_2(z)$ takové, že $f = 0$ na $A_2(z) \setminus A_0(z)$. Pak je množina

$$A = p_x \left(\bigcup \{A_0(z); z \in K'_n\} \right)$$

spočetná (zde p_x značí projekci roviny na první souřadnici). Uvažujme nyní libovolné $t \in L_{i+1} \setminus A$. Necht $U \in \mathcal{U}(t)$ je libovolné okolí. Pak existuje $z \in K'_i$ takové, že $A_1(t) \cap (A_2(z) \setminus A_0(z)) \neq \emptyset$. Vskutku, necht F je konečná množina splňující $A_1(t) \setminus F \subset U$. Pak pouze konečně mnoho $z \in K'_i$ splňuje $(A_1(t) \setminus F) \cap (A_2(z) \setminus A_0(z)) = \emptyset$, tedy existuje $z \in K'_i$ takové, že $(A_1(t) \setminus F) \cap (A_2(z) \setminus A_0(z)) \neq \emptyset$. Pak ovšem $U \cap (A_2(z) \setminus A_0(z)) \neq \emptyset$, což jsem chtěli ověřit.

Tedy každé okolí t obsahuje bod, ve kterém se f nuluje. Ze spojitosti f tak plyne $f(t) = 0$ pro každé $t \in L_{i+1} \setminus A$. Jelikož je A spočetná, je množina K_{i+1} nekonečná.

Nyní již vidíme, že každé okolí bodu ∞ obsahuje bod, ve kterém je f nulová. Ze spojitosti f pak plyne $f(\infty) = 0$. $\square$



1.7.1 Úplně regulární prostory

Z předchozích příkladů vyplývá, že je vhodné zavést i třídy prostorů pomocí oddělování spojitými funkcemi. Lze opět oddělovat jen dva různé body (dostanou se tzv. úplně Hausdorffovy prostory – nejsou však příliš používané) nebo body a uzavřené množiny. Oddělování dvou uzavřených množin, jak víme z Urysohnova lemmatu, nic nového nepřinese.

Definice 1.59. Úplně regulární prostory

Topologický prostor X se nazývá *úplně regulární*, jestliže pro každý bod $x \in X$ a uzavřenou množinu $F \subset X$ neobsahující bod x existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$ s vlastností $f(x) = 0, f(F) \subset \{1\}$.

Úplně regulární T_1 -prostor se nazývá $T_{3\frac{1}{2}}$ -prostor nebo *Tichonovův prostor* □

Úplně regulární prostory se poprvé objevily v r. 1925 u P.S. Urysohna, velký podíl na jejich základních vlastnostech má A. Tichonov, a proto jejich název. Tichonovy prostory patří mezi nejdůležitější třídy topologických prostorů, protože jsou úzce spojeny s prostorem reálných čísel a metrických prostorů.

Uvedeme několik jednoduchých pozorování, která se často hodí.

Fakt 1.60. Jednoduché vlastnosti úplně regulárních prostorů

- (a) Každý nuldimenzionální prostor je úplně regulární. Opravdu, jestliže $x \notin \overline{F}$, existuje obojetná množina $U \ni x, U \cap F = \emptyset$ a funkce mající hodnotu 0 na U a 1 na doplňku U , je spojitá. Tedy diskrétní i indiskrétní prostory jsou úplně regulární, prostory určené filtrem jsou úplně regulární (např. vějíř nebo $\mathbb{N}_\xi$).
- (b) Každý úplně regulární prostor je tzv. symetrický (pro x, y v prostoru platí implikace $x \in \overline{\{y\}} \implies y \in \overline{\{x\}}$), což normální prostor nemusí splňovat (např. Sierpiňského prostor, takže normální prostor nemusí být úplně regulární).
- (c) Platí implikace $T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$, úplná regularita $\implies$ regularita. Výše jsme uvedli, že normalita $\not\Rightarrow$ úplná regularita.
- (d) Implikace $T_4 \implies T_{3\frac{1}{2}} \implies T_3$, úplná regularita $\implies$ regularita, se nedají obrátit. Thomasův příklad z 1.54(3) je nuldimenzionální, a tedy úplně regulární, ale není normální. Mysiorův příklad 1.58 je T_3 a není úplně regulární.

Důkaz. Je třeba dokázat (b). Nechť tedy $x \in \overline{\{y\}}$. Pokud by y nebylo v uzávěru $\{x\}$, díky úplné regularitě by existovala spojitá funkce f splňující $f(y) = 0$ a $f(\overline{\{x\}}) = 1$. Pak ovšem není pravda, že $x \in \overline{\{y\}}$, což je spor. Tedy $y \in \overline{\{x\}}$. □

Na konci této části je uveden grafický přehled předchozích implikací. Nyní uvedeme několik speciálních a užitečných vlastností prostorů T_2 – T_4 .

Je ekvivalentní požadovat v definici úplné regularity, aby obor hodnot funkce f byl libovolný alespoň dvoubodový metrický prostor (X, d) a platilo $f(x) \notin \overline{f(F)}$. Stačí vzít spojitou funkci $g := \{r \rightsquigarrow 1 - d(r, f(F))/d(f(x), f(F))\}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, protože složení $g \circ f$ má hodnotu 0 v x a 1 na F . Snadno tuto funkci upravíme pomocí maxima a minima, aby její obor hodnot byl $[0, 1]$.

Ekvivalentně můžeme použít formulaci, že $x \in X$ a uzavřená množina F v X neobsahující x se dají oddělit vzory otevřených množin z $\mathbb{R}$ při spojitých funkcích. Ukážeme, že v tomto případě vzory otevřených množin z $\mathbb{R}$ (nebo z $[0, 1]$) tvoří otevřenou bázi v X . Tyto vzory se vyskytnou často při použití úplně regulárních prostorů, a proto mají svůj název: *funkcionálně otevřené množiny*; jejich doplňky, tj. vzory uzavřených množin, se nazývají *funkcionálně uzavřené množiny*. V angličtině se používají i názvy *cozero sets*, resp. *zero sets*. Jak jsme totiž viděli v předchozím odstavci, funkcionálně uzavřené množiny jsou právě vzory bodu 0 při spojitých zobrazeních $X \rightarrow [0, 1]$. Tyto úvahy shrneme.

Fakt 1.61. Jednoduché vlastnosti funkcionálně otevřených a uzavřených množin

Platí následující ekvivalence pro množiny A v prostoru X :

- (i) A je funkcionálně otevřená (resp. uzavřená);
- (ii) Existuje spojitě zobrazení $f : X \rightarrow M$ do metrického prostoru a otevřená množina G (resp. uzavřená množina F) v M , že $A = f^{-1}(G)$ (resp. $A = f^{-1}(F)$).
- (iii) V předchozí položce (ii) lze vzít za F bod z M a jeho doplněk za G .
- (iv) V položce (ii) lze vzít $M = [0, 1]$, $F = \{0\}$, $G = [0, 1] \setminus \{0\}$.
- (v) V položce (ii) lze vzít $M = \mathbb{R}$, $F = \{0\}$, $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

V důkazu budeme potřebovat snadné tvrzení (Důsledek 2.17) z následující kapitoly, že pokud jsou $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá zobrazení, jsou i $f + g$, $f \cdot g$, $\max\{f, g\}$, $\min\{f, g\}$ spojitá zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$.

Důkaz. Je-li $A = X$ nebo $A = \emptyset$, je zjevně A funkcionálně otevřená množina a splňuje podmínky (i)-(v). V dalším tedy předpokládejme, že A je neprázdná množina různá od X .

(i) $\implies$ (v): Necht A je funkcionálně otevřená množina, tedy $A = f^{-1}(G)$ pro $G \subset \mathbb{R}$ otevřenou a $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě. Pak G je neprázdná množina různá od $\mathbb{R}$. Spojitá funkce $\varphi(t) = d(t, \mathbb{R} \setminus G)$ (zde d je standardní metrika na $\mathbb{R}$) splňuje $\varphi(t) = 0$ pro $t \in \mathbb{R} \setminus G$ a $\varphi(t) > 0$ pro $t \in G$. Tedy funkce $g = \varphi \circ f$ splňuje $g(x) > 0$ pro $x \in A$ a $g(x) = 0$ pro $x \in X \setminus A$. Tím je vlastnost (v) ověřena.

(v) $\implies$ (iv): Máme-li $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě takové, že $A = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, pak funkce $g(x) = \min\{|f(x)|, 1\}$, $x \in X$, je spojitá a splňuje $g(x) = 0$ pro $x \in X \setminus A$ a $g(x) \in (0, 1]$ pro $x \in A$.

Implikace (iv) $\implies$ (iii) $\implies$ (ii) jsou jasné.

(ii) $\implies$ (i): Necht $f : X \rightarrow M$ je spojitě zobrazení do metrického prostoru (M, d) a G je otevřená množina v M splňující $A = f^{-1}(G)$. Pak G je neprázdná a různá od M . Uvažujme funkci $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou jako $g(x) = d(f(x), M \setminus G)$, $x \in X$. Pak g je spojitá, $g(x) = 0$ pro $x \in X \setminus A$ a $g(x) > 0$ pro $x \in A$. Tedy $A = g^{-1}((0, \infty))$ je funkcionálně otevřená množina. $\square$

Tvrzení 1.62. Regularita pomocí regulárně otevřených množin

Prostor je úplně regulární, právě když jeho funkcionálně otevřené množiny tvoří otevřenou bázi (nebo jeho funkcionálně uzavřené množiny tvoří uzavřenou bázi).

Důkaz. Ať X je úplně regulární prostor a $\mathcal{B}$ je množina všech jeho funkcionálně otevřených množin. Soustava $\mathcal{B}$ je bází nějaké topologie na X , protože splňuje podmínky tvrzení 1.5: podmínka (B2) je triviálně splněna, pro $U, V \in \mathcal{B}$ existují spojitě funkce $f, g : X \rightarrow [0, 1]$, že $U = f^{-1}((0, 1])$, $V = g^{-1}(0)$ a pak $U \cap V = (f \cdot g)^{-1}((0, 1])$, takže $U \cap V \in \mathcal{B}$. Protože každá funkcionálně otevřená množina je otevřená, zbývá ukázat, že je-li $x \in G \subset X$, G otevřená, existuje $U \in \mathcal{B}$, že $x \in U \subset G$. To však plyne přímo z definice úplné regularity.

Ať soustava $\mathcal{B}$ všech funkcionálně otevřených množin v prostoru X je jeho otevřenou bází. Vezmeme $x \notin F$, kde F je uzavřená v X . Pak existuje $U \in \mathcal{B}$, že $x \in U \subset X \setminus F$, takže existuje spojitá funkce $f : X \rightarrow [0, 1]$, že $U = f^{-1}((0, 1])$. To ale znamená, že $f(x) > 0$ a $f(F) \subset \{0\}$, což je ekvivalentní požadavku z Definice 1.59. $\square$

Pokud budeme v dalším textu používat úplně regulární prostory, většinou budeme místo otevřených nebo uzavřených množin používat funkcionálně otevřené nebo uzavřené množiny. Tyto báze mají specifické vlastnosti. Uvedeme je pro funkcionálně uzavřené množiny na prostoru X (pro funkcionálně otevřené množiny stačí použít de Morganovy vzorce).

- Každá funkcionálně uzavřená množina je G_δ -množina, tj. je průnikem spočetně mnoha otevřených množin (dokonce funkcionálně otevřených množin). Je-li totiž $F = f^{-1}(0)$, je $F = \bigcap_n f^{-1}((-1/n, 1/n))$.

- *Sjednocení konečně mnoha funkcionálně uzavřených množin je funkcionálně uzavřený.* Ať $F_i = f_i^{-1}(0)$, $i = 1, 2$ pro $f_i : X \rightarrow [0, 1]$. Pak $F_1 \cup F_2 = (f_1 \cdot f_2)^{-1}(0)$.
- *Průnik spočetně mnoha funkcionálně uzavřených množin je funkcionálně uzavřený.* Opravdu, vezmeme $F_n = f_n^{-1}(0)$, $n \in \mathbb{N}$ pro spojitá $f_n : X \rightarrow [0, 1]$, Pak zobrazení $f = \sum_n \min\{f_n, 2^{-n}\}$ je spojitý a $f^{-1}(0) = \bigcap F_n$.

V metrizovatelných prostorech je každá uzavřená množina funkcionálně uzavřenou (neboť pro $F \subset (X, d)$ uzavřenou je $F = f^{-1}(0)$, kde $f(x) = d(x, F)$, $x \in X$), v obecných topologických prostorech to však neplatí. Např. v nespočetném X s ko-konečnou topologií jsou netriviální otevřené množiny doplňky konečných množin, takže jejich spočetné průniky jsou doplňkem nejvýše spočetných množin, kdežto konečné množiny mají doplňky nespočetné, a tedy nejsou G_δ .

Sjednocení nekonečně mnoha funkcionálně uzavřených množin nemusí být uzavřenou množinou, například v $\mathbb{R}$ je $\mathbb{Q}$ spočetné sjednocení bodů, a $\mathbb{Q}$ není ani uzavřenou množinou.

Průnik nespočetně mnoha funkcionálně uzavřených množin nemusí být funkcionálně uzavřený. Např. množina $\omega_1 + 1$ s topologií určenou filtrem $\mathcal{F}$ v bodě ω_1 , kde $\mathcal{F}$ má za bázi intervaly $(\alpha, \omega_1]$, $\alpha \in \omega_1$. Pak každý prvek z $\mathcal{F}$ je funkcionálně uzavřený (je obojetnou množinou), průnik uvedené báze filtru je bod ω_1 , který ale není G_δ -množinou, takže není funkcionálně uzavřený.

1.7.2 Hausdorffovy prostory

K předchozím jednoduchým vlastnostem přidáme několik vlastností Hausdorffových prostorů ukazujících jednoznačnosti, které v T_1 prostorech neplatí. Později poznáme jejich důležitost.

Tvrzení 1.63. Jednoznačnost limity usměrněného souboru

Prostor X je Hausdorffův, právě když každý usměrněný soubor má nejvýše jednu limitu.

Důkaz. Ať pro spor $(x_i)_{i \in I}$ je usměrněný soubor a x, y jsou jeho různé limity. Prostor X je Hausdorffův, tedy existují otevřené disjunktní množiny U a V , že $x \in U$ a $y \in V$. Z definice limity existují $i_0, j_0 \in I$, že pro $i \geq i_0$ a $j \geq j_0$ je $x_i \in U$ a $x_j \in V$. Množina $(I, \leq)$ je usměrněná, tedy existuje $k \in I$, že $k \geq i_0$ a $k \geq j_0$. Nyní ovšem $x_k \in U \cap V$, což je spor s disjunktností.

Nyní předpokládejme, že X není Hausdorffův a že $x, y \in X$ je ta dvojice různých bodů, které nejdou oddělit disjunktními otevřenými množinami. Uvažujme usměrněnou množinu $(\mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y), \leq)$, kde $(A, B) \leq (U, V)$, právě když $A \supseteq U$ a $B \supseteq V$. Pro každé $(U, V) \in \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)$ zvolíme nějaký bod $x_{(U,V)} \in U \cap V$. Usměrněný soubor $\{x_{(U,V)}; (U, V) \in \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)\}$ konverguje jak k bodu x , tak k bodu y . $\square$

Tvrzení 1.64. Rovnost zobrazení

Ať X, Y jsou topologické prostory a $f, g : X \rightarrow Y$ spojitá zobrazení. Pokud Y je Hausdorffův, pak $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ je uzavřená.

Důkaz. Je-li $x \in X$ takové, že $f(x) \neq g(x)$, pak existují otevřené disjunktní množiny U, V oddělující $f(x)$ od $g(x)$. Položme $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$. Zřejmě $f(W) \cap g(W) = \emptyset$, tedy W je okolí x disjunktní s $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$. $\square$

Důsledek 1.65. Uzavřenost retraktu

Nechť podmnožina A Hausdorffova prostoru X je jeho retraktem. Pak A je uzavřená množina.

Důkaz. Ať $f : X \rightarrow A$ je spojitý zobrazení a $f|_A = \text{Id}_A$. Pak $A = \{x \in X; f(x) = \text{Id}_X(x)\}$. Podle předchozího tvrzení je A uzavřená v X , neboť X je Hausdorffův prostor. $\square$

Důsledek 1.66. Jednoznačnost spojitého rozšíření

Je-li X topologický prostor, Y Hausdorffův topologický prostor a $f : X \rightarrow Y$ spojitý a $S \subseteq X$ hustý, pak funkce $f|_S$ má jediné spojitý rozšíření na celé X .

Důkaz. Je-li $g : X \rightarrow Y$ spojitý zobrazení shodující se s f na S , pak množina $\{x \in X; f(x) = g(x)\}$ obsahuje S , a tedy je hustá v X . Navíc podle Tvrzení 1.64 je i uzavřená. Tedy se musí rovnat X . $\square$

Tvrzení 1.67. Velikost Hausdorffova prostoru

Je-li X Hausdorffův topologický prostor, platí $|X| \leq 2^{d(X)}$.

Důkaz. Ať A je hustá podmnožina v X . Každému bodu $x \in X$ přiřadíme soustavu $\mathcal{A}_x$ podmnožin A , a to $\mathcal{A}_x = \{U \cap A; U \text{ je okolí } x\}$. Protože X je Hausdorffův, je toto přiřazení prosté. Mohutnost soustav podmnožin A je však $2^{2^{|A|}}$. $\square$

Pro T_1 -prostory tvrzení neplatí: libovolně velký prostor s kokonečnou topologií má spočetnou hustou část.

1.7.3 Regulární prostory

Charakterizace regularity z Lemmatu 1.53(c) se dá vhodně přeformulovat. Podmnožina A prostoru X se nazývá *regulárně otevřená* (resp. *regulárně uzavřená*), jestliže $A = \text{Int}(\bar{A})$ (resp. $A = \overline{\text{Int}(A)}$).

Fakt 1.68

Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) *Prostor X je regulární.*
- (ii) *Každý bod prostoru X má lokální bázi složenou z uzavřených množin.*
- (iii) *Každý bod prostoru X má lokální bázi složenou z regulárně uzavřených množin.*

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Uvažujme pro $x \in X$ systém $\mathcal{V}(x) = \{\bar{U}; U \in \mathcal{U}(x)\}$. Pak $\mathcal{V}(x) \subset \mathcal{U}(x)$ a dle Lemmatu 1.53(c) tvoří lokální bázi v x .

(ii) $\implies$ (iii): Uvažujme $x \in X$ a $U \in \mathcal{U}(x)$. Dle (ii) nalezneme $F \subset X$ uzavřenou takovou, že $x \in \text{Int } F \subset F \subset U$. Pak $H = \overline{\text{Int } F}$ je regulárně uzavřená, neboť

$$\overline{\text{Int}(H)} = \overline{\text{Int}(\overline{\text{Int } F})} \subset \overline{\overline{\text{Int } F}} = \overline{\text{Int } F} = H$$

a

$$\overline{\text{Int}(H)} = \overline{\text{Int}(\overline{\text{Int } F})} \supset \overline{\text{Int}(\text{Int } F)} = \overline{\text{Int } F} = H.$$

Navíc $H \in \mathcal{U}(x)$ a $H \subset U$. Tedy regulárně uzavřené množiny tvoří lokální bázi v x .

(iii) $\implies$ (i): Jsou-li $x \in X$ a $U \in \mathcal{U}(x)$ dány, pak existuje dle (ii) regulárně uzavřená množina $H \in \mathcal{U}(x)$ splňující $H \subset U$. Dle Lemmatu 1.53(c) je X regulární. $\square$

Následující tvrzení se často používá při rozšiřování zobrazení z A na $\bar{A}$. Značně zjednodušuje důkaz spojitosti rozšíření, protože není nutné dbát na hodnoty zobrazení v dalších přidaných bodech k A .

Tvrzení 1.69. Regularita a rošíření zobrazení

Ať X je regulární prostor, A je hustá podmnožina prostoru Z a $f: Z \rightarrow X$ je spojitě na A vzhledem k A . Pak f je spojitě na Z , jestliže pro každý bod $z \in Z \setminus A$ je f spojitě v bodě z vzhledem k množině $A \cup \{z\}$.

Důkaz. Musíme dokázat, že za uvedených předpokladů je f spojitě v x vzhledem k množině Z . Vezmeme okolí U bodu $f(x)$ a najdeme okolí V bodu $f(x)$ takové, že $\bar{V} \subset U$. Existuje otevřené okolí W bodu x takové, že $f(W \cap A) \subset V$. Protože A je hustý v Z , je $W \subset \overline{W \cap A}$. Vezměme $z \in W$ libovolné. Pak $z \in \overline{A \cap W}$, takže existuje usměrněný soubor $\{a_i\}$ v $A \cap W$ konvergující k z . Ze spojitosti f na $A \cup \{z\}$ plyne, že $f(z)$ je limita $\{f(a_i)\}$. Tedy $f(z) \in \overline{f(W \cap A)} \subset \bar{V} \subset U$. Tedy $f(W) \subset U$ a důkaz je tak hotov. $\square$

Uvedli jsme příklad regulárního prostoru, v němž existuje uzavřená množina F a bod $x \notin F$, že pro každou spojitou funkci je $f(x) \in f(X)$. Odtud vyplývá, že je-li funkce na F konstantní, má stejnou hodnotu i v bodě x . Pomocí jistých konstrukcí s tímto nebo podobným prostorem lze sestavit regulární prostor, na němž je každá spojitá reálná funkce konstantní. Jedním z prvních, kdo takový prostor sestavil, byl J. Novák v r. 1948. H. Herrlich (1965) dokonce ukázal, že pro každý T_1 -prostor Y existuje aspoň dvoubodový regulární prostor X , že každé spojitě zobrazení X do Y je konstantní.

1.7.4 Normální prostory

Jedním z velmi důležitých použití Urysohnova lemmatu je zobecnění Tietzovy rozšiřovací věty z metrických prostorů na normální prostory. Důkaz používá zcela jiné metody než byly použity v důkazech Tietzovy věty.

Věta 1.70. Tietzeova-Urysohnova rošiřovací věta

Je-li X normální prostor a $F \subset X$ uzavřená, pak lze každou spojitou funkci $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ spojitě rozšířit na celé X , tedy existuje spojitá funkce $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$, že $\tilde{f}|_F = f$.

Důkaz. Nejprve ukážeme platnost následujícího pozorování:

Ke každé spojitě funkci $g: F \rightarrow [-c, c]$ existuje spojitá funkce $\bar{g}: X \rightarrow [-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}]$, že $|g(x) - \bar{g}(x)| \leq \frac{2}{3}c$ pro každé $x \in F$.

Pro ověření tohoto faktu uvažujeme množiny $E = \{x \in F; g(x) \leq -\frac{c}{3}\}$ a $H = \{x \in F; g(x) \geq \frac{c}{3}\}$, což jsou zřejmě uzavřené a disjunktní množiny v X . Můžeme tedy podle Urysohnova lemmatu najít spojitou funkci $h: X \rightarrow [-1, 1]$ takovou, že $h(E) \subseteq \{-1\}$, $h(H) \subseteq \{1\}$. Položíme $\bar{g} = \frac{c}{3}h$. Pak pro $x \in F$ platí $|g(x) - \bar{g}(x)| \leq \frac{2}{3}c$.

Nyní ukážeme, že lze spojitě rozšířit každou funkci $f: F \rightarrow [-1, 1]$. Indukcí najdeme spojitě funkce $g_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že $\sup_{x \in X} |g_n(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ a pro každé $x \in F$ a $n \in \mathbb{N}$ je

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^n g_i(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n.$$

Položme $g_1 = \bar{f}$. Jsou-li $g_1, \dots, g_n$ známé, najdeme g_{n+1} díky pozorování k funkci $f - \sum_{i=1}^n g_i$ zúžené na F a konstantou $c = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Položme $\tilde{f}_n = \sum_{i=1}^n g_i$ a $\tilde{f} = \sum_{i=1}^{\infty} g_i$, což je stejnoměrně konvergentní řada z Weierstrassova kritéria. Podle Tvrzení 1.48 je $\tilde{f}$ spojitá. Navíc pro $x \in F$ je $|\tilde{f}(x) - f(x)| = |f(x) - \lim \tilde{f}_i(x)| = \lim |f(x) - \tilde{f}_i(x)| = 0$. Tedy opravdu $\tilde{f}$ rozšiřuje f .

Je-li nyní $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá, najdeme nejprve homeomorfismus $h: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$. Nyní $h \circ f: F \rightarrow (-1, 1) \subseteq [-1, 1]$, tedy existuje spojitě rozšíření $v: X \rightarrow [-1, 1]$ pro funkci $h \circ f$. Ať $E = v^{-1}(\{-1, 1\})$. Množiny E a F jsou uzavřené a disjunktní, tedy existuje spojitá funkce $m: X \rightarrow [0, 1]$, že $m(E) \subseteq \{0\}$ a $m(F) \subseteq \{1\}$. Součinná funkce $m \cdot v: X \rightarrow (-1, 1)$ se shoduje s $h \circ f$ na F . Tedy funkce $h^{-1} \circ (m \cdot v)$ je hledané spojitě rozšíření funkce f . $\square$

Jestliže každá (resp. spojitá omezená) reálná spojitá funkce na podprostoru A v X se dá rozšířit na spojitou funkci na X , říkáme, že A je *C-vnořený* (resp. *C*-vnořený*) v X . Předchozí tvrzení tedy říká, že každá uzavřená podmnožina normálního prostor je v něm *C-vnořená*.

V první části důkazu je potřeba, že každé dva disjunktní vzory v F uzavřených množin z $[0, 1]$ je možné oddělit spojitou funkcí v celém X (uzavřenost F není potřeba). Připomeňme (1.61), že dvě množiny A, B v prostoru X se nazývají funkcionálně oddělitelné, jestliže jsou částí dvou disjunktních funkcionálně uzavřených množin (tj. existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$ taková, že $f(A) \subset \{0\}$, $f(B) \subset \{1\}$). Důkaz Věty 1.70 tedy dává následující jednu implikaci v následujícím tvrzení (druhá implikace je triviální).

Věta 1.71. Charakterizace C*-vnoření

Podmnožina F prostoru X je *C*-vnořená* právě když každé dvě množiny funkcionálně oddělitelné v F jsou funkcionálně oddělitelné v X .

Druhá část důkazu doplňuje, že je-li F *C*-vnořený* v X a lze funkcionálně v X oddělit F od funkcionálně uzavřených množin disjunktních s F , je F dokonce *C-vnořený*. Dokážeme i opačné tvrzení.

Věta 1.72. C-vnoření versus C*-vnoření

Podmnožina $F \subset X$ je *C-vnořená* v prostoru X právě když je v něm *C*-vnořená* a každá funkcionálně uzavřená množin v X disjunktní s F lze od f funkcionálně oddělit.

Důkaz. Stačí ukázat, že pokud je F *C-vnořená* v X a A je funkcionálně uzavřená v X , $A \cap F = \emptyset$, existuje spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$ s hodnotou 0 na A a s hodnotou 1 na F . Existuje spojitá funkce $g: X \rightarrow [0, 1]$, že $A = g^{-1}(0)$. Funkce $1/g$ je spojitá na F a lze ji tedy rozšířit spojitě na funkci h na X . Potom $f = g \cdot h$ má požadované vlastnosti. $\square$

Je zřejmé, že z Urysohnovy rošiřovací věty plyne Urysohnovo lemma. Později dokážeme předchozí tvrzení jako důsledek Stoneovy-Weierstrassovy věty a tím dostaneme jako jednoduchý důsledek i Urysohnovo lemma.

Urysohnova rošiřovací věta lze použít k důkazu, že některé prostory nejsou normální. Ukážeme dva postupy na Isbellově-Mrówkové prostoru, později i na jiných prostorech.

Příklad 1.73. Isbellův-Mrówkův prostor není normální

Ať $\mathcal{S}$ je skoro disjunktní soubor na $\mathbb{N}$ mohutnosti kontinua a $X = \mathbb{N} \cup \mathcal{S}$ je příslušný Isbellův-Mrówkův prostor. Pak X není normální. $\square$

Důkaz. První důkaz: Podprostor $\mathcal{S}$ je uzavřený a diskretní v X , a tedy každá funkce na $\mathcal{S}$ je spojitá na $\mathcal{S}$. Pokud je X normální, lze každou funkci na $\mathcal{S}$ spojitě rozšířit na X , takže $|C(X)| \geq |\mathbb{R}^{\mathcal{S}}| \geq 2^{2^\omega}$. Ale X je separabilní, neboť $\mathbb{N}$ je hustá v X , a tedy $|C(X)| = 2^\omega$ (To plyne z pozorování, že spojitá funkce na X je jednoznačně určena svými hodnotami na $\mathbb{N}$, takže zobrazení restrikce $r: C(X) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ je prosté. Tedy $|C(X)| \leq |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = 2^\omega$.) Tento spor dokazuje, že X není normální. (Použili jsme Tietzovu-Urysohnovu větu o rozšiřování spojitých funkcí na normálním prostoru (vizte Větu 1.70), ale lze použít jen Urysohnova lemmatu o oddělování uzavřených množin (Věta 1.56), protože disjunktních dvojic uzavřených podmnožin v $\mathcal{S}$ je také kontinuum.)

Druhý důkaz: Můžeme zmínit ještě jeden postup důkazu, kde mohutnost $\mathcal{S}$ nehraje roli, ale předpokládáme maximalitu $\mathcal{S}$. Opět předpokládáme, že X je normální. Vezmeme prostou posloupnost $\{S_n\}$ v $\mathcal{S}$. Pak je množina $Y = \{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ uzavřená v $\mathcal{S}$, a tedy v X . Necht $h: Y \rightarrow \mathbb{R}$ je definována jako $h(S_n) = n$, $n \in \mathbb{N}$, a necht $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ rozšiřuje funkci h . Protože $\mathbb{N}$ je hustá podmnožina v X , zúžení f na $\mathbb{N}$ je neomezené, a existuje proto prostá posloupnost $P = \{p_n\}$ v $\mathbb{N}$ taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(p_n)| = \infty$. Protože $\mathcal{S}$ je maximální, existuje $S \in \mathcal{S}$, že množina $P = \{p_n; n \in \mathbb{N}\}$ splňuje $|P \cap S| = \omega$. Pak $P \cap S$ chápána jako posloupnost v $\mathbb{N}$ konverguje k bodu $S \in \mathcal{S}$, limita funkce f na posloupnosti $P \cap S$ je však nevlastní a rovná se $f(S) \in \mathbb{R}$. A to je spor. $\square$

Poznámka

Rozdíl v obou postupech: První postup dá nenormalitu X , jakmile $2^{|\mathcal{S}|} > 2^\omega$, přičemž stačí, že $\mathcal{S}$ je skoro disjunktní soustava (nemusí být maximální). Ve druhém postupu byla potřeba maximalita soustavy $\mathcal{S}$, ale nebyla potřeba její mohutnost (musí být nekonečná).

Uvedený postup dává obecné tvrzení (F.B.Jones, 1937): *Separabilní prostor mající uzavřený diskretní podprostor mohutnosti kontinua není normální.* Lze vzít místo mohutnosti kontinua jen mohutnost $\kappa > \omega$? V důkazu bylo potřeba nerovnost $2^\omega < 2^\kappa$. Jakmile tato nerovnost platí, lze v tvrzení dát κ za 2^ω . Např. za hypotézy kontinua (obecněji za Martinova axiomu) tato nerovnost vždy platí pro $\kappa > \omega$. Existují však modely teorie množin, ve kterých existuje maximální skoro disjunktní soustava na $\mathbb{N}$ mohutnosti $\omega_1 < 2^\omega$ a náš postup nelze použít.

Příklad 1.74. Uspořádané topologické prostory jsou dědičně normální

Uspořádaný topologický prostor je dědičně normální. $\square$

Důkaz. Říkáme, že dvě podmnožiny P_1, P_2 v prostoru X jsou semiseparované, jestliže $\overline{P_1} \cap P_2 = P_1 \cap \overline{P_2} = \emptyset$. Dokážeme následující pozorování.

Prostor X je dědičně normální, právě když každé jeho dvě semiseparované podmnožiny mají disjunktní otevřená okolí.

Předpokládejme nejprve, že podmínka v tvrzení platí a $Y \subset X$ je podprostor. Necht $P_1, P_2 \subset Y$ jsou disjunktní uzavřené množiny v Y . Pak $\overline{P_1}^X \cap P_2 = P_1 \cap \overline{P_2}^X = \emptyset$, takže je lze oddělit otevřenými množinami. Stopy těchto množin v Y pak oddělují P_1 a P_2 v Y .

Předpokládejme nyní dědičnou normálnost prostoru X a necht $P_1, P_2 \subset X$ jsou semiseparované. Položme $V = X \setminus (\overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X)$ a $Y = P_1 \cup P_2 \cup V$. Pak

$$\begin{aligned} \overline{P_1}^Y \cap \overline{P_2}^Y &= \overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X \cap Y = \left((\overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X) \cap (P_1 \cup P_2) \right) \cup \left(\overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X \cap V \right) \\ &= (\overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X \cap P_1) \cup (\overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X \cap P_2) = (P_1 \cap \overline{P_2}^X) \cup (\overline{P_1}^X \cap P_2) = \emptyset \end{aligned}$$

Tedy $\overline{P_1}^Y$ a $\overline{P_2}^Y$ jsou disjunktní uzavřené množiny v Y . Lze je tak v Y oddělit otevřenými množinami, tedy existují otevřené $U_1, U_2 \subset X$ splňující $U_1 \supset P_1$, $U_2 \supset P_2$ a $U_1 \cap U_2 \cap Y = \emptyset$. Položme $V_1 = U_1 \cap V$ a $V_2 = U_2 \cap V$. Pak V_1, V_2 jsou otevřené množiny v X splňující $P_i \subset V_i$, $i = 1, 2$.

Vskutku, pokud $x \in P_1$, díky semiseparovanosti P_1 a P_2 platí $x \notin \overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X$, tedy $x \in V$. Protože $x \in U_1$, platí $x \in V_1$. Analogicky bychom ověřili případ $x \in P_2$.

Nakonec ověříme, že $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Skutečně, pro případný bod $x \in V_1 \cap V_2$ platí $x \in V$, tj. $x \notin \overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X$. Dále $x \notin Y$, neboť $U_1 \cap U_2 \cap Y = \emptyset$. Jelikož $x \notin (P_1 \cup P_2) \cup (X \setminus (\overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X))$, platí $x \in \overline{P_1}^X \cap \overline{P_2}^X$, což je spor.

Tedy V_1, V_2 separují P_1 a P_2 . Tím je důkaz pozorování dokončen.

At $(X, \leq)$ je uspořádaný topologický prostor. Ukážeme následující fakt.

Každou množinu $S \subset X$ je možno vyjádřit jako sjednocení disjunktního systému neprázdných maximálních konvexních množin. Maximální konvexní množiny v S jsou nazývány konvexními komponentami S .

Abychom našli příslušný rozklad S , pro každé $p \in S$ uvažujeme sjednocení S_p všech konvexních podmnožin S , které obsahují p . Pak S_p je konvexní množina. Vskutku, necht $a, b \in S_p$ takové, že $a < b$, a $c \in (a, b)$ je dáno. Necht $A, B \subset S$ konvexní splňují $a \in A, b \in B$ a $p \in A \cap B$. Pak buďto $p \leq t$, nebo $p > t$. V prvním případě $t \in B$, v druhém případě $t \in A$. Tedy $t \in S_p$ a S_p je konvexní.

Dále si povšimneme, že pokud $S_p \cap S_q \neq \emptyset$, máme $S_p = S_q$. Vskutku, necht $t \in S_p \cap S_q$. Pak S_p, S_q jsou dvě konvexní podmnožiny S obsahující t , takže $S_p \cup S_q \subset S_t$. Z maximality pak plyne $S_p = S_t = S_q$. Tím je důkaz rozkladu S dokončen.

Necht nyní A, B jsou dvě semiseparované podmnožiny X .

Krok 1. Obě množiny zvětšíme tak, aby zůstaly semiseparované a přitom měly lepší tvar. Definujeme

$$A^* = \bigcup \{[a, b]; a, b \in A, [a, b] \cap \overline{B} = \emptyset\} \quad \text{a} \quad B^* = \bigcup \{[a, b]; a, b \in B, [a, b] \cap \overline{A} = \emptyset\}.$$

Pak A^*, B^* jsou disjunktní množiny a $A \subset A^*, B \subset B^*$. Disjunktnost ověříme takto: Pokud $p \in A^* \cap B^*$, existují $a, b \in A$ a $c, d \in B$ takové, že $p \in [a, b] \cap [c, d]$ a $[a, b] \cap \overline{B} = \emptyset = [c, d] \cap \overline{A}$. Avšak ani c , ani d nepatří do $[a, b]$ a podobně ani a , ani b nepatří do $[c, d]$. Tedy $[a, b] \cap [c, d] = \emptyset$, což je spor.

Dále $A \subset A^*$, neboť pro $a \in A$ je interval $[a, a]$ disjunktní s $\overline{B}$.

Krok 2. Dokážeme, že množiny A^*, B^* jsou semiseparované. K tomuto účelu ověříme inkluzi $\overline{A^*} \subset A^* \cup \overline{A}$. Uvažujme nějaké $p \notin A^* \cup \overline{A}$. Předpokládejme nejprve, že p není maximální, ani minimální prvek X . Pak existuje interval (s, t) obsahující p , ale disjunktní s A . Interval (s, t) může protínat interval $[a, b] \subset A^*$ jedině tehdy, když $a, b \in A$ a $[a, b] \cap \overline{B} = \emptyset$. Pak ovšem fakt $(s, t) \cap A = \emptyset$ dává, že $(s, t) \subset (a, b)$. To ovšem implikuje $p \in A^*$, což je spor. Tedy $(s, t) \cap A^* = \emptyset$ a $p \notin \overline{A^*}$. Podobně bychom ověřili případ, kdy p je maximální nebo minimální prvek X .

Tím pádem máme

$$\overline{A^*} \cap B^* \subset (A^* \cup \overline{A}) \cap B^* = (A^* \cap B^*) \cup (\overline{A} \cap B^*) = \emptyset.$$

Tedy A^*, B^* jsou semiseparované.

Krok 3. Pišme nyní A^*, B^* a $X \setminus (A^* \cup B^*)$ jako sjednocení konvexních komponent, tedy

$$A^* = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha, \quad B^* = \bigcup_{\beta \in J} B_\beta \quad \text{a} \quad X \setminus (A^* \cup B^*) = \bigcup_{\gamma \in K} C_\gamma.$$

Pak systém

$$\mathfrak{M} = \{A_\alpha; \alpha \in I\} \cup \{B_\beta; \beta \in J\} \cup \{C_\gamma; \gamma \in K\}$$

je lineárně uspořádaná množina, pokud na ní uvažujeme uspořádání zděděné z X . Tedy $M_1 \leq M_2$ pro $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$, pokud $m_1 \leq m_2$, kdykoliv $m_1 \in M_1$ a $m_2 \in M_2$.

Pro $\alpha \in I$ označíme

$$S_\alpha = \{u \in X; u > a \text{ pro všechna } a \in A_\alpha\}.$$

Pak A_α má následníka v $\mathfrak{M}$, kdykoliv $A_\alpha \cap \overline{S_\alpha} \neq \emptyset$. Předpokládejme totiž, že průnik $A_\alpha \cap \overline{S_\alpha}$ je neprázdný. Pak obsahuje právě jeden bod p . Ten není obsažen v $\overline{B^*}$, takže existuje okolí (x, y) bodu p disjunktní s $\overline{B^*}$. Pak $(x, y) \cap S_\alpha \neq \emptyset$, takže $(p, y) \neq \emptyset$. Ale (p, y) je disjunktní s $A^* \cup B^*$, takže existuje C_γ obsahující (p, y) . Pak toto C_γ je následníkem A_α v $\mathfrak{M}$. Označíme ho A_α^+ .

Krok 4. Pro každé $\gamma \in K$ vybereme $c_\gamma \in C_\gamma$. Tedy pokud $A_\alpha \cap \overline{S_\alpha} \neq \emptyset$, máme jednoznačně určené $c_\alpha^+ \in C_\alpha^+$. V tomto případě položíme $I_\alpha = [p, c_\alpha^+)$, kde $p \in A_\alpha \cap \overline{S_\alpha}$. Pokud je tento průnik prázdný, položíme $I_\alpha = \emptyset$. Podobně definujeme J_α pomocí ostrých dolních závor A_α , kde použijeme stejné body c_γ . Položíme

$$U_\alpha = J_\alpha \cup A_\alpha \cup I_\alpha, \quad \alpha \in I,$$

a

$$V_\beta = J_\beta \cup A_\beta \cup I_\beta, \quad \beta \in J.$$

Pak U_α i V_β jsou konvexní otevřené množiny splňující $A_\alpha \subset U_\alpha$ a $B_\beta \subset V_\beta$. Pak

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \quad \text{a} \quad V = \bigcup_{\beta \in J} V_\beta$$

jsou otevřené množiny obsahující A^* , respektive B^* . Protože $A_\alpha \cap B_\beta = \emptyset$, z konstrukce pomocí c_γ dostáváme, že $U_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$. Tedy $U \cap V = \emptyset$, takže tyto množiny separují A a B .

□

Příklad 1.75. Silně nuldimezionální prostory

V úplně regulárních prostorech odděluje body od uzavřených množin spojitými funkcemi do $[0, 1]$. Pokud vezmeme oddělování bodů od uzavřených množin spojitými funkcemi do $\{0, 1\}$, dostaneme nuldimezionální prostory, tj. oddělování bodů od uzavřených množin obojetnými množinami. Následovat by mohlo oddělování disjunktních uzavřených množin obojetnými množinami, tj. spojitými funkcemi do $\{0, 1\}$. To ovšem bude možné jen v normálních prostorech. Rozšíříme proto uvedené oddělování na další prostory. Řekneme, že topologický prostor X je *silně nuldimezionální*, jestliže pro každé jeho dvě disjunktní funkcionálně uzavřené množiny F_1, F_2 existuje obojetná množina H , že $F_1 \subset H \subset X \setminus F_2$ (ekvivalentně: pro každé dvě disjunktní funkcionálně uzavřené podmnožiny F_1, F_2 v X existuje spojitá funkce $X \rightarrow \{0, 1\}$ mající hodnotu 0 na F_1 a 1 na F_2). Smysl má tato definice hlavně v úplně regulárních prostorech. Zřejmě každý silně nuldimezionální úplně regulární prostor je nuldimezionální. Opak neplatí. Příklady a vlastnosti silně nuldimezionálních prostorů budou popsány v kapitole Dodatky. $\square$

Příklad 1.76. Ultrametrické prostory

Jako příklad silně nuldimezionálních prostorů lze uvést ultrametrizovatelné prostory. $\square$

Důkaz. Necht F je uzavřená množina v ultrametrickém prostoru (X, ρ) a $G \supset F$ je otevřená množina. Pak množina $H = \{x \in X; \rho(x, F) < \rho(x, X \setminus G)\}$ je obojetná množina a $F \subset H \subset G$. Zřejmě $F \subset H \subset G$. Vskutku, je-li $x \in F$, je $0 = \rho(x, F) < \rho(x, X \setminus G)$. Dále, je-li $x \in H$, pak pokud $x \in X \setminus G$, platí $0 = \rho(x, X \setminus G) < \rho(x, F)$, což nelze. Tedy opravdu $H \subset G$.

Zbývá dokázat, že H je obojetná. Protože obě funkce $x \mapsto \rho(x, F)$ a $x \mapsto \rho(x, X \setminus G)$ jsou spojitě na X , je H otevřená. Ukážeme, že $X \setminus H$ je také otevřená množina. Zvolíme bod $z \in X \setminus H$, tj. bod splňující $\rho(z, F) \geq \rho(z, X \setminus G)$. Protože množina $\{x \in X; \rho(x, F) > \rho(x, X \setminus G)\}$ je otevřená, je z vnitřním bodem $X \setminus H$, pokud $\rho(z, F) > \rho(z, X \setminus G)$. Stačí tedy uvažovat případ $\rho(z, F) = \rho(z, X \setminus G)$. Označíme toto kladné číslo jako r a ukážeme, že $B(z, r) \subset X \setminus H$.

Pro spor předpokládejme, že existuje $y \in H \cap B(z, r)$. Tvrdíme, že $B(y, r) = B(z, r)$. Vskutku, je-li $b \in B(y, r)$, platí

$$\rho(b, z) \leq \max\{\rho(b, y), \rho(y, z)\} < r,$$

tedy $b \in B(z, r)$. Podobně pokud $a \in B(z, r)$, máme

$$\rho(a, y) \leq \max\{\rho(a, x), \rho(x, y)\} < r,$$

tedy $a \in B(y, r)$. Proto $B(z, r) = B(y, r)$.

Pak ovšem $\rho(y, F) \geq r$. Kdyby totiž existovalo $c \in F$ splňující $\rho(y, c) < r$, platilo by

$$\rho(c, z) \leq \max\{\rho(c, y), \rho(y, z)\} < r,$$

tj. $\rho(z, F) < r$, což nelze. Tedy

$$r \leq \rho(y, F) \leq \max\{\rho(y, z), \rho(z, F)\} = r.$$

tedy $\rho(y, F) = r$.

Úplně stejně použitím $X \setminus G$ místo F dostaneme $\rho(y, X \setminus G) = r$, což je spor s volbou $y \in H$. $\square$

Později ukážeme, že silně nuldimezionální metrizable prostor je ultrametrizovatelný a že silně nuldimezionální metrizable prostory jsou uspořadatelné. ■■■[odkaz](#)

Normalita prostoru je definována pomocí oddělování uzavřených množin otevřenými množinami. Jak je ukázáno výše, můžeme požadovat oddělování i pomocí uzávěrů otevřených množin, tedy pomocí speciálních uzavřených množin. Přejdeme-li k doplňkům, dostaneme charakterizaci normality pomocí otevřených množin. Musíme se ale vyrovnat s uvedenou speciálností. Dostaneme kvalitativně jiný pohled i přístup k topologickým vlastnostem.

Je-li X normální a F_1, F_2 jsou disjunktní uzavřené množiny, existují otevřené množiny V_i, U_i , $i = 1, 2$, takové, že $F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i$ a $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Označíme $G_i = X \setminus F_i$, $i = 1, 2$, takže $\mathcal{G} = \{G_1, G_2\}$ je otevřené pokrytí X (definice vizte dále). Jestliže označíme $H_1 = U_1, H_2 = U_2, H_3 = X \setminus (\overline{V_1} \cup \overline{V_2})$, dostáváme otevřené pokrytí $\mathcal{H} = \{H_1, H_2, H_3\}$ s vlastností, že každé H_i je částí nějakého G_j . Platí více: sjednocení prvků z $\mathcal{H}$ majících neprázdný průnik je částí nějakého prvku z $\mathcal{G}$.

Tato vlastnost charakterizuje normalitu. Uvedeme ji v obecnějším tvaru, nejdříve však pojmenujeme použité vlastnosti pokrytí. Formulace se zkrátí a více objasní, navíc tyto pojmy použijeme často v dalších kapitolách.

Definice 1.77. Vlastnosti pokrytí

- Řekneme, že soustava $\mathcal{S}$ podmnožin X je *pokrytí* množiny X , jestliže $\bigcup \mathcal{S} = X$. Je-li X topologický prostor a všechny prvky jsou otevřené (nebo uzavřené) množiny, nazývá se $\mathcal{S}$ *otevřené* (resp. *uzavřené*) *pokrytí*.
- Pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X se nazývá *zjemnění* pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže každé $A \in \mathcal{A}$ je částí některé množiny z $\mathcal{B}$.
- Pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X se nazývá *hvězdovité zjemnění* pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pro každé $x \in X$ existuje nějaké $B \in \mathcal{B}$, že $\text{star}_{\mathcal{A}}(x) = \bigcup \{A \in \mathcal{A}; x \in A\} \subset B$.
- Pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X se nazývá *silně hvězdovité zjemnění* pokrytí $\mathcal{B}$, jestliže pro každé $A_0 \in \mathcal{A}$ existuje nějaké $B \in \mathcal{B}$ takové, že $\text{star}_{\mathcal{A}}(A_0) = \bigcup \{A \in \mathcal{A}; A_0 \cap A \neq \emptyset\} \subset B$.
- Otevřené pokrytí $\mathcal{G}_1$ prostoru X se nazývá *normální*, jestliže existuje posloupnost pokrytí $\{\mathcal{G}_n\}_{n \geq 1}$, že $\mathcal{G}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{G}_n$ pro každé $n \geq 1$. □

Uvedená zjemnění lze definovat nejen pro pokrytí, ale pro libovolné soustavy množin. Je také zřejmé, jak by se definovalo P -pokrytí pro nějakou vlastnost P , nebo hvězda $\text{star}_{\mathcal{A}}(C)$ pro libovolnou podmnožinu $C \subset X$.

Fakt 1.78. Jednoduché vlastnosti zjemnění

- Je-li $\mathcal{A}$ hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}$ je hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{C}$, je $\mathcal{A}$ silně hvězdovité zjemnění pokrytí $\mathcal{C}$.*
- Je-li (X, d) metrický prostor, má pokrytí $\{B_d(x, r)\}_{x \in X}$ pro libovolné $r > 0$ hvězdovité zjemnění $\{B_d(x, r/2)\}_{x \in X}$. (Tedy každé pokrytí X koulemi o stejném poloměru je normální.)*

Důkaz. (a) Nechť $A_0 \in \mathcal{A}$ je dáno. Pak pro každé $x \in A_0$ vybereme $B_x \in \mathcal{B}$ splňující $\text{star}_{\mathcal{A}}(x) \subset B_x$. Pak máme

$$\text{star}_{\mathcal{A}}(A_0) = \bigcup_{x \in A_0} \text{star}_{\mathcal{A}}(x) \subset \bigcup_{x \in A_0} B_x.$$

Zvolíme pevné $x_0 \in A_0$. Pak pro každé $x \in A_0$ platí

$$x_0 \in A_0 \subset \text{star}_{\mathcal{A}}(x) \subset B_x.$$

Tedy

$$\bigcup_{x \in A_0} B_x \subset \text{star}_{\mathcal{B}}(x_0).$$

Zvolíme-li tedy $C \in \mathcal{C}$ takové, že $\text{star}_{\mathcal{B}}(x_0) \subset C$, dostáváme

$$\text{star}_{\mathcal{A}}(A_0) \subset \bigcup_{x \in A_0} B_x \subset \text{star}_{\mathcal{B}}(x_0) \subset C.$$

Tím je důkaz (a) dokončen.

(b) Nechť $\mathcal{B} = \{B_d(x, r)\}_{x \in X}$ a $\mathcal{A} = \{B_d(x, \frac{r}{2})\}_{x \in X}$. Dále nechť $x \in X$ je dáno. Pak

$$\text{star}_{\mathcal{A}}(x) = \bigcup \{B_d(y, \frac{r}{2}); x \in B_d(y, \frac{r}{2})\} = \bigcup \{B_d(y, \frac{r}{2}); d(x, y) < \frac{r}{2}\} \subset B_d(x, r).$$

Tedy i (b) platí. □

Později ukážeme, že podmínka stejného poloměru ve Faktu 1.78(b) se může vypustit.

Věta 1.79. Charakterizace normality pomocí pokrytí

- Prostor X je normální, právě když pro každé jeho otevřené pokrytí $\{G_1, \dots, G_n\}$ existuje otevřené pokrytí $\{H_1, \dots, H_n\}$ takové, že $\overline{H_i} \subset G_i$ pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$.*
- Prostor X je normální, právě když každé jeho konečné otevřené pokrytí má konečné otevřené hvězdovité zjemnění. Konečná otevřená pokrytí normálního prostoru jsou proto normální.*

- (c) Je-li prostor X normální, pak pro každé bodově konečné otevřené pokrytí $\{G_\alpha; \alpha < \kappa\}$ existuje otevřené pokrytí $\{H_\alpha; \alpha < \kappa\}$ splňující $\overline{H_\alpha} \subset G_\alpha, \alpha < \kappa$. (Systém je bodově konečný, pokud každý bod prostoru leží jen v konečně mnoha množinách systému.)

Důkaz. (a) Dokážeme, že normální prostor má uvedenou vlastnost, opačné tvrzení je triviální. Vskutku, pokud vlastnost platí a F_1, F_2 jsou disjunktní uzavřené množiny v X , je $\{X \setminus F_1, X \setminus F_2\}$ otevřené pokrytí X . Nalezneme H_1, H_2 otevřené množiny v X takové, že $H_1 \cup H_2 = X$ a $\overline{H_1} \subset X \setminus F_1, \overline{H_2} \subset X \setminus F_2$. Pak $X \setminus \overline{H_1} \supset F_1, X \setminus \overline{H_2} \supset F_2$ a

$$(X \setminus \overline{H_1}) \cap (X \setminus \overline{H_2}) = X \setminus (\overline{H_1} \cup \overline{H_2}) = X \setminus X = \emptyset.$$

Tedy X je normální.

Pro důkaz obrácené implikace použijeme indukci vzhledem k počtu prvků pokrytí. Tedy dokazujeme indukcí následující fakt .

Je-li X normální prostor a $\{G_1, \dots, G_n\}$ je otevřené pokrytí X , existuje otevřené pokrytí $\{H_1, \dots, H_n\}$ prostoru X takové, že $\overline{H_i} \subset G_i, i \in \{1, \dots, n\}$.

Pro pokrytí o dvou prvcích $\{G_1, G_2\}$ vezmeme uzavřené množiny $F_i = X \setminus G_i, i = 1, 2$, které jsou disjunktní, a existují tedy otevřené množiny $V_i \subset U_i, i = 1, 2$ takové, že $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ a

$$F_i \subset V_i \subset \overline{V_i} \subset U_i, \quad i = 1, 2.$$

Pak $H_i = X \setminus \overline{V_i}, i = 1, 2$, jsou hledané prvky. Vskutku,

$$H_1 \cup H_2 = (X \setminus \overline{V_1}) \cup (X \setminus \overline{V_2}) = X \setminus (\overline{V_1} \cap \overline{V_2}) = X \setminus \emptyset = X,$$

takže $\{H_1, H_2\}$ je pokrytí. Dále

$$\overline{H_i} = \overline{X \setminus \overline{V_i}} \subset X \setminus \overline{V_i} = X \setminus V_i \subset X \setminus F_i = G_i, \quad i = 1, 2.$$

Ať nyní tvrzení platí pro $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ a $\{G_1, \dots, G_{n+1}\}$ je otevřené pokrytí X . Označíme $G' = \bigcup_{i=1}^n G_i$. Podle první části důkazu existuje otevřené pokrytí $\{H', H_{n+1}\}$ takové, že $\overline{H'} \subset G'$ a $\overline{H_{n+1}} \subset G_{n+1}$. Jelikož je $\overline{H'}$ normální prostor, podle indukčního předpokladu existuje otevřené pokrytí $\{U_1, \dots, U_n\}$ prostoru $\overline{H'}$ s vlastností $\overline{U_i}^{\overline{H'}} \subset G_i \cap \overline{H'} \subset G_i, i \in \{1, \dots, n\}$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ nalezneme otevřenou množinu H_i v X s vlastností

$$\overline{U_i}^{\overline{H'}} \subset H_i \subset \overline{H_i} \subset G_i.$$

Pak $\{H_1, \dots, H_n, H_{n+1}\}$ je hledané pokrytí.

(b) Ať X je normální prostor a $\mathcal{G} = \{G_i\}_{i \in I}$ je jeho otevřené konečné pokrytí. Podle části (a) nalezneme příslušné otevřené pokrytí $\{H_i\}_{i \in I}$ splňující $\overline{H_i} \subset G_i, i \in I$. Pro $J \subset I$ definujeme

$$U_J = \left(\bigcap_{i \in J} G_i \right) \setminus \left(\bigcup_{i \in I \setminus J} \overline{H_i} \right).$$

Ukážeme, že systém

$$\mathcal{U} = \{U_J; J \subset I\}$$

je otevřené pokrytí, které hvězdovitě zjemňuje $\{G_i\}_{i \in I}$.

Je-li $x \in X$ dáno, položíme $J = \{i \in I; x \in G_i\}$. Pak $x \notin \bigcup_{i \in I \setminus J} \overline{H_i}$. Vskutku, kdyby existovalo $i \in I \setminus J$ takové, že $x \in \overline{H_i}$, pak $x \in G_i$, tj. $i \in J$. To je ale spor s faktem $i \in I \setminus J$. Proto

$$x \in \bigcap_{i \in J} G_i \setminus \bigcup_{i \in I \setminus J} \overline{H_i} = U_J.$$

Náš systém $\mathcal{U}$ je tak otevřené pokrytí.

Nyní ověříme, že hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{G}$. Nechť $x \in X$ je dáno. Zvolíme $i \in I$ splňující $x \in \overline{H_i}$. Je-li nyní $J \subset I$, že $x \in U_J$, pak $U_J \subset G_i$.

Vskutku, platí totiž $i \in J$ (kdyby $i \in I \setminus J$, pak $x \in \overline{H_i} \subset \bigcup_{i' \in I \setminus J} \overline{H_{i'}}$, takže $x \notin U_J$). Proto $U_J \subset G_i$. Jelikož U_J obsahující x bylo libovolné, máme $\text{star}_{\mathcal{U}}(x) \subset G_i$. Důkaz je tak hotov.

Pro důkaz opačného tvrzení vezmeme uzavřené disjunktní množiny F_1, F_2 v X a k nim příslušné otevřené pokrytí $\mathcal{G} = \{X \setminus F_1, X \setminus F_2\}$. K němu najdeme otevřené hvězdovité zjemnění $\mathcal{H}$. Množiny $G_i = \text{star}_{\mathcal{H}}(F_i), i = 1, 2$, jsou pak disjunktní otevřená okolí množin F_1 a F_2 .

Vskutku, G_1 je otevřená množina obsahující F_1 , neboť pro každé $x \in F_1$ existuje $H \in \mathcal{H}$ takové, že $x \in H$. Pak

$$x \in H \subset \text{star}_{\mathcal{H}}(F_1) = G_1.$$

Podobně ověříme $F_2 \subset G_2$.

Předpokládejme nyní, že $x \in G_1 \cap G_2$. Pak existují $H_1, H_2 \in \mathcal{H}$ takové, že $H_1 \cap F_1 \neq \emptyset$, $H_2 \cap F_2 \neq \emptyset$ a $x \in H_1 \cap H_2$. Jelikož je $\mathcal{H}$ hvězdovité zjemnění $\mathcal{G}$, pro x platí buďto

$$\text{star}_{\mathcal{H}}(x) \subset X \setminus F_1 \quad \text{nebo} \quad \text{star}_{\mathcal{H}}(x) \subset X \setminus F_2.$$

V prvním případě platí však

$$X \setminus F_1 \supset \text{star}_{\mathcal{H}}(x) \supset H_1,$$

což je množina protínající F_1 . Tedy máme spor. Podobně v druhém případě dostáváme

$$X \setminus F_2 \supset \text{star}_{\mathcal{H}}(x) \supset H_2,$$

což je množina protínající F_2 . Tedy opět dostáváme spor.

Proto $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, a X je tak normální.

(c) Pokrytí $\{H_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ sestrojíme transfinite indukci podle indexů $\alpha \in \kappa$. Jako první krok vezmeme uzavřenou množinu $F_0 = X \setminus \bigcup\{G_\alpha; 0 < \alpha < \kappa\}$, která je částí G_0 , protože $\{G_\alpha\}_{\alpha < \kappa}$ je pokrytí X . Díky normalitě X existuje otevřená množina H_0 , že $F_0 \subset H_0 \subset \overline{H_0} \subset G_0$. Potom $H_0 \cup \bigcup\{G_\alpha; 0 < \alpha < \kappa\} = X$.

Mějme sestrojeny otevřené množiny H_β , $\beta < \alpha$, takové, že $\overline{H_\beta} \subset G_\beta$ a $\bigcup\{H_\beta; \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{G_\gamma; \alpha < \gamma < \kappa\} = X$. Potom

$$F_\alpha = X \setminus \left(\bigcup\{H_\beta; \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{G_\gamma; \alpha < \gamma < \kappa\} \right)$$

je uzavřená množina, která je částí G_α . Existuje tedy otevřená množina H_α s vlastností $F_\alpha \subset H_\alpha \subset \overline{H_\alpha} \subset G_\alpha$. Zřejmě je $\bigcup\{H_\beta; \beta \leq \alpha\} \cup \bigcup\{G_\gamma; \alpha < \gamma < \kappa\} = X$.

Tím je indukce završena a zbývá dokázat, že $\bigcup_{\alpha < \kappa} H_\alpha = X$. Necht $x \in X$ leží v množinách G_{α_k} , $k = 1, \dots, n$, $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$. Vezmeme $\alpha \in (\alpha_n, \kappa)$. Protože $x \in \bigcup\{H_\beta; \beta < \alpha\} \cup \bigcup\{G_\gamma; \alpha < \gamma < \kappa\}$, musí být $x \in \bigcup\{H_\beta; \beta < \alpha\}$. $\square$

Je možné v první části důkazu (b) vzít (podle Urysohnova lemmatu) spojitě funkce $f_i: X \rightarrow [0, 1]$ mající hodnotu 0 na H_i a 1 na $X \setminus G_i$. Potom $d(x, y) = \sum_{i=1}^n |f_i(x) - f_i(y)|$ je pseudometrika spojitá na $X \times X$, takže otevřené koule v (X, d) jsou otevřené množiny v X . Snadno je vidět, že $\{B_d(x, 1)\}_X$ zjemňuje pokrytí $\{G_i\}$ (pro každé $x \in H_i$ je $B_d(x, 1) \subset G_i$) a je normální, takže i pokrytí $\{G_i\}$ je normální. Nicméně, získané normální pokrytí je obecně nekonečné. Získat z tohoto pokrytí konečné lze, většinou postupem použitým v našem důkazu.

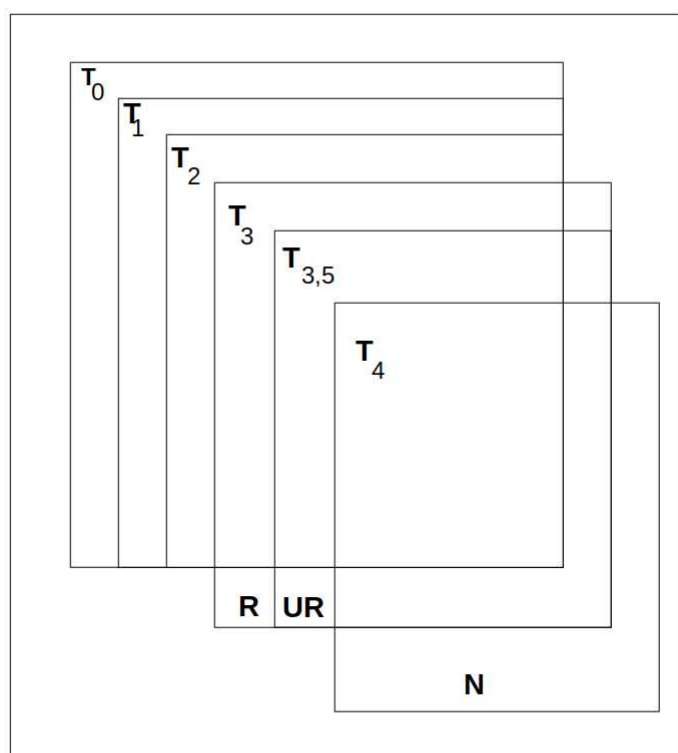
Příklad 1.80

Uvedená charakterizace normality pomocí hvězdovitých zjemnění konečných otevřených pokrytí nelze zobecnit na libovolná nekonečná pokrytí.

Uspořádaný prostor ω_1 je normální (vizte Příklad 1.74). Vezmeme jeho libovolné otevřené pokrytí $\mathcal{G}$. Pro každý limitní ordinál $\alpha \in \omega_1$ existuje $\delta_\alpha < \alpha$, že $[\delta, \alpha] \subset G$ pro nějaké $G \in \mathcal{G}$. Podle Fodorovy věty je $\delta_\alpha = \delta$ pro nějaké δ a nespočetně mnoho α . To znamená, že $\text{star}_{\mathcal{G}}(\delta) \supset [\delta, \omega_1)$. Takže žádné otevřené pokrytí prostoru ω_1 neobsahující nějaký interval $[\delta, \omega_1)$ nemá otevřené hvězdovité zjemnění (např. pokrytí $\{[0, \alpha); \alpha \in \omega_1\}$). $\square$

Máme sem dát i příklad, že nelze v zobecnění 1 vypustit bodovou konečnost?

V následujícím znázornění značí „R“ regulární, „UR“ úplně regulární a „N“ normální prostory.



Základní operace s topologickými prostory

ch:2

V teorii topologických prostorů (podobně jako např. v teorii algebraických struktur) je potřeba znát konstrukce nových prostorů. Postupem času se jako nejdůležitější konstrukce vytříbily čtyři následující: podprostory, součiny, kvocienty a disjunktní součty. Později se ukázalo, že tyto konstrukce jsou speciálním případem obecnějšího přístupu. S tímto obecným pohledem začneme. Z uvedených speciálních případů budou pro nás důležitější první dva, těm věnujeme v této části více prostoru než kvocientům a součtům.

2.1 Obecné konstrukce

Definice 2.1. Uspořádání topologií

Ať X je množina a τ, σ dvě topologie na X . Řekneme, že τ je *větší* (*jemnější*, *silnější*) než σ , pokud $\tau \supset \sigma$. Topologie σ se v tom případě nazývá *menší* (*hrubší*, *slabší*). $\square$

Je-li X množina, pak systém topologií na X vytváří uspořádání dané inkluzí, tedy $\tau \leq \sigma$, pokud $\tau \subset \sigma$. Tento uspořádaný prostor má pak následující vlastnosti.

Tvrzení 2.2. Svaz topologií

Nechť X je množina a $(T, \leq)$ je systém všech topologií na X uspořádaný inkluzí.

- (a) Pak $(T, \leq)$ je úplný svaz, kde diskrétní topologie tvoří největší prvek a indiskrétní nejmenší. Je-li $\{\tau_i; i \in I\} \subset T$, pak $\inf_{i \in I} \tau_i = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ a $\sup_{i \in I} \tau_i$ je topologie, jejíž subbázi je systém $\bigcup_{i \in I} \tau_i$.
- (b) Topologie τ je větší než σ , právě když identické zobrazení $\text{Id}: (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ je spojitě.
- (c) Ať $\{\tau_i; i \in I\}$ (resp. $\{\sigma_i; i \in I\}$) je soubor topologií na množině X (respektive Y) a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazení. Je-li $f: (X, \tau_i) \rightarrow (Y, \sigma_i)$ spojitě pro každé $i \in I$, pak i zobrazení $f: (X, \sup_I \tau_i) \rightarrow (Y, \sup_I \sigma_i)$ a $f: (X, \inf_I \tau_i) \rightarrow (Y, \inf_I \sigma_i)$ jsou spojitá.

Důkaz. (a) Systém $(T, \leq)$ je zjevně částečně uspořádaná množina, kde diskrétní topologie je největší a indiskrétní topologie nejmenší prvek. Mějme systém topologií $\{\tau_i; i \in I\}$ v T . Pak systém množin $\tau = \bigcap_{i \in I} \tau_i$ splňuje požadavky z Definice 1.1, a tedy se jedná o prvek z T . Je-li nyní $\lambda \in T$ splňující $\lambda \leq \tau_i$, $i \in I$, pak $\lambda \leq \tau$. Tedy $\tau = \inf_{i \in I} \tau_i$.

Pro odvození rovnosti pro supremum označme σ topologii, jejíž subbáze je dána systémem $\bigcup_{i \in I} \tau_i$ (ten zjevně splňuje požadavek Důsledku 1.6). Pak $\tau_i \leq \sigma$ pro každé $i \in I$. Dále nechť $\lambda \in T$ splňuje $\lambda \geq \tau_i$, $i \in I$. Nechť $U \in \sigma$ a $x \in U$. Pak existuje konečně mnoho množin $U_1, \dots, U_n \in \bigcup_{i \in I} \tau_i$ takové, že $x \in \bigcap_{j=1}^n U_j \subset U$. Pak $U_1, \dots, U_n \in \lambda$, takže $\bigcap_{j=1}^n U_j \in \lambda$, a U je tak v λ . Proto $\sigma \leq \lambda$, což znamená, že $\sigma = \sup_{i \in I} \tau_i$.

(b) Je-li $\tau \supset \sigma$, je zjevně identické zobrazení spojitě. Obráceně, pokud $i: (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ je spojitě a $U \in \sigma$, pak $U = i^{-1}(U) \in \tau$. Tedy $\sigma \subset \tau$.

(c) Nechť V je množina ze subbáze $\sup_{i \in I} \sigma_i$, tedy $V \in \sigma_i$ pro nějaké $i \in I$. Pak $f^{-1}(V) \in \tau_i$, což dle (a) znamená, že $f^{-1}(V) \in \sup_{i \in I} \tau_i$. Tedy f je spojitě dle Tvrzení 1.43(ii).

Pro důkaz spojitosti f vzhledem k infimum, nechť $V \in \inf_{i \in I} \sigma_i$, tedy $V \in \bigcap_{i \in I} \sigma_i$. Pak $f^{-1}(V) \in \bigcap_{i \in I} \tau_i = \inf_{i \in I} \tau_i$. Tedy $f: (X, \inf_{i \in I} \tau_i) \rightarrow (Y, \inf_{i \in I} \sigma_i)$ je spojitě. $\square$

Poznámka 2.3

Uvést příklad, že $\bigcup_{i \in I} \tau_i$ není obecně bází topologie a je bází, pokud je $\{\tau_i\}_I$ nahoru usměrněnou množinou.

Definice 2.4. Projektivní a induktivní vytváření

Ať X je množina a $X_i, i \in I$, je soubor topologických prostorů.

- (a) Topologie τ na množině X se nazývá *projektivně vytvořená* souborem $f_i: X \rightarrow X_i, i \in I$, pokud τ je nejmenší topologie při níž jsou všechna zobrazení $f_i: (X, \tau) \rightarrow X_i$ spojitá.
- (b) Topologie τ na množině X se nazývá *induktivně vytvořená* souborem $f_i: X_i \rightarrow X, i \in I$, pokud τ je největší topologie při níž jsou všechna zobrazení $f_i: X_i \rightarrow (X, \tau)$ spojitá.

□

Termíny: kromě dalších termínů iniciální a finální topologie ještě existují termíny slabá a silná topologie (z funkcionálky). Není mi jasné, které termíny jsou významově nejlepší. Asi je vhodné v poznámce tyto další termíny uvést.

Tvrzení 2.5

Nechť je X množina a $X_i, i \in I$, je soubor topologických prostorů.

- (a) Je-li $\{f_i: X \rightarrow X_i; i \in I\}$ soubor zobrazení, pak existuje právě jedna topologie τ na X projektivně vytvořená tímto souborem.
- (b) Je-li $\{f_i: X_i \rightarrow X; i \in I\}$ soubor zobrazení, pak existuje právě jedna topologie τ na X induktivně vytvořená tímto souborem.

Důkaz. (a) Nechť $(T, \leq)$ značí systém všech topologií na X s uspořádáním. Nechť

$$F = \{\tau \in T; f_i: (X, \tau) \rightarrow X_i \text{ spojité pro každé } i \in I\}.$$

Uvažujeme-li na X diskrétní topologii τ_d , jsou všechna zobrazení f_i spojitá, tedy $\tau_d \in F$ a F je neprázdná. Nechť $\sigma = \inf F \in T$. Pak dle Tvrzení 2.2(c) je $\sigma \in F$.

Vskutku, pro $i \in I$ a $\tau \in F$ je $f_i: (X, \tau) \rightarrow X_i$ spojitá, tedy dle Tvrzení 2.2(c) je $f_i: (X, \sigma) \rightarrow X_i$ spojitá též. Proto $\sigma \in F$ je ona projektivně vytvořená topologie.

(b) Nechť

$$F = \{\tau \in T; f_i: X_i \rightarrow (X, \tau) \text{ spojité pro každé } i \in I\}.$$

Uvažujeme-li na X indiskrétní topologii τ_{ind} , jsou všechna zobrazení f_i spojitá, tedy $\tau_{ind} \in F$ a F je neprázdná. Nechť $\sigma = \sup F \in T$. Pak dle Tvrzení 2.2(c) je $\sigma \in F$.

Vskutku, pro $i \in I$ a $\tau \in F$ je $f_i: X_i \rightarrow (X, \tau)$ spojitá, tedy dle Tvrzení 2.2(c) je $f_i: X_i \rightarrow (X, \sigma)$ spojitá také. Proto $\sigma \in F$ je hledaná induktivně vytvořená topologie. □

Poznámka 2.6

Je-li topologie τ na X projektivně vytvořena souborem $f_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i), i \in I$, říkáme, že soubor $\{f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ je projektivně vytvářející. Budeme používat i pojem, že prostor (X, τ) je projektivně vytvořený souborem $f_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i), i \in I$, nebo, že prostor (X, τ) je projektivně vytvořený souborem prostorů $(X_i, \tau_i), i \in I$, jestliže existují zobrazení $f_i: X \rightarrow X_i$ tak, že (X, τ) je projektivně vytvořený souborem $f_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i), i \in I$. Náleží-li prostory X_i do nějaké třídy prostorů $\mathcal{A}$, říkáme, že τ nebo (X, τ) jsou projektivně vytvořeny prostory z $\mathcal{A}$. Podobně používáme uvedené modifikace pro induktivní vytváření.

Příklady 2.7

1. Každý indiskrétní prostor je projektivně vytvořen prázdným souborem zobrazení, každý diskrétní prostor je induktivně vytvořen prázdným souborem zobrazení.
2. Každý diskrétní prostor (X, τ_d) je induktivně vytvořen souborem $\{f_x: \{x\} \rightarrow X; x \in X\}$ konstantních zobrazení, které posílají jednobodový diskrétní prostor $\{x\}$ na $x \in X$.
3. Následující výroky jsou pro bijekci $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ mezi topologickými prostory ekvivalentní.
 - (i) Zobrazení $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ je homeomorfismus.
 - (ii) Prostor (X, τ) projektivně vytvořen zobrazením $f: X \rightarrow (Y, \sigma)$.
 - (iii) Prostor (Y, σ) je induktivně vytvořen zobrazením $f: (X, \tau) \rightarrow Y$.

4. Infimum topologií τ_i , $i \in I$, na množině X je projektivně vytvořeno souborem $\{\text{Id}: X \rightarrow (X, \tau_i)\}_{i \in I}$. Podobně je supremum těchto topologií vytvořeno induktivně pomocí souboru $\{\text{Id}: (X, \tau_i) \rightarrow X\}_{i \in I}$.
5. Každý topologický prostor je projektivně vytvořen zobrazeními do Sierpiňského prostoru.
6. Každý topologický prostor je induktivně vytvořen zobrazeními z prostorů určených filtrem.
7. Nechť $\mathcal{F}$ je filtr na množině X a $x_0 \in X$. Nechť $(X, x_0, \mathcal{F})$ je topologický prostor určený těmito objekty dle Příkladu 1.12.6. Pak $(X, x_0, \mathcal{F})$ je induktivně vytvořen zobrazeními z prostorů určených ultrafiltrem. $\square$

Důkaz. 1. Je-li X množina, pak pro prázdný soubor zobrazení je vskutku indiskrétní topologie nejhrubší topologie, ve které jsou všechna zobrazení z tohoto souboru spojitá. Podobně je diskrétní topologie nejjemnější topologie, pro které jsou všechna zobrazení z prázdného souboru spojitá.

2. Diskrétní topologie τ_d je největší prvek ve svazu topologií na X a v této topologii je každé zobrazení f_x spojitě. To znamená, že τ_d je induktivně vytvářena tímto souborem.

3. (i) $\implies$ (ii): Nechť F značí ty topologie λ na X , ve kterých je zobrazení $f: (X, \lambda) \rightarrow (Y, \sigma)$ spojitě. Pak $\tau \in F$. Nechť $\lambda \in F$ je dáno. Pak pro $U \in \tau$ platí $U = f^{-1}(f(U)) \in \lambda$. Tedy $\tau = \inf F$ je projektivně vytvářena zobrazeními $f: X \rightarrow (Y, \sigma)$.

(ii) $\implies$ (i): Zjevně je $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ spojitě. Pak $\lambda = \{f^{-1}(V); V \in \sigma\}$ je topologie na X , v níž je zobrazení $f: (X, \lambda) \rightarrow (Y, \sigma)$ spojitě. Tedy $\tau \subset \lambda$. Pokud tedy $U \in \tau$ je dáno, pak existuje $V \in \sigma$ takové, že $U = f^{-1}(V)$. Tedy $V = f(U) \in \sigma$, což znamená, že f^{-1} je spojitě zobrazení. Tedy f je homeomorfismus.

(i) $\implies$ (iii): Nechť F značí ty topologie λ na Y , ve kterých je zobrazení $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \lambda)$ spojitě. Pak $\sigma \in F$. Nechť $\lambda \in F$ je dáno. Pak pro $V \in \lambda$ platí $f^{-1}(V) \in \tau$, a tak $V = f(f^{-1}(V)) \in \sigma$. Tedy $\sigma = \sup F$ je induktivně vytvářena zobrazeními $f: (X, \tau) \rightarrow Y$.

(iii) $\implies$ (i): Zjevně je $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ spojitě. Pak $\lambda = \{f(U); U \in \tau\}$ je topologie na Y , v níž je zobrazení $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \lambda)$ spojitě. Tedy $\lambda \subset \sigma$. Pokud tedy $U \in \tau$ je dáno, pak $f(U) \in \lambda \subset \sigma$, což znamená, že $f^{-1}: (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ je spojitě zobrazení. Tedy f je homeomorfismus.

4. Nechť τ_i , $i \in I$, jsou topologie na X a τ je jejich infimum. Nechť σ je projektivně vytvořená topologie pomocí zobrazení $\text{Id}_i = \text{Id}: X \rightarrow (X, \tau_i)$, $i \in I$. Protože jsou všechna zobrazení $\text{Id}: (X, \tau_i) \rightarrow (X, \tau_i)$ spojitá, je dle Tvzení 2.2 spojitě i zobrazení $\text{Id}: (X, \tau) \rightarrow (X, \tau_i)$, $i \in I$. Tedy $\sigma \subset \tau$ z definice projektivní topologie.

Na druhou stranu, pokud $U \in \tau$ je dána, pak $U \in \tau_i$, $i \in I$, z popisu infima topologií. Tedy $U = \text{Id}^{-1}(U) \in \sigma$, neboť $\text{Id} = \text{Id}_i: (X, \sigma) \rightarrow (X, \tau_i)$ je spojitě pro každé $i \in I$. Tedy $\tau = \sigma$.

Nechť nyní τ je supremum topologií τ_i , $i \in I$, na množině X a σ je induktivně vytvořena souborem $\{\text{Id}_i = \text{Id}: (X, \tau_i) \rightarrow X\}_{i \in I}$. Jelikož je $\text{Id}: (X, \tau_i) \rightarrow (X, \tau)$ spojitá pro každé $i \in I$ dle Tvzení 2.2(c), je $\tau \subset \sigma$.

Na druhou stranu, je-li $U \in \sigma$, je $U = \text{Id}_i^{-1}(U) \in \tau_i$ pro každé $i \in I$. Tedy $U \in \bigcup_{i \in I} \tau_i \subset \tau$, takže $\sigma \subset \tau$.

5. Nechť (X, τ) je topologický prostor. Pro každou otevřenou $G \in \tau$ uvažujme zobrazení $f_G: X \rightarrow S$ (zde S je Sierpiňského prostor) definované jako

$$f_G(x) = \begin{cases} 1, & x \in G, \\ 0, & x \notin G. \end{cases}$$

Pak $\{f_G\}_{G \in \tau}$ je systém spojitých zobrazení z (X, τ) do S .

Nechť σ je projektivně generovaná tímto systémem, pak $\sigma \subset \tau$ ze spojitosti našich zobrazení. Obráceně, nechť $G \in \tau$ je libovolná. Pak $G = f_G^{-1}(\{1\}) \in \sigma$ ze spojitosti $f_G: (X, \sigma) \rightarrow S$.

6. Ať (X, τ) je topologický prostor. Pokud τ je diskrétní topologie, pak dle bodu 1. stačí uvažovat prázdný soubor zobrazení. Jinak uvažujme pro každý hromadný bod $x \in X$ systém $\mathcal{G}_x = \{U \setminus \{x\}; U \in \mathcal{U}(x)\}$. Pak $\mathcal{G}_x$ je filtr na X a prostor $(X, x, \mathcal{G}_x)$ je prostor určený filtrem $\mathcal{G}_x$ a bodem x . Uvažujme systém všech takovýchto prostorů pro hromadné body $x \in X$ a identická zobrazení $\text{Id}: (X, x, \mathcal{G}_x) \rightarrow X$ a nechť σ je induktivně vytvořena tímto systémem.

Příslušná zobrazení $\text{Id}: (X, x, \mathcal{G}_x) \rightarrow (X, \tau)$ jsou spojitá. Vskutku, je-li $x \in X$ hromadný bod a $U \in \tau$, pak U je otevřená v $(X, x, \mathcal{G}_x)$, neboť body $X \setminus \{x\}$ jsou izolované, a je-li $x \in U$, máme $U \setminus \{x\} \in \mathcal{G}_x$, tj. $U = \{x\} \cup (U \setminus \{x\})$ je otevřená množina v $(X, x, \mathcal{G}_x)$. Tedy $\tau \subset \sigma$ z definice induktivní topologie.

Naopak, je-li $U \in \sigma$ a $x \in U$ je daný bod, nalezneme $V \in \mathcal{U}_\tau(x)$ splňující $x \in V \subset U$. Pokud x je izolovaný v (X, τ) , je $V = \{x\}$ naše hledaná množina. Pokud ne, je $\text{Id}: (X, x, \mathcal{G}_x) \rightarrow (X, \sigma)$ spojitě zobrazení, takže U je otevřená v $(X, x, \mathcal{G}_x)$. Tedy existuje $W \in \mathcal{G}_x$ splňující $x \in \{x\} \cup W \subset U$. Vzhledem k definici $\mathcal{G}_x$ máme požadovanou množinu, položíme-li $V = \{x\} \cup W$.

7. Nechť $(X, x_0, \mathcal{F})$ je topologický prostor příslušný bodu $x_0 \in X$ a filtru $\mathcal{F}$ na X . Uvažujme prostory $(X, x_0, \mathcal{U})$, kde $\mathcal{U}$ je ultrafiltr obsahující $\mathcal{F}$ spolu s identickými zobrazeními $\text{Id}: (X, x_0, \mathcal{U}) \rightarrow (X, x_0, \mathcal{F})$. Nechť σ je topologie na X induktivně vytvořená těmito zobrazeními a τ je topologie prostoru $(X, x_0, \mathcal{F})$.

Jelikož $\mathcal{U} \supset \mathcal{F}$, jsou všechna zobrazení $\text{Id}: (X, x_0, \mathcal{U}) \rightarrow (X, x_0, \mathcal{F})$ spojitá, takže $\tau \subset \sigma$. Nechť $U \in \sigma$ a $x \in U$. Hledáme $V \in \tau$ splňující $x \in V \subset U$. Je-li $x \in U$ τ -izolovaný, stačí položit $V = \{x\}$. V opačném případě je $x = x_0$. Pokud $F \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$ pro každé $F \in \mathcal{F}$, je $\mathcal{F} \cup (X \setminus U)$ báze nějakého filtru, a tedy i ultrafiltru $\mathcal{U}$. Ze spojitosti $\text{Id}: (X, x_0, \mathcal{U}) \rightarrow (X, x_0, \tau)$ plyne existence množiny $H \in \mathcal{U}$ splňující $H \subset U$. Pak ovšem i $U \in \mathcal{U}$, což je spor s faktem $X \setminus U \in \mathcal{U}$. Tedy existuje $F \in \mathcal{F}$ s vlastností $F \subset U$. Pak ovšem $V = \{x_0\} \cup F$ je hledané okolí bodu x_0 . Tím je důkaz dokončen. $\square$

Poznámka 2.8

Brzy dokážeme, že prostor je úplně regulární, právě když je projektivně vytvořen zobrazeními do $[0, 1]$ a prostor je nuldimenzionální, právě když je projektivně vytvořen zobrazeními do prostoru 2.

Projektivně a induktivně vytvořené topologie se dají snadno popsat pomocí výše uvedených svazových operací. Důkaz následujícího tvrzení je přímou aplikací Definice 2.4. Zřejmě je možné všude psát „uzavřené“ místo „otevřené“.

[Další popisy pomocí okolí, uzávěru nebo konvergence dáme kam? Cvičení?](#)

Tvrzení 2.9. Popis projektivně a induktivně vytvořených topologií

- (a) *Ať X je množina a $f_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i)$, $i \in I$, je soubor zobrazení. Nechť τ je topologie na X . Pak τ je projektivně vytvořena systémem $f_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i)$, $i \in I$, právě když $\{f_i^{-1}(G); i \in I, G \in \tau_i\}$ je subbáze topologie τ .*
- (b) *Ať X je množina a $f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow X$, $i \in I$, je soubor zobrazení. Nechť τ je topologie na X . Pak τ je induktivně vytvořena systémem $f_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i)$, $i \in I$, právě když $\tau = \{G \subset X; f_i^{-1}(G) \in \tau_i \text{ pro každé } i \in I\}$.*

Důkaz. (a) $\implies$: Nechť τ je projektivně vytvořena daným systémem a σ je topologie daná subbází $\{f_i^{-1}(G); i \in I, G \in \tau_i\}$. Pak pro každé $i \in I$ je zobrazení $f_i: (X, \sigma) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ spojitá, a tedy $\tau \subset \sigma$. Na druhou stranu, každá množina $f_i^{-1}(G)$, $G \in \tau_i$, $i \in I$, leží v τ , jelikož každé zobrazení $f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ je též spojitá. Tedy subbáze σ je obsažena v τ , což implikuje $\sigma \subset \tau$.

$\impliedby$: Nechť je systém $\mathcal{B} = \{f_i^{-1}(G); i \in I, G \in \tau_i\}$ subbází topologie τ a nechť σ je projektivně vytvořená topologie. Dle první implikace je systém $\mathcal{B}$ též subbáze σ . Tedy $\tau = \sigma$.

(b) Je snadné vidět, že

$$\sigma = \{G \subset X; f_i^{-1}(G) \in \tau_i \text{ pro každé } i \in I\}$$

je topologie.

$\implies$: Nechť τ je induktivně vytvořena daným systémem. Protože jsou všechna zobrazení $f_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow (X, \sigma)$, $i \in I$, spojitá, je $\sigma \subset \tau$. Na stranu druhou, je-li $G \in \tau$, je $f_i^{-1}(G) \in \tau_i$, $i \in I$, takže $G \in \sigma$. Proto $\sigma = \tau$.

$\impliedby$: Nechť λ je induktivně vytvořená topologie. Dle první implikace je $\lambda = \sigma$. Z předpokladu máme $\tau = \sigma$. Tedy $\tau = \lambda$ je induktivně vytvořena. $\square$

Je vidět, že popis pomocí otevřených nebo uzavřených množin je jednodušší pro induktivní vytváření než pro projektivní. Naopak, popis pomocí konvergence je jednoduchý pro projektivní vytváření (vizte následující fakt) a skoro nepoužitelný pro induktivní vytváření.

Fakt 2.10

Ať prostor (X, τ) je projektivně vytvořený souborem $f_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i)$, $i \in I$. Pak usměrněný soubor $\{x_a\}$ konverguje k x v X , právě když každý soubor $\{f_i(x_a)\}$ konverguje k $f_i(x)$ v X_i .

Důkaz. Implikace $\implies$ plyne ze spojitosti zobrazení f_i a Tvrzení 1.43.

Implikace $\impliedby$ se ověří takto: Nechť $x \in X$ a $\{x_a\}_{a \in A}$ je usměrněný soubor takový, že $f_i(x_a) \rightarrow f_i(x)$ pro každé $i \in I$. Je-li U otevřená množina obsahující x , dle Tvrzení 2.9 existuje $J \subset I$ konečná a množiny $U_j \in \tau_j$ takové, že $x \in \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \subset U$. Nalezneme $a_0 \in A$ splňující $f_j(x_a) \in U_j$ pro každé $a \geq a_0$ a $j \in J$. Pak pro $a \geq a_0$ platí

$$x_a \in \bigcap_{j \in J} f_j^{-1}(U_j) \subset U.$$

Tedy $x_a \rightarrow x$ v τ . $\square$

Z právě uvedených popisů snadno vyplýne následující charakterizace (analogické tvrzení platí i pro induktní vytváření).

Věta 2.11. Charakterizace spojitosti do projektivně vytvořeného prostoru

Ať prostor (X, τ) je projektivně vytvořen souborem zobrazení $f_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i)$, $i \in I$. Zobrazení $g: (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ je spojitě, právě když pro každé $i \in I$ je zobrazení $f_i \circ g: (Y, \sigma) \rightarrow (X_i, \tau_i)$ spojitě.

Důkaz. Označme $\mathcal{S}$ subbázi topologie τ z Tvrzení 2.9(a). Zobrazení $g: (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ je spojitě, právě když pro každý prvek $H \in \mathcal{S}$ je $g^{-1}(H)$ otevřená množina v (Y, σ) , tj. pro každé $i \in I$ a každou otevřenou množinu $G \in \mathcal{S}_i$ je $g^{-1}(f_i^{-1}(G))$ otevřená množina v (Y, σ) , což platí právě když $f_i \circ g$ je spojitě pro každé $i \in I$. $\square$

Možné poznámky nebo cvičení: Platí i opačné tvrzení: Ať $\{f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)\}_I$ je soubor spojitých zobrazení a platí, že libovolné zobrazení $g: (Y, \sigma) \rightarrow (X, \tau)$ je spojitě, právě když všechna složení $f_i \circ g$ jsou spojitá. Pak soubor $\{f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)\}_I$ je projektivně vytvářející.

Projektivní a induktní vytváření jsou asociativní v následujícím smyslu, např. pro projektivní vytváření: Jsou-li soubory $\{f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)\}_I$ a $\{f_{i,j}: (X_i, \tau_i) \rightarrow (X_{i,j}, \tau_{i,j})\}_{j \in J_i, i \in I}$ projektivně vytvářející je i soubor $\{f_{i,j} \circ f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_{i,j}, \tau_{i,j}); i \in I, j \in J_i\}$ projektivně vytvářející.

Existuje i silnější obrácené tvrzení: Je-li $\{f_{i,j} \circ f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_{i,j}, \tau_{i,j}); i \in I, j \in J_i\}$ projektivně vytvářející, je i $\{f_i: (X, \tau) \rightarrow (X_i, \tau_i)\}_I$ projektivně vytvářející.

2.2 Podprostor a součin

Použijeme nyní projektivní vytváření na nejdůležitější speciální případy, podprostor a součin. Pro součin a příbuzné pojmy v množinách viz Úvodní kapitolu.

Definice 2.12. Podprostor a součin

1. Ať (X, τ) je topologický prostor a $A \subset X$. Prostor (A, σ) se nazývá *podprostorem* prostoru (X, τ) , pokud topologie σ na A je projektivně vytvořená zobrazením inkluze $j: A \rightarrow (X, \tau)$ (tj. identickým zobrazením A do X). Topologie σ se nazývá zúžení (restrikce) topologie τ na A a značí se $\sigma = \tau \upharpoonright A$ nebo $\sigma = \tau_A$.
2. Jsou-li $(X_i, \tau_i), i \in I$, topologické prostory, pak jejich *součin* je topologický prostor (X, τ) , kde $X = \prod X_i$ a topologie τ je projektivně vytvořená projekcemi $\pi_i: X \rightarrow (X_i, \tau_i)$. Značí se $\prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$.
3. Zobrazení $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ se nazývá *vnoření*, pokud f je prosté a topologie τ je projektivně vytvořená zobrazením f . $\square$

Fakt 2.13

- (a) Množina U v podprostoru A prostoru (X, τ) je otevřená (resp. uzavřená), právě když existuje otevřená (resp. uzavřená) množina V v X taková, že $U = A \cap V$.
- (b) $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ je vnoření, právě když zúžení $f: X \rightarrow f(X)$ je homeomorfismus prostoru X na podprostor $f(X) \subset Y$.
- (c) Je-li X podprostorem Y a Y podprostorem Z , je X podprostorem Z .
- (d) Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je spojitě, právě když je spojitě jako zobrazení do podprostoru $f(X)$ prostoru Y .

Důkaz. (a) Necht $\lambda = \{U \cap A; U \in \tau\}$. Pak je λ zřejmě topologie na A , přičemž je tento systém dle Tvrzení 2.9 subbáze topologie podprostoru σ . Tedy $\lambda \subset \sigma$. Je-li nyní $V \in \sigma$, existuje systém $\mathcal{V} \subset \mathcal{P}(A)$ takový, že $V = \bigcup \mathcal{V}$ a každá množina z $\mathcal{V}$ je průnikem konečně mnoha prvků z λ . Jelikož je λ topologie, je každá množina z $\mathcal{V}$ elementem λ , a tedy i V je elementem λ . Proto je V tvaru $U \cap A$ pro nějaké $U \in \tau$.

Tvrzení o uzavřených množinách snadno plyne přechodem ke komplementům.

(b) $\implies$: Necht $f: X \rightarrow Y$ je vnoření a λ je topologie podprostoru na množině $f(X) \subset Y$. Z Tvrzení 2.9 plyne, že $\{f^{-1}(V); V \in \sigma\}$ je subbáze topologie τ . Je-li tedy $W \in \lambda$, je $W = V \cap f(X)$ pro nějaké $V \in \sigma$. Pak $f^{-1}(W) = f^{-1}(V) \in \tau$, takže f je spojitě.

K ověření spojitosti $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ stačí ukázat, že $f(U) \in \lambda$ pro každou množinu U ze subbáze τ . Ale $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X) \in \lambda$ pro $V \in \sigma$, tedy f^{-1} spojitě.

$\Leftarrow$: Necht $f: X \rightarrow f(X)$ je homeomorfismus (X, τ) na podprostor $(f(X), \lambda)$, kde λ je topologie podprostoru na $f(X)$ generovaná topologií σ . Necht ω je topologie na X projektivně generovaná $f: X \rightarrow$

(Y, σ) . Pak

$$\{f^{-1}(V); V \in \sigma\} = \{f^{-1}(V \cap f(X)); V \in \sigma\} = \{f^{-1}(W); W \in \lambda\}$$

je subbáze ω dle Tvrzení 2.9(a). Jelikož je tento systém v τ díky spojitosti f , je $\omega \subset \tau$.

Obráceně, je-li $U \in \tau$, pak $f(U) \in \lambda$, takže $U = f^{-1}(f(U)) \in \omega$. Tedy $\tau = \omega$.

(c) Tvrzení snadno plyne z popisu topologie podprostoru dané (a).

(d) Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ spojitě, právě když $f^{-1}(V) \in \tau$ pro každou $V \in \sigma$. Jelikož $f^{-1}(V) = f^{-1}(V \cap f(X))$, je tato vlastnost ekvivalentní spojitosti f do podprostoru $f(X)$ díky popisy z tvrzení (a). $\square$

Z Tvrzení 2.9(a) plynou následující popisy topologií podprostoru a součinů.

Tvrzení 2.14. Popis subbáze a báze součinu

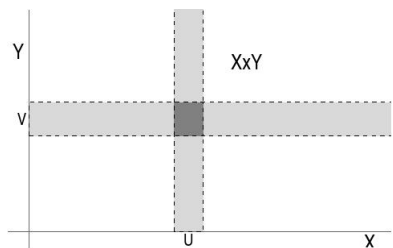
Soustava $\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(U); i \in I, U \in \tau_i\}$ je otevřená subbáze součinu $\prod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$. Odvozená báze $\mathcal{B}$ na součinu pak vypadá následovně:

$$\mathcal{B} = \{\pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n); i_1, \dots, i_n \in I, U_1 \in \tau_{i_1}, \dots, U_n \in \tau_{i_n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Příklad 2.15

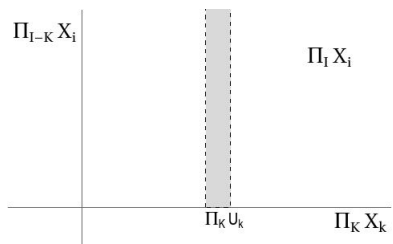
Součin indiskrétních prostorů je indiskrétní, součin nekonečně mnoha aspoň dvoubodových diskrétních prostorů není diskrétní a navíc nemá žádný izolovaný bod. $\square$

Topologie na součinu je poměrně složitá a otevřené množiny si těžko představíme. Pro ilustraci uvedeme několik zjednodušených obrázků prvků otevřené báze součinu. Jednoduchý případ je součin konečně mnoha prostorů a každý si dovede představit otevřenou bázi v euklidovských prostorech (vnitřky kvádrů).



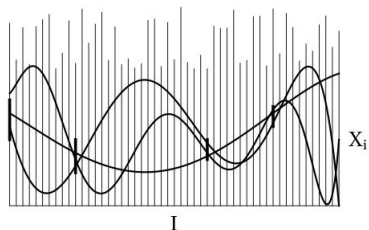
V případě součinu prostorů X a Y vezmeme otevřené množiny U v X a V v Y a jejich součin (tj. průnik vzorů $\pi_X^{-1}(U) \cap \pi_Y^{-1}(V)$) je typickým prvkem výše uvedené otevřené báze v součinu $X \times Y$. Graficky je to průnik dvou šedých pásů na obrázku

V součinu nekonečně mnoha prostorů už musíme mít větší představivost.



Součin $\prod_I X_i$ si znázorníme jako součin dvou prostorů, a to $\prod_K X_k \times \prod_{I \setminus K} X_i$, kde K je konečná podmnožina I . Vezmeme otevřené množiny U_k v X_k pro $k \in K$ a jejich součin (tj. báze otevřené množiny v $\prod_K X_k$). Vzor této množiny v uvedeném součinu $\prod_K X_k \times \prod_{I \setminus K} X_i$ je typický prvek otevřené báze v součinu $\prod_I X_i$. Graficky je to šedý pás na obrázku.

Prvky součinu nekonečně mnoha prostorů si lze představit jako zobrazení na indexové množině I , které mají v bodě i hodnotu v X_i . Následující obrázek se pokouší tuto představu vyvolat. Vodorovná úsečka dole je množina I , kolmice na ni jsou prostory X_i a uvedené tři grafy jsou tři prvky součinu $\prod_I X_i$.



V našem případě má zvolená konečná množina K čtyři prvky – to jsou ty body z I , kde jsou na kolmicích v nich zdůrazněné menší úsečky, což jsou otevřené množiny U_k v X_k . Báze otevřené množiny tvoří všechna zobrazení, která procházejí oněmi zdůrazněnými úsečkami.

Další popisy pomocí okolí, uzávěru nebo konvergence (cvičení, poznámky?). Zvláště konvergence usměrněných souborů v součinové topologii je přímočará: usměrněný soubor $(x_j)_{j \in J}$ konverguje k x , právě když pro každé $i \in I$ konverguje soubor $(x_j(i))_{j \in J}$ k $x(i)$ (vizte Fakt 2.10). Tedy součinná topologie odpovídá bodové konvergenci. Proto se součinná topologie někdy nazývá topologií bodové konvergence.

Z obecných tvrzení v předchozí sekci nebo z právě uvedeného popisu topologie součinu dostáváme pro součin topologických prostorů následující první dvě vlastnosti. Další dvě vlastnosti plynou z vlastnosti 1.

Tvrzení 2.16. Vlastnosti součinu vyplývající z vlastností projektivního vytváření

- (a) Zobrazení $f: Z \rightarrow \prod_I X_i$ je spojité, právě když jsou spojitá všechna složení f s projekcemi $\pi_i: X \rightarrow X_i$.
 (b) Je-li každý prostor X_i součinem prostorů $X_{i,j}, j \in J_i$, je zobrazení $p: \prod_I X_i \rightarrow \prod \{X_{i,j}; i \in I, j \in J_i\}$ definované jako

$$p(\{x_i\}_{i \in I}) = p(\{\{x_{i,j}\}_{j \in J_i}\}_{i \in I}) = \{x_{i,j}\}_{i \in I, j \in J_i}$$

homeomorfismus těchto prostorů.

- (c) Jsou-li $f_i: Y_i \rightarrow X_i$ spojitá zobrazení, je i jejich součin $\prod_I f_i: \prod_I Y_i \rightarrow \prod_I X_i$ spojitý.
 (d) Je-li v předchozí poloze $Y_i = Y$ pro každé $i \in I$, je diagonální součin $\Delta_I f_i: Y \rightarrow \prod_I X_i$ spojitý.

Důkaz. (a) Vzhledem k tomu, že projekce $\pi_i: \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ jsou spojité, je složené zobrazení $\pi_i \circ f$ spojité, pokud f je spojité.

Pokud jsou všechna zobrazení $\pi_i \circ f, i \in I$, spojitá a $U = \pi^{-1}(U_i)$, kde $i \in I$ a $U_i \in \tau_i$, pak $f^{-1}(U) = (\pi_i \circ f)^{-1}(U_i)$ je otevřená v $\prod_{j \in I} X_j$. Dle Tvrzení 2.14 a 1.43(ii) je f spojité.

(b) Pro ověření spojitosti p si stačí rozmyslet, že $p_{i,j} \circ p = p_j \circ p_i \circ p$ je spojité pro každé $i \in I$ a $j \in J_i$ (zde $p_j: X_i = \prod_{k \in J_i} X_{i,k} \rightarrow X_{i,j}$ a $p_i: \prod_{l \in I} X_l \rightarrow X_i$ jsou kanonické projekce). K ověření spojitosti inverze je třeba zjistit, že zobrazení

$$\{x_{i,j}\}_{i \in I, j \in J_i} \in \prod \{X_{i,j}; i \in I, j \in J_i\} \mapsto x_i = \{x_{i,j}\}_{j \in J_i} \in X_i = \prod_{k \in J_i} X_{i,k}$$

je spojité. To však opět plyne z tvrzení (a).

(c) Opět použijeme (a). Pro každé $i \in I$ necht π_i^X a π_i^Y jsou kanonické projekce na příslušných součinech. Pak $\pi_i^X \circ \prod_{j \in I} f_j = f_i \circ \pi_i^Y$, což je spojité zobrazení. Dle (a) je i $\prod_{i \in I} f_i$ spojité zobrazení.

(d) Je-li pro $i \in I$ zobrazení π_i^X projekce $\prod_{j \in I} X_j$ na X_i , pak $\pi_i \circ \Delta_{j \in I} f_j = f_i$. Tedy $\Delta_{i \in I} f_i$ je spojité zobrazení dle (a). □

Poslední vlastnost (d) má důležitý důsledek: Je-li nějaká n -ární operace φ na prostoru Z spojitá (tj. $\varphi: Z^n \rightarrow Z$ je spojité zobrazení) a $f_1, \dots, f_n$ jsou spojitá zobrazení $X \rightarrow Z$ pak i výsledek operace φ na $\{f_1, \dots, f_n\}$ (tj. $\varphi(\{f_i\})(x) = \varphi(\{f_i(x)\})$) je spojitým zobrazením $X \rightarrow Z$. Protože na $\mathbb{R}$ jsou operace sčítání, násobení, převrácená hodnota na nenulových číslech a absolutní hodnota spojité, dostáváme následující tvrzení.

Důsledek 2.17. Algebraické operace spojitých zobrazení

Jsou-li $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ spojitá zobrazení, pak $f + g, f - g, f \cdot g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, |f|$ jsou spojitá. Pokud g je nenulové, pak také $\frac{f}{g}$ je spojité.

Příklad 2.18. Bodová konvergence funkcí

Na množině $C([0, 1])$ všech spojitých funkcí definujme topologii podprostoru zděděnou ze součinu $\mathbb{R}^{[0, 1]}$, takže posloupnost funkcí f_n konverguje k funkci f v dané topologii, právě když konverguje k f bodově. Prostor $C([0, 1])$ s topologií bodové konvergence (často se značí $C_p([0, 1])$, kde „p“ znamená „pointwise“) není metrizovatelný prostor, neboť v žádném bodě nemá spočetný charakter. Opravdu, mějme libovolnou spojitou funkci $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a předpokládejme, že má spočetnou bázi okolí $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Podle popisu báze součinu existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ konečná množina $K_n \subset [0, 1]$ a kladné číslo ε_n tak, že každá funkce, která se v bodech z K_n liší od f o méně než ε_n , náleží do U_n . Sjednocení $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ je spočetné, takže existuje bod $x_0 \in [0, 1] \setminus \bigcup K_n$. Potom $U = \{g \in C([0, 1]); |g(x_0) - f(x_0)| < 1\}$ je okolí funkce f , a musí tedy obsahovat nějaké výše uvedené okolí vytvořené pomocí K_n a ε_n . To však není možné, protože existuje spojitá funkce (např. polynom) rovnající se funkci f na K_n a mající hodnotu $f(x_0) + 2$ v bodě x_0 , a tedy neleží v množině U . □

Jednoduchá modifikace předchozího důkazu dává více: charakter $C_p(X)$ pro nekonečný Tichonovův prostor X je roven $|X|$.

Podprostory a součiny jsme definovali jako speciální případy projektivního vytváření. Následující důležité tvrzení ukazuje, že platí částečný opak.

Věta 2.19. Projektivní vytváření pomocí součinu

Ať (X, τ) , (X_i, τ_i) , $i \in I$, jsou topologické prostory. Pak soubor $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ je projektivně vytvářející, právě když je diagonální součin $\Delta_{i \in I} f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ projektivně vytvářející.

Důkaz. Důkaz plyne ihned z popisu topologií na součinu a na projektivně vytvořeném prostoru (Tvzení 2.9(a)).

$\Rightarrow$: Je-li daný soubor projektivně vytvářející, tvoří systém $\{f_i^{-1}(G_i); i \in I, G_i \in \tau_i\}$ subbázi topologie τ . Nechť σ je topologie na X projektivně vytvořená zobrazením $f = \Delta_{i \in I} f_i$. Jelikož je f spojitý, je $\sigma \subset \tau$. Je-li $G_i \in \tau_i$, máme $f^{-1}(\pi_i^{-1}(G_i)) = f_i^{-1}(G_i)$. Tedy subbáze τ je obsažena v σ , takže $\tau \subset \sigma$.

$\Leftarrow$: Vytváří-li $f = \Delta_{i \in I} f_i$ projektivně topologii τ a σ je topologie projektivně vytvořená systémem $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$, pak τ má za subbázi systém $\mathcal{S}_\tau = \{f^{-1}(G); G \subset \prod_{i \in I} X_i \text{ otevřená}\}$, zatímco σ má za subbázi systém $\mathcal{S}_\sigma = \{f_i^{-1}(G_i); i \in I, G_i \in \tau_i\}$. Jako výše vidíme, že $\mathcal{S}_\sigma \subset \mathcal{S}_\tau$. Tedy $\sigma \subset \tau$. Na druhou stranu, nechť $U \in \tau$ a $x \in U$ jsou dány. Nalezneme $G_1, \dots, G_n \subset \prod_{i \in I} X_i$ otevřené splňující $x \in f^{-1}(G_1 \cap \dots \cap G_n) \subset U$. Pak $f(x) \in G_1 \cap \dots \cap G_n$, takže existují $i_1, \dots, i_m \in I$ a $V_{i_1} \in \tau_{i_1}, \dots, V_{i_m} \in \tau_{i_m}$ takové, že

$$f(x) \in \pi_{i_1}^{-1}(V_{i_1}) \cap \dots \cap \pi_{i_m}^{-1}(V_{i_m}) \subset G_1 \cap \dots \cap G_n.$$

Pak

$$f_{i_1}^{-1}(V_{i_1}), \dots, f_{i_m}^{-1}(V_{i_m}) \in \mathcal{S}_\sigma$$

a jejich průnik splňuje

$$x \in \bigcap_{l=1}^m f_{i_l}^{-1}(V_{i_l}) = \bigcap_{l=1}^m f^{-1}(\pi_{i_l}^{-1}(V_{i_l})) = f^{-1}\left(\bigcap_{l=1}^m \pi_{i_l}^{-1}(V_{i_l})\right) \subset f^{-1}(G_1 \cap \dots \cap G_n) \subset U.$$

Tedy $U \in \sigma$, takže $\tau \subset \sigma$. □

Tvrzení 2.20. Diagonální vnoření

Ať (X, τ) , (X_i, τ_i) , $i \in I$, jsou topologické prostory a soubor $\{f_i: X \rightarrow X_i\}_{i \in I}$ je projektivně vytvářející. Pokud je diagonální součin $\Delta_{i \in I} f_i: X \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ prostý, je vnořením X do $\prod_{i \in I} X_i$.

Důkaz. Je-li $\Delta_{i \in I} f_i$ prosté, jde o spojitou bijekci X na $f(X)$. Jelikož je f dle Věty 2.19 projektivně vytvářející, jedná se dle definice o vnoření. □

Dostáváme následující velmi důležitou větu. Použijeme dva nové pojmy. Ať $\mathcal{C}$ je nějaká třída zobrazení na topologickém prostoru X .

1. Řekneme, že $\mathcal{C}$ *odděluje nebo rozlišuje body* množiny X , jestliže pro každé dva různé body $x_1, x_2 \in X$ existuje $f \in \mathcal{C}$ s vlastností $f(x_1) \neq f(x_2)$.
2. Řekneme, že $\mathcal{C}$ *odděluje body a uzavřené množiny*, jestliže pro libovolnou uzavřenou množinu $F \subset X$ a bod $x \in X \setminus F$ existuje $f \in \mathcal{C}$ s vlastností $f(x) \notin f(F)$.

Důsledek 2.21. Vnoření do součinu

Ať $\mathcal{A}$ je nějaká třída topologických prostorů. Pak existuje vnoření prostoru (X, τ) do součinu prostorů z $\mathcal{A}$, jestliže třída zobrazení $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} C(X, Y)$ odděluje body i body a uzavřené množiny v X .

Důkaz. Vezmeme množinu $\mathcal{B}$ prostorů z $\mathcal{A}$, která odděluje body i body a uzavřené množiny v X . Nechť $I = \bigcup_{Y \in \mathcal{B}} C(X, Y)$ a pro $i \in I$ nechť f_i značí zobrazení i . Oddělování bodů znamená, že diagonální součin $F = \Delta_{i \in I} f_i$ je prostý. Vskutku, jsou-li $x, y \in X$ různé body, existuje $Y \in \mathcal{B}$ a $f \in C(X, Y)$ splňující $f(x) \neq f(y)$. Pak ovšem $F(x) \neq F(y)$, neboť na souřadnici i odpovídající f máme $\pi_i(F(x)) = f(x) \neq f(y) = \pi_i(F(y))$.

Oddělování bodů a uzavřených množin znamená, že X je projektivně vytvořen souborem $\bigcup_{Y \in \mathcal{B}} C(X, Y)$. Vskutku, potřebujeme ověřit, že systém $\{f_i: X \rightarrow (Y_i, \tau_i); i \in I\}$ projektivně generuje τ , tj. že systém $\mathcal{S} = \{f_i^{-1}(G_i); i \in I, G_i \in \tau_i\}$ tvoří subbázi τ . Ze spojitosti funkcí f_i máme $\mathcal{S} \subset \tau$. Nechť $U \in \tau$ spolu s bodem $x \in U$ je dána. Hledáme prvek $V \in \mathcal{S}$ splňující $x \in V \subset U$. Jelikož je $X \setminus U$ uzavřená a $x \notin X \setminus U$, dle předpokladu existuje $i \in I$ takový index, že $f_i(x) \notin \overline{f_i(X \setminus U)}$. Tedy existuje $W \in \tau_i$ otevřená splňující $f_i(x) \in W$ a $W \cap \overline{f_i(X \setminus U)} = \emptyset$. Pak $V = f_i^{-1}(W) \in \mathcal{S}$, $x \in V$ a $V \cap (X \setminus U) = \emptyset$. Tedy V je hledaný prvek z $\mathcal{S}$.

Nyní nám Věta 2.19 dává dokazované tvrzení. $\square$

Pokud je X T_1 -prostor, implikuje oddělitelnost bodů a uzavřených množin i oddělitelnost bodů a lze tedy v tomto případě předpokládat jen oddělitelnost bodů a uzavřených množin.

Příklady 2.22. Vnoření do součinu

1. Každý T_0 -prostor lze vnořit do mocniny Sierpiňského prostoru S .

Ať X je aspoň dvoubodový T_0 -prostor a $G \neq X$ otevřená neprázdná množina v X . Pak zobrazení $f: X \rightarrow S$, které zobrazí G na bod $1 \in S$ a $X \setminus G$ na $0 \in S$ je spojité. Odtud plyne, že $C(X, S)$ odděluje body i body a uzavřené množiny v X .

2. Každý T_1 -prostor lze vnořit do součinu hrubých T_1 -prostorů.

Ať X je nekonečný T_1 -prostor a $F \neq X$ je neprázdná uzavřená množina v X . Označíme $\tilde{X}$ hrubý T_1 -prostor na nosné množině X a vezmeme zobrazení $f: X \rightarrow \tilde{X}$, které zobrazí F na nějaký bod $z \in F$ a které je identické na $X \setminus F$. Toto zobrazení je spojité. Odtud plyne, že $C(X, \tilde{X})$ odděluje body a uzavřené množiny v X .

3. Každý nuldimenzionální T_0 -prostor lze vnořit do Cantorova prostoru.

Ať X je aspoň dvoubodový nuldimenzionální T_0 -prostor a $G \neq X$ je neprázdná obojetná množina v X . Pak zobrazení $f: X \rightarrow 2$, které zobrazí G na bod $0 \in 2$ a $X \setminus G$ na $1 \in 2$ je spojité. Odtud plyne, že $C(X, 2)$ odděluje body a uzavřené množiny v X .

4. Každý Tichonovův prostor lze vnořit do Tichonovova kvádrů.

Definice úplně regulárního prostoru X říká, že $C(X, [0, 1])$ odděluje body a uzavřené množiny X . Je-li navíc X T_0 , odděluje tato množina i body X . $\square$

Existují i charakterizace vlastností topologických prostorů pomocí vlastností podprostorů. Známé jsou např. charakterizace pomocí vlastností diagonály v součinu. Uvedeme jedno takové jednodušší tvrzení, ostatní budou později (např. kompaktní Hausdorffův prostor nebo uspořádatelný prostor, jehož diagonála je průnikem spočetně mnoha otevřených množin (tzv. G_δ -množina), je metrizable).

Tvrzení 2.23. Charakterizace Hausdorffova prostoru

- (a) Prostor X je Hausdorffův, právě když jeho diagonála $\Delta_X = \{(x, x) \in X \times X; x \in X\}$ je uzavřená v $X \times X$.
- (b) Prostor X je Hausdorffův, právě když pro každé dvě spojitá zobrazení $f, g: Z \rightarrow X$ je množina $\{z \in Z; f(z) = g(z)\}$ uzavřená v Z .

Důkaz. (a) Diagonála Δ_X je uzavřená v $X \times X$, právě když pro každý bod $(x, y) \in (X \times X) \setminus \Delta_X$ existuje jeho okolí $U \times V$ disjunktní s diagonálou. Pak $U \cap V = \emptyset$, tj., U a V oddělují x od y . Tedy podmínka uzavřenosti Δ_X je ekvivalentní s tím, že X je Hausdorffův.

(b) Je-li X Hausdorffův, je Δ_X uzavřená a množina $\{z \in Z; f(z) = g(z)\}$ je vzorem diagonály pro diagonální zobrazení $f \times g: x \mapsto (f(x), g(x))$. Není-li X Hausdorffův, není $\Delta_X = \{(x, y) \in X \times X; \pi_1(x, y) = \pi_2(x, y)\}$ uzavřená množina. $\square$

Často používanou aplikací předchozího tvrzení je následující věta.

Tvrzení 2.24. Rovnost zobrazení na husté množině

Je-li X Hausdorffův prostor a $f, g: Z \rightarrow X$ spojitá zobrazení rovnající se na husté podmnožině v Z , pak $f = g$.

Důkaz. Podle předchozího tvrzení je množina $\{z \in Z; f(z) = g(z)\}$ uzavřená v Z . Protože obsahuje hustou množinu, rovná se celému prostoru Z . $\square$

2.3 Kvocient a suma

Nyní se podíváme na speciální případy induktivního vytváření. Jedná se o tzv. duální přístup (obracíme šipky zobrazení v definicích a v tvrzeních) a nebudeme proto některé poznámky, tvrzení a důkazy uvádět. Navíc, induktivní vytváření se nepoužívá tak často jako projektivní. Pro pojmy kvocientu a sumy v množinách vizte Úvodní kapitulu.

Definice 2.25. Kvocient a suma

1. Surjekce $f: X \rightarrow Y$ mezi topologickými prostory se nazývá *kvocientové zobrazení* (pak Y se nazývá *kvocientem* prostoru X podle zobrazení f), pokud je induktivně vytvářející.
2. Jsou-li $(X_i, \tau_i), i \in I$, topologické prostory, pak jejich (*disjunktní*) *suma* je množina $\coprod_{i \in I} X_i$ s topologií induktivně vytvořenou zobrazeními $\iota_i: (X_i, \tau_i) \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$. Značí se $\coprod_{i \in I} (X_i, \tau_i)$. $\square$

Víme, že $\coprod_{i \in I} X_i$ je množinově roven $\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times X_i)$. Pokud jsou množiny X_i disjunktní, stačí použít $\bigcup_{i \in I} X_i$. I v obecném případě se často X_i ztotožňují s $\{i\} \times X_i$.

Z Tvzení 2.9(b) plynou následující popisy topologií kvocientu a sumy.

Fakt 2.26. Popis topologií na kvocientu a sumě

- (a) Ať $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ je zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.
 - (ai) Zobrazení f je kvocientové.
 - (aii) Množina $A \subset Y$ je otevřená v Y , právě když je $f^{-1}(A)$ otevřená v X .
- (b) Množina A je otevřená (resp. uzavřená) v sumě $\coprod_{i \in I} X_i$, právě když existují otevřené (resp. uzavřené) množiny A_i v X_i takové, že $A = \coprod_{i \in I} A_i$.

Důkaz. (a) Nechť τ je topologie na X a λ je kvocientová topologie na Y . Dle Tvzení 2.9(b) máme její popis jako $\lambda = \{A \subset Y; f^{-1}(A) \in \tau\}$. Z toho již tvrzení plyne. Je-li tedy f kvocientové, je $\lambda = \sigma$, a tedy (ai) $\implies$ (aii). Platí-li (aii), je opět $\lambda = \sigma$, tj. f je kvocient.

(b) $\implies$: Je-li $A \subset \coprod_{i \in I} X_i$ otevřená, je $A_i = \iota_i^{-1}(A) \in \tau_i$ pro každé $i \in I$. Pak $A = \coprod_{i \in I} A_i$.

$\Leftarrow$: Je-li $A = \coprod_{i \in I} A_i$ pro $A_i \in X_i$ otevřené, je A otevřená v $\coprod_{i \in I} X_i$, neboť $\iota_i^{-1}(A) = A_i$ je otevřená v X_i pro každé $i \in I$. $\square$

Jsou-li X_i v předchozí položce (b) disjunktní, je A otevřená (resp. uzavřená) v sumě $\coprod_{i \in I} X_i$, právě když $A \cap X_i$ je otevřená (resp. uzavřená) v X_i pro každé $i \in I$.

Zobrazení $\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i$ jsou vnoření na obojetnou množinu (obojetné podprostory, pokud jsou X_i disjunktní). Z toho plynou další jednoduché popisy topologie sumy, např. pomocí uzávěru, okolí nebo konvergence. Lze si také uvědomit, že pro neprázdná X_i existuje vnoření $e: \coprod_{i \in I} X_i \rightarrow I \times \prod_{i \in I} X_i$, kde I má diskretní topologii: zvolíme pevný bod $a \in \prod_{i \in I} X_i$ a potom $\pi_{\{I\}}(e(i, x_i)) = i, \pi_i(e(i, x_i)) = x_i, \pi_j(e(i, x_i)) = \pi_j(a)$ pro $j \neq i$.

Příklady 2.27. Jednoduché příklady

1. Ekvivalence $E = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{P} \times \mathbb{P})$ na $\mathbb{R}$ určuje kvocientové zobrazení $\mathbb{R}$ na dvoubodový indiskretní prostor.
2. Definujeme-li na $\mathbb{R}$ ekvivalenci mezi xEy , právě když $x - y \in \mathbb{Z}$, pak kvocientový prostor $\mathbb{R}/E = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je homeomorfní kružnici.
3. Známý je Möbiův list. Vezmeme např. obdélník v rovině s vrcholy $(0, 0), (2, 0), (2, 1), (0, 1)$ a ztotožníme každý bod $(0, a)$ s bodem $(2, 1 - a)$ pro $a \in [0, 1]$.
4. Ať X je topologický prostor. V součinu $X \times [0, 1]$ ztotožníme do bodu „horní podstavu“, tj. všechny body $(x, 1), x \in X$. Vzniklý kvocient se nazývá kužel nad X a používá se často v homotopických úlohách. $\square$

Důkaz. 1. Zjevně je $\mathbb{R}/E = \{[\mathbb{Q}], [\mathbb{P}]\}$, přičemž pro kvocientové zobrazení $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/E$ je $q^{-1}([\mathbb{Q}]) = \mathbb{Q}$, a tedy $[\mathbb{Q}]$ tvoří otevřenou množinu. Podobně ani $[\mathbb{P}]$ není izolovaný, takže $\mathbb{R}/E$ je indiskretní.

2. Položme $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ jako $g(x) = e^{2\pi i x}$, $x \in \mathbb{R}$. Nechť $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ je kvocientové zobrazení. Položme $\varphi: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$ jako $\varphi([x]) = g(x)$, $[x] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Toto zobrazení je dobře definované, neboť pokud $x - y \in \mathbb{Z}$, pak $g(x) = g(y)$. Dále je φ bijekce $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{T}$. Navíc platí $g = \varphi \circ q$, což znamená, že φ je spojitě zobrazení. Vskutku, pokud $U \subset \mathbb{T}$ je otevřená, je $q^{-1}(\varphi^{-1}(U)) = g^{-1}(U)$ otevřená v $\mathbb{R}$, takže $\varphi^{-1}(U)$ je otevřená v $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Ověříme nyní spojitost inverze. Nechť tedy $\lambda_n \rightarrow \lambda$ pro nějakou posloupnost $\{\lambda_n\}$ a λ v $\mathbb{T}$. Předpokládejme nejprve, že $\lambda \neq 1$. Pak můžeme najít $x_n \in [0, 1]$ a $x \in (0, 1)$ splňující $g(x_n) = \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$, a $g(x) = \lambda$. Pokud by posloupnost $\{x_n\}$ nekonvergovala k x , existuje její podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k $y \in [0, 1] \setminus \{x\}$. Pak ovšem $g(x_{n_k}) \rightarrow g(y) = g(x)$, což znamená $x - y \in \mathbb{Z}$. To ale není pravda, takže $x_n \rightarrow x$. Tedy $\varphi^{-1}(\lambda_n) = q(x_n) \rightarrow q(x) = \varphi^{-1}(\lambda)$.

Pokud $\lambda = 1$, můžeme po vynechání konečně mnoha členů z posloupnosti $\{\lambda_n\}$ předpokládat, že máme $x_n \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ splňující $g(x_n) = \lambda_n$. Stejně jako výše pak dojdeme k závěru, že $x_n \rightarrow 0$, tj $\varphi^{-1}(\lambda_n) = q(x_n) \rightarrow q(0) = [0] = \varphi^{-1}(1)$. Tedy i inverze k φ je spojitá, takže φ je homeomorfismus $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ a $\mathbb{T}$. $\square$

Sice je popis kvocientu pomocí otevřených množin jednoduchý, ale to neznamená, že se snadno ověřuje. Popis kvocientu pomocí okolí a uzávěrů je komplikovaný. Následující tvrzení uvádí velkou třídu zobrazení, které jsou kvocientové a snadněji se ověřují.

Tvrzení 2.28. Postačující podmínka kvocientového zobrazení

Je-li zobrazení $f: X \rightarrow Y$ spojité, otevřené (nebo uzavřené) a na, pak je kvocientové.

Důkaz. Stačí ověřit podmínku z charakterizace kvocientového zobrazení obsažené v Tvrzení 2.9. Je-li V otevřená v Y , pak $f^{-1}(V)$ je otevřená v X ze spojitosti f . Je-li $f^{-1}(V)$ otevřená v X , pak $V = f(f^{-1}(V))$, protože f je na a obrazem otevřené je otevřená v Y z otevřenosti zobrazení f , tedy V je otevřená. V případě uzavřenosti se důkaz provede přechodem k doplňkům a využitím $f(X \setminus f^{-1}(V)) = Y \setminus V$. $\square$

Kvocienty podle otevřených nebo uzavřených zobrazení jsou důležité i proto, že zachovávají více vlastností než kvocienty.

Snadno se ověří, že projekce neprázdného součinu prostorů $\prod_I X_i$ na podsoučin $\prod_J X_i$ (tj $J \subset I$) je otevřené zobrazení a nemusí být uzavřené (projekce roviny na přímku). V příkladech 2.27 je v 1 kvocientové zobrazení otevřené, ale není uzavřené. V 2 jsou první a třetí zobrazení otevřené, nejsou uzavřené, ve druhém příkladě není otevřené, je uzavřené. V 3 a 4 je kvocientové zobrazení uzavřené, není otevřené. Vezmeme-li sumy uvedených prostorů a jejich kvocientů, dostaneme příklad kvocientového zobrazení, které není ani uzavřené ani otevřené. Asi jednodušším příkladem je kvocient $\mathbb{R}$, který vznikne ztotožněním $[0, 1]$ do bodu (není otevřené) a otevřeného intervalu $(2, 3)$ do bodu (není uzavřené).

Z funkcionální analýzy je známa věta o otevřeném zobrazení, která říká, že spojitě surjektivní lineární zobrazení mezi Banachovými prostory už je otevřené. Víme, že spojitě surjektivní zobrazení mezi kompaktními Hausdorffovými prostory je uzavřené. Vlastnost T_2 nelze vynechat (identické zobrazení $[0, 1]$ do indiskrétního prostoru). Je vhodné si uvědomit, že kvocient Hausdorffova prostoru podle uzavřeného zobrazení nemusí být Hausdorffův (stačí uvažovat T_2 topologický prostor, který není T_3 , a stáhnout do bodu tu uzavřenou množinu, kterou nelze od nějakého bodu oddělit).

Následuje bez (jednoduchých) důkazů souhrn vlastností kvocientů a sum v jistém smyslu duálních k vlastnostem podprostorů a součinů.

Fakt 2.29. Jednoduché vlastnosti vyplývající z vlastností induktivního vytváření

- (a) Jsou-li zobrazení $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ kvocientová, je i jejich složení $g \circ f: X \rightarrow Z$ kvocientové.
- (b) Je-li X sumou prostorů $X_i, i \in I$ a každý prostor X_i je sumou prostorů $X_{i,j}, j \in J_i$, pak X je homeomorfní sumě prostorů $X_{i,j}, (i,j) \in \coprod_I J_i$, pomocí zobrazení $\varphi: \coprod_{(i,j) \in \coprod_I J_i} X_{i,j}$ definovaného jako

$$\varphi(x) = x, \quad \text{kde } x \in X_{i,j} \text{ pro nějaké } i \in I \text{ a } j \in J_i.$$
- (c) Zobrazení $f: \coprod_I X_i \rightarrow X$ je spojité, právě když jsou spojitá zobrazení $f \circ \iota_i, i \in I$.
- (d) Jsou-li $f_i: X_i \rightarrow Y_i, i \in I$, spojitá, je spojitá i suma zobrazení $\coprod_I f_i: \coprod_I X_i \rightarrow \coprod_I Y_i$.
- (e) Prostor X je kvocientem sumy prostorů X_i právě když existují zobrazení $f_i: X_i \rightarrow X$ tak, že $\{f_i: X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ je induktivně vytvářející a $\bigcup_I f_i(X_i) = X$.

Důkaz. (a) Potřebujeme ověřit, že množina $(g \circ f)^{-1}(W)$ je otevřená v X , právě když je W otevřená v Z . To však ihned plyne z ekvivalencí

$$\begin{aligned} W \text{ otevřená v } Z &\iff g^{-1}(W) \text{ otevřená v } Y \iff f^{-1}(g^{-1}(W)) \text{ otevřená v } X \\ &\iff (g \circ f)^{-1}(W) \text{ otevřená v } X. \end{aligned}$$

(b) Platí

Množina A je uzavřená v $\prod_{i \in I} X_i \iff A = \prod_{i \in I} A_i$ pro $A_i \in X_i$ otevřené $\iff$

$A = \prod_{i \in I} \prod_{j \in J_i} A_{i,j}$ pro $A_{i,j} \in X_{i,j}$ otevřené.

(c) $\implies$: Je-li $f: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X$ spojitý, jsou složeni $f \circ \iota_i$ spojitá, neboť ι_i jsou spojitá zobrazení.

$\impliedby$: Je-li $V \subset X$ otevřená, máme $f^{-1}(V) = \prod_{i \in I} \iota_i^{-1}(f^{-1}(V))$. To je však otevřená množina ze spojitosti zobrazení $\iota_i \circ f$.

(d) Je-li $V \in \prod_{i \in I} Y_i$ otevřená, je $V = \prod_{i \in I} V_i$ pro $V_i \subset Y_i$ otevřené. Pak je ovšem množina

$$\left(\prod_{i \in I} f_i \right)^{-1}(V) = \prod_{i \in I} f_i^{-1}(V_i)$$

otevřená v $\prod_{i \in I} X_i$. Tedy je zobrazení $\prod_{i \in I} f_i$ spojitý.

(e) $\implies$: Necht $f: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X$ je kvocientové zobrazení a $\iota_i: X_i \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ jsou příslušná vnoření. Pak $f_i = f \circ \iota_i: X_i \rightarrow X$, $i \in I$, jsou spojitá zobrazení a $\bigcup_{i \in I} f_i(X_i) = X$. Pak pro množinu $V \subset X$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} V \text{ otevřená v } X &\iff f^{-1}(V) \text{ otevřená v } \prod_{i \in I} X_i \iff \iota_i^{-1}(f^{-1}(V)) \text{ otevřená v } X_i, i \in I \\ &\iff f_i^{-1}(V) \text{ otevřená v } X_i, i \in I. \end{aligned}$$

Z těchto ekvivalencí plyne, že systém $\{f_i: X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ je induktivně vytvářející.

$\impliedby$: Necht systém $\{f_i: X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$ splňuje $\bigcup_{i \in I} f_i(X_i) = X$ a induktivně vytváří topologii na X . Pak zobrazení $f: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X$ definované jako $f((i, x)) = f_i(x)$, $x \in X_i$, $i \in I$, je surjektivní díky předpokladu a platí $f_i = f \circ \iota_i$, $i \in I$. Pak pro množinu $V \subset X$ platí následující ekvivalence:

$$\begin{aligned} V \text{ otevřená v } X &\iff f_i^{-1}(V) \text{ otevřená v } X_i, i \in I \iff (f \circ \iota_i)^{-1}(V) \text{ otevřená v } X_i, i \in I \\ &\iff \iota_i^{-1}(f^{-1}(V)) \text{ otevřená v } X_i, i \in I \iff f^{-1}(V) \text{ otevřená v } \prod_{i \in I} X_i. \end{aligned}$$

Tedy f je kvocientové zobrazení. □

2.4 Zachovávání vlastností konstrukcemi

Dosud jsme měli následující topologické třídy prostorů: T_i -prostory, regulární a úplně regulární prostory, nuldimenzionální prostory, metrizable prostory, uspořadatelné prostory. Pro práci s těmito třídami je nutné vědět, jak se chovají vzhledem ke konstrukcím. Mezi topologické vlastnosti náleží i vlastnost, kdy daná kardinální funkce má danou hodnotu. Je tedy vhodné vědět, jak se při konstrukcích kardinální funkce mění. Zatím byly definovány tři takové funkce: charakter, váha a hustota.

2.4.1 Zachovávání vlastností podprostory

Mohlo by se zdát, že vztah topologických vlastností a kardinálních funkcí k podprostorům je jednoduchý. Ne vždy to tak je, sestavení některých protipříkladů bývá složité.

Definice 2.30. Dědičnost a součinnost

Necht $\mathcal{P}$ je topologická vlastnost.

1. Říkáme, že $\mathcal{P}$ je *dědičná* (resp. *uzavřeně dědičná*), jestliže každý podprostor (resp. uzavřený podprostor) prostoru s vlastností $\mathcal{P}$ má opět vlastnost $\mathcal{P}$.

2. Vlastnost $\mathcal{P}$ je *součinná* (resp. *konečně součinná*), jestliže každý součin (resp. součin konečně mnoha) prostorů s $\mathcal{P}$ má opět $\mathcal{P}$. □

Lze definovat spočetnou součinnost, nebo obecněji κ -součinnost pro nějakou mohutnost κ : Součin méně než κ mnoho prostorů s vlastností $\mathcal{P}$ má opět $\mathcal{P}$.

Uspořádatelnost je trochu opomíjený pojem, i když se uspořádané topologické prostory hodně používají a mají hodně pěkných vlastností. Tento pojem je hodně probádáný, ale nevěnuje se mu v textech o topologii více pozornosti. Před tvrzením o dědičnosti uspořádatelných prostorů si musíme nejdříve uvědomit vztah mezi LOTS a GO prostory.

Nejdříve uvedeme jednoduchý příklad uzavřeného podprostoru Y uspořádaného topologického prostoru X , který má ostře jemnější topologii než topologie určená příslušným zúžením uspořádání na X . Stačí vzít $Y = \{0\} \cup (\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}$. Jako podprostor je Y uzavřený v $\mathbb{Q}$ a jeho bod 0 je izolovaný, kdežto v uspořádání na Y zděděném z $\mathbb{Q}$ je hromadným bodem intervalu $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Je snadno vidět, že Y je zobecněný uspořádaný topologický prostor. Tato souvislost platí obecně, jak ukazuje následující tvrzení.

Tvrzení 2.31. GO-prostory versus podprostory LOTS

Topologický prostor je GO, právě když je (uzavřeným) podprostorem LOTS.

Důkaz. Tvrzení, že podprostor LOTS je GO, je snadný, protože zúžení intervalů v X na Y jsou intervaly v Y . Nechtě naopak je dán GO prostor Y určený nějakým uspořádáním. Najdeme větší uspořádanou množinu $(X, \leq)$ tak, že uspořádání na Y je zúžení $\leq$ a topologie na Y je zúžení uspořádané topologie na X . Pro $y \in Y$ definujeme

$$X_y = \begin{cases} \{0\} & \text{pokud } y \in \overline{\{a \in Y; a > y\}} \cap \overline{\{a \in Y; a < y\}} \\ (-1, 0] & \text{pokud } y \in \overline{\{a \in Y; a > y\}}, y \notin \overline{\{a \in Y; a < y\}} \\ [0, 1) & \text{pokud } y \notin \overline{\{a \in Y; a > y\}}, y \in \overline{\{a \in Y; a < y\}} \\ (-1, 1) & \text{pokud } y \notin \overline{\{a \in Y; a > y\}} \cup \overline{\{a \in Y; a < y\}} \end{cases}$$

Potom $X = \coprod_Y X_y$ s lexikografickým uspořádáním, tj. $(y_1, x_1) < (y_2, x_2)$, jestliže buď $y_1 < y_2$ nebo $y_1 = y_2$ a $x_1 < x_2$. Množinu Y ztotožníme s podmnožinou $\{y, 0\}; y \in Y\}$ v X . Snadno se ověří, že prostor Y je uzavřeným topologickým podprostorem uspořádaného prostoru X . $\square$

Lze poznamenat, že kompaktní nebo souvislé podprostory LOTS jsou LOTS s uspořádáním zděděným z většího prostoru. [odkaz?](#) Příklad před tvrzením 2.31 netvrdí, že podprostor Y není uspořádatelný, k tomu je potřeba dalších znalostí.

Věta 2.32. Dědičnost

- (a) *Následující vlastnosti prostorů jsou dědičné: T_i -vlastnost pro $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$, regularita, úplná regularita, nuldimenzionalita a metrizovatelnost.*
- (b) *T_4 není dědičná (a tedy ani normalita). Obě třídy jsou uzavřeně dědičné.*
- (c) *Uspořádatelnost není uzavřeně dědičná vlastnost.*

Důkaz. Tvrzení v (a) mají přímé jednoduché důkazy. Ať X je normální prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Jsou-li A, B disjunktní uzavřené podmnožiny v Y , jsou disjunktní uzavřené v X a tedy existují dvě disjunktní otevřená okolí v X množin A, B - jejich průniky s Y jsou disjunktní otevřená okolí v Y množin A, B , takže Y je normální prostor. Příklady, že normalita a uspořádatelnost nejsou dědičné vlastnosti, jsou uvedeny po tomto důkazu. $\square$

Příklady 2.33. Normalita a uspořádatelnost nejsou dědičné vlastnosti

1. Normalita není dědičná vlastnost

Uvedeme příklad, který je zjednodušením tzv. Dieudonného obdélníku (a ten je zjednodušením tzv. Tichonovova obdélníku $\omega \times \omega_1$). Nechtě X je spočetná a Y nespočetná množina, $x_0 \in X$ a $y_0 \in Y$ jejich pevně vybrané body. Topologie na obou prostorech: body, kromě obou vybraných, jsou izolované, vybrané body mají za okolí doplňky konečných množin. Oba prostory jsou nuldimenzionální, kompaktní a T_2 . Tedy $X \times Y$ je kompaktní T_2 , tedy normální (Věta 3.12).

Podprostor $X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$ není normální, protože jeho disjunktní uzavřené množiny $A = \{x_0\} \times (Y \setminus \{y_0\})$, $B = (X \setminus \{x_0\}) \times \{y_0\}$ nelze oddělit otevřenými množinami. Otevřené okolí U množiny B je totiž tvaru

$$U = \bigcup \{ \{x\} \times (Y \setminus K_x); |K_x| < \omega, y_0 \notin K_x, x \in X \setminus \{x_0\} \},$$

a tedy obsahuje množinu $(X \setminus \{x_0\}) \times (Y \setminus S)$ pro nějakou spočetnou množinu S . Pak existuje $y \in Y \setminus S$ různý od y_0 , přičemž bod (x_0, y) z A leží v uzávěru zvoleného okolí U množiny B . Tedy neexistuje otevřená množina V v $X \times Y \setminus \{(x_0, y_0)\}$ obsahující A a disjunktní s U .

2. Vlastnost být uspořádatelný není uzavřeně dědičná vlastnost

Pro tento případ potřebujeme znát více o uspořádatelných prostorech. Např., že uspořádatelný prostor s G_δ -diagonálou je metrizovatelný. [odkaz?](#) Odtud plyne, že neexistuje uspořádání na $\mathbb{R}$ takové, že jeho příslušná uspořádaná topologie je Sorgenfreyova přímka. Podle tvrzení 2.31 je Sorgenfreyova přímka uzavřeným podprostorem uspořádaného topologického prostoru a není uspořádatelná protože má G_δ -diagonálu a není metrizovatelná (hustota je menší než váha). $\square$

Zbývá podívat se chování kardinálních funkcí na podprostorech.

Věta 2.34. Zachovávání kardinálních funkcí podprostory

At Y je podprostorem prostoru X . Pak platí následující tvrzení.

- (a) $\chi(Y) \leq \chi(X)$.
- (b) $w(Y) \leq w(X)$.
- (c) $d(Y)$ může být větší než $d(X)$; $d(Y) \leq d(X)$ pro metrizovatelný nebo uspořádatelný prostor X .

Důkaz. První dvě tvrzení plynou z toho, že otevřené množiny v Y jsou právě zúžení na Y otevřených množin v X . S hustotou je to složitější.

Je-li (X, d) metrický prostor a S je hustá v X , můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je nekonečná. Pro každé $s \in S$, $n \in \mathbb{N}$ vezmeme nějaký bod $y_{s,n} \in B(s, \frac{1}{n}) \cap Y$, pokud je uvedený průnik neprázdný. Množina $\{y_{s,n}; s \in S, n \in \mathbb{N}\}$ je hustá v Y a nemá větší mohutnost než je $|S|$. (Jsou-li totiž $y \in Y$ a $r > 0$ dány, existuje $s \in S$ takové, že $\rho(y, s) < \frac{1}{4n}$, kde $n \in \mathbb{N}$ splňuje $\frac{1}{n} < r$. Pak $B(s, \frac{1}{2n}) \cap Y \neq \emptyset$, a tedy existuje $y_{s,2n} \in Y \cap B(s, \frac{1}{2n})$. Pak ovšem

$$\rho(y, y_{s,2n}) \leq \rho(y, s) + \rho(s, y_{s,2n}) \leq \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} < r.)$$

Je-li $(X, \leq)$ uspořádaný topologický prostor a S je hustá v X , opět budeme předpokládat, že S je nekonečná. (V případě konečné hustoty X je situace jednoduchá.)

Pro každé $s_1, s_2 \in S$, $s_1 < s_2$, vezmeme nějaký bod $x_{s_1, s_2} \in (s_1, s_2) \cap Y$, pokud je uvedený průnik neprázdný. Označme A množinu izolovaných bodů v prostoru Y . Množina $T = \{x_{s_1, s_2}; s_1, s_2 \in S, s_1 < s_2\}$ je hustá v $Y \setminus A$.

Vskutku, je-li $y \in Y \setminus A$, uvažujme libovolný otevřený interval $I \subset X$ obsahující y . Jelikož y není izolovaný v Y , existuje usměrněný soubor $\{y_i\}_{i \in I}$ v $(Y \setminus \{y\}) \cap I$ konvergující k y . Výběrem vhodného usměrněného podsouboru lze zajistit, aby například $y_i < y$ pro každé $i \in I$. Zvolme $i_1, i_2, i_3 \in I$ splňující $y_{i_1} < y_{i_2} < y_{i_3}$. Pak existují $s_1 \in (y_{i_1}, y_{i_2}) \cap S$ a $s_2 \in (y_{i_2}, y_{i_3}) \cap S$. Jelikož je průnik $(s_1 \cap s_2) \cap Y \neq \emptyset$, existuje $x_{s_1, s_2} \in (s_1, s_2) \cap T \subset I \cap T$. Tedy T je hustá v $Y \setminus A$.

Proto je množina $T \cup A$ hustá v Y . Jelikož $|T| \leq |S|$, zbývá ukázat, že $|A| \leq |S|$.

Pro každé $a \in A$, které není minimálním nebo maximálním bodem X , vybereme $u'_a, v'_a \in Y$ takové, že $u'_a < a < v'_a$ a $(u'_a, v'_a) \cap Y = \{a\}$. Položíme

$$A_- = \{a \in A; \text{ existuje } b \in A \text{ takové, že } b < a \text{ a } (u'_b, v'_b) \cap (u'_a, v'_a) \neq \emptyset\}$$

a

$$A_+ = \{a \in A; \text{ existuje } b \in A \text{ takové, že } a < b \text{ a } (u'_b, v'_b) \cap (u'_a, v'_a) \neq \emptyset\}.$$

Pro každé $a \in A_-$ existuje právě jedno $b \in A$ splňující definující vlastnost. Necht $v \in (u'_b, v'_b) \cap (u'_a, v'_a)$. Pak položíme $u_a = v$ a $v_a = v'_a$. Dále pro $a \in A_+$ existuje právě jedno $b \in A$ splňující definující vlastnost. Necht $w \in (u'_b, v'_b) \cap (u'_a, v'_a)$. Pak položíme $v_a = w$ a $u_a = u'_a$. Pokud $a \in A \setminus (A_- \cup A_+)$, položíme $u_a = u'_a$ a $v_a = v'_a$.

Pak jsou intervaly (u_a, v_a) , $(u_{a'}, v_{a'})$ pro různé $a, a' \in A$ disjunktní. Interval (u_a, v_a) v X obsahuje bod $s_a \in S$. Z uvedeného disjunktnosti plyne $|A| \leq |S|$.

Vezměme nyní Isbellův-Mrówkův prostor vytvořený nespočetným skoro disjunktním souborem na $\mathbb{N}$. Prostor X je separabilní ($\mathbb{N}$ je hustý v X) a podprostor $X \setminus \mathbb{N}$ je nespočetný, uzavřený a diskrétní, takže má nespočetnou hustotu. $\square$

V nerovnostech (a) a (b) nemusí nastat rovnost ani když Y je hustý v X . Např. prostor N_ξ má charakter i váhu nespočetnou, váha husté množiny $\mathbb{N}$ je ω a charakter je 1.

Pro některé podprostory je hustota dědičná, např. pro otevřené podprostory (triviální) nebo pro retrakty.

Fakt 2.35. Densita rektaktu

Nechť Y je rektakt X . Pak $d(Y) \leq d(X)$.

Důkaz. Nechť $f: X \rightarrow Y$ je rektakce X na Y , tj. existuje $g: Y \rightarrow X$ spojitě splňující $f \circ g = \text{Id}_Y$. Nechť $S \subset X$ je hustá. Stačí ukázat, že $f(S)$ je hustá v Y . Nechť tedy $y \in Y$ je dáno a $\{x_i\}_{i \in I}$ je usměrněný soubor v S konvergující k bodu $g(y)$. Pak usměrněný soubor $\{f(x_i)\}$ konverguje k bodu $f(g(y)) = y$. Tedy $f(S)$ je hustá v Y . $\square$

Například každý obraz vnoření X_i do $\prod_{i \in I} X_i$, kde $e_i: X_i \rightarrow \prod_{j \in I} X_j$ je definováno jako

$$(e_i(x))(j) = \begin{cases} x, & j = i, \\ y_j, & j \neq i, \end{cases} \quad j \in I,$$

a $y_j \in X_j$ jsou vybrané body pro $j \in I \setminus \{i\}$, je rektaktem celého součinu.

2.4.2 Zachovávání vlastností součiny**Věta 2.36. Součinnost**

- (a) *Následující vlastnosti prostorů jsou součinnové: T_i -vlastnost pro $i = 0, 1, 2, 3, 3\frac{1}{2}$, regularita, úplná regularita, nulldimensionalita.*
- (b) *T_4 není konečně součinnová (a tedy ani normalita).*
- (c) *Metrizovatelnost je spočetně součinnová vlastnost.*
- (d) *Uspořádatelnost není konečně součinnová.*

Důkaz. (a) Ať $X = \prod_{i \in I} X_i$. Prostory $T_i, i = 0, 1, 2$ jsou definovány pomocí oddělitelnosti bodů. Máme-li dva různé body $x, y \in \prod_{i \in I} X_i$, existuje $i \in I$ tak, že $\pi_i(x) \neq \pi_i(y)$ a tyto dvě projekce se dají v X_i oddělit podle definice – vzory příslušných okolí oddělují body x, y v součinu.

Regularita a úplná regularita je definována pomocí oddělování bodu x od uzavřené množiny F , která bod x neobsahuje. Z vlastností součinnové topologie existuje konečná množina $K \subset I$ a otevřené $U_i \subset X_i, i \in K$, že $x \in \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(U_i) \subset X \setminus F$, tedy $x_i \in U_i$. V regulárním případě existují otevřené množiny $G_i \subset X_i$ takové, že $x_i \in G_i \subset \overline{G_i} \subset U_i$. Pak

$$x \in \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(G_i) \subset \overline{\bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(G_i)} \subset \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(\overline{G_i}) \subset \bigcap_{i \in K} \pi_i^{-1}(U_i) \subset X \setminus F.$$

V úplně regulárním případě existují spojitá zobrazení $f_i: X_i \rightarrow [0, 1]$, že $f_i(x_i) = 0$ a $f_i(X_i \setminus U_i) \subset \{1\}$. Položme $f(y) = \max_{i \in K} f_i(y_i)$. Zobrazení f je spojitě a odděluje x od F .

Ať X_i jsou nulldimenzionální a $U = \prod_{i \in K} U_i \times \prod_{i \in I \setminus K} X_i$ je kanonické okolí bodu x . Každé okolí U_i obsahuje obojetné okolí V_i a příslušné kanonické okolí $\prod_{i \in K} V_i \times \prod_{i \in I \setminus K} X_i$ je obojetné a částí U .

Příklady na tvrzení (b) a (d) jsou uvedeny v příkladech po tomto důkazu. Součin spočetně mnoha metrických prostorů $(X_n, d_n), n \in \mathbb{N}$ je metrizovatelný například metrikou

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \min\{d_n(x_n, y_n), 2^{-n}\}, \quad x, y \in X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Vskutku, funkce $(x, y) \in X \times X \mapsto \min\{d_n(x_n, y_n), 2^{-n}\}, n \in \mathbb{N}$, jsou zřejmě pseudometriky na X . Díky omezení pomocí 2^{-n} je suma v definici d dobře definovaná, takže d je též pseudometrika. Jedná se dokonce o metriku, neboť $d(x, y) = 0$ pro $x, y \in X$ znamená $d_n(x_n, y_n) = 0, n \in \mathbb{N}$, takže $x_n = y_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Proto $x = y$.

Nechť τ je součinnová topologie a σ topologie generovaná metrikou ρ . Jelikož jsou projekce $\pi_n: X \rightarrow X_n$ spojitě stejně jako funkce $(x, y) \in X_n \times X_n \mapsto \min\{d_n(x_n, y_n), 2^{-n}\}$, je funkce

$$(x, y) \in X \times X \mapsto \min\{d_n(x_n, y_n), 2^{-n}\} \in [0, \infty)$$

spojitá na $(X, \tau) \times (X, \tau)$. Tedy i metrika ρ je spojitá na $(X, \tau) \times (X, \tau)$ z Weierstrasova kritéria. Proto jsou σ -otevřené množiny také τ -otevřené, tj. $\sigma \subset \tau$.

Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme τ -otevřenou množinu $U \subset X$ a $x \in U$. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ a otevřenou množinu $U_n \subset X_n$, $n = 1, \dots, n_0$, takové, že $x \in \bigcap_{n=1}^{n_0} \pi_n^{-1}(U_n) \subset U$. Pro každé $n \in \{1, \dots, n_0\}$ nalezneme $r_n > 0$ takové, že $B_{d_n}(x_n, r_n) \subset U_n$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\max\{r_1, \dots, r_{n_0}\} < 2^{-n_0}$. Necht' $r = \min\{2^{-1}, \dots, 2^{-n_0}\}$ a uvažujme $y \in B_\rho(x, r)$. Pak $\min\{d_n(x_n, y_n), 2^{-n}\} < r \leq 2^{-n_0} < 2^{-n}$, $n = 1, \dots, n_0$, tedy $d_n(x_n, y_n) < r \leq r_n$. Tedy $y_n \in B_{d_n}(x_n, r_n) \subset U_n$, $n = 1, \dots, n_0$, takže

$$y \in B_{d_1}(x_1, r_1) \times \dots \times B_{d_{n_0}}(x_{n_0}, r_{n_0}) \times \prod_{n=n_0+1}^{\infty} X_n \subset U_1 \times \dots \times U_{n_0} \times \prod_{n=n_0+1}^{\infty} X_n \subset U.$$

Tedy U je σ -otevřená, takže $\tau \subset \sigma$. $\square$

Příklady 2.37. Normalita a uspořádatelnost nejsou součinné

1. Součin dvou Sorgenfreyových přímek není normální

Ať X je Sorgenfreyova přímka. Ta je normální, neboť X je Lindelöfov (vizte Příklady 3.6.3) a regulární, takže normalita plyne z Věty 3.12.

Ukážeme, že $X \times X$ není normální. Předpokládejme opak. Podprostor $D = \{(x, -x); x \in X\}$ je uzavřený a diskrétní v součinu $X \times X$. Má mohutnost 2^ω . Podle Tietzovy-Urysohnovy rozšiřovací věty (Věta 1.70) se dá každá reálná funkce na D (ta je spojitá) spojitě rozšířit na $X \times X$. Spojitých funkcí na D je jako všech reálných funkcí na $\mathbb{R}$, tj. 2^{2^ω} . Množina $\mathbb{Q}$ je hustá v X a tedy $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ je spočetná hustá podmnožina v $X \times X$. Každé dvě spojitě funkce na $X \times X$ rovnající se na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ jsou totožné, takže spojitých funkcí na $X \times X$ je stejně jako spojitých funkcí na $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, což je mohutnost $(2^\omega)^\omega = 2^\omega < 2^{2^\omega}$. Získaný spor dokazuje, že $X \times X$ není normální prostor.

2. Součin dvou uspořádaných topologických prostorů nemusí být uspořádatelný

Ukážeme, že součin $X = (0, 1) \times (0, 1)$ není uspořádatelný. Předpokládejme, že topologie na X je určena uspořádáním $\leq$. Vezmeme bod $r = (1/2, 1/2)$ a jeho okolí (p, q) pro $p < r < q$. Existuje $\varepsilon > 0$, že $U = (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon) \times (1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon) \subset (p, q)$. Pak $U \cap (p, r), U \cap (r, q)$ jsou disjunktní otevřené množiny a jejich sjednocení je $U \setminus \{r\}$, což ale není možné. Množina $U \setminus \{r\}$ je totiž obloukově souvislý, a tudíž souvislý metrický prostor. $\square$

Součin nejvýše spočetně mnoha metrizableních prostorů je metrizable a tedy normální. Součin nespočetně mnoha metrizableních prostorů může být normální (v další kapitole uvedeme platnost tohoto tvrzení pro kompaktní prostory). Nejjednodušší nekompaktní metrizablený prostor je asi $\mathbb{N}$. Ukážeme, že součin nespočetně mnoha těchto prostorů normální není. Toto tvrzení vede k charakterizaci normality součinů (3.20).

Příklad 2.38. Mocnina $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální

Uvažujme množiny

$$\begin{aligned} F_1 &= \{x \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha \in \omega_1; \pi_\alpha(x) = n\}| \leq 1 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \{x \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha \in \omega_1; \pi_\alpha(x) = n\}| \leq 1\}, \\ F_2 &= \{x \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha \in \omega_1; \pi_\alpha(x) = n\}| \leq 1 \text{ pro každé } n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}\} \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}} \{x \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha \in \omega_1; \pi_\alpha(x) = n\}| \leq 1\}. \end{aligned}$$

Ukážeme, že se jedná o dvě disjunktní uzavřené neprázdné množiny. Zřejmě $x(\alpha) = 1$, $\alpha \in \omega_1$, leží v F_1 , takže F_1 je neprázdna. Podobně bychom ověřili neprázdnot F_2 .

Dále zjistíme, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina

$$F = \{x \in \mathbb{N}^{\omega_1}; |\{\alpha \in \omega_1; \pi_\alpha(x) = n\}| \leq 1\}$$

uzavřená. Vskutku, je-li $x \in \mathbb{N}^{\omega_1} \setminus F$ dáno, existují dvě různé souřadnice $\alpha_1, \alpha_2 \in \omega_1$ splňující $x(\alpha_1) = x(\alpha_2) = n$. Pak

$$U = \{y \in \mathbb{N}^{\omega_1}; y(\alpha_1) = y(\alpha_2) = n\}$$

je otevřené okolí x neprotínající F . Tedy F je uzavřená, z čehož plyne uzavřenost množin F_1 a F_2 .

Dále jsou disjunktní. Uvažujme totiž $x \in F_1 \cap F_2$. Protože je $\mathbb{N}$ spočetná a ω_1 nespočetná, existuje $S \subset \omega_1$ nespočetná a $n \in \mathbb{N}$ splňující $x(\alpha) = n$ pro $\alpha \in S$. Jelikož $x \in F_1 \cap F_2$, máme $n \in \{1, 2\}$. Pokud ale $n = 1$, z definice vidíme $x \notin F_2$, podobně $x \notin F_1$, pokud $n = 2$.

Předpokládejme nyní, že $\mathbb{N}^{\omega_1}$ je normální. Pak existují dvě otevřené množiny $U_i \supset F_i$, $i = 1, 2$, s disjunktními uzávěry. Víme, že $\mathbb{N}^{\omega_1}$ je separabilní. (Důsledek 2.42).

Uvažujme $i \in \{1, 2\}$. V U_i vezmeme maximální disjunktní systém $\mathcal{U}_i$ kanonických otevřených podmnožin. Ten je nejvýše spočetný (díky separabilitě součinu) a jeho sjednocení je husté v U_i (z maximality). Každý prvek v $\mathcal{U}_i$ je určen konečným počtem souřadnic, takže sjednocení J_i těchto souřadnic pro $\mathcal{U}_i$, je spočetné. Nechť $J = J_1 \cup J_2$. Pak J je spočetná množina. bez újmy na obecnosti předpokládejme, že je nekonečná. Ukážeme, že platí $\overline{U_i} = \pi_J^{-1}(\pi_J(\overline{U_i}))$. Zřejmě platí $\overline{U_i} \subset \pi_J^{-1}(\pi_J(\overline{U_i}))$. Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $y \in \pi_J^{-1}(\pi_J(\overline{U_i}))$, tj. $\pi_J(y) \in \pi_J(\overline{U_i})$. Pak existuje $x \in \overline{U_i}$ splňující $\pi_J(x) = \pi_J(y)$. Nechť $\{x_a\}_{a \in A}$ je usměrněný soubor v $\bigcup \mathcal{U}_i$ konvergující k x . Uvažujme usměrněný soubor $\{y_a\}_{a \in A}$, kde

$$y_a(\alpha) = \begin{cases} x_a(\alpha), & \alpha \in J, \\ y(\alpha), & \alpha \in \omega_1 \setminus J, \end{cases} \quad a \in A.$$

Pak $p_J(x_a) = \pi_J(y_a)$, takže $y_a \in \bigcup \mathcal{U}_i$. Protože $\lim y_a = y$, platí $y \in \overline{U_i}$. Protože $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \emptyset$, z předchozího máme

$$\emptyset = \overline{U_1} \cap \overline{U_2} = \pi_J^{-1}(\pi_J(\overline{U_1})) \cap \pi_J^{-1}(\pi_J(\overline{U_2})) = \pi_J^{-1}(\pi_J(\overline{U_1}) \cap \pi_J(\overline{U_2})).$$

Tedy

$$\pi_J(\overline{U_1}) \cap \pi_J(\overline{U_2}) = \emptyset.$$

Proto i

$$\pi_J(F_1) \cap \pi_J(F_2) \subset \pi_J(\overline{U_1}) \cap \pi_J(\overline{U_2}) = \emptyset.$$

Uvažujme však nyní bijekci $b: J \rightarrow \mathbb{N}$ a bod $x \in \mathbb{N}^J$, který je definován jako

$$x(\alpha) = b(\alpha), \quad \alpha \in J.$$

(Tedy x je prostá funkce na J na $\mathbb{N}$.)

Ukážeme, že $x \in \pi_J(F_1) \cap \pi_J(F_2)$, což bude výsledný spor. Definujme prvky $x_1, x_2 \in \mathbb{N}^{\omega_1}$ jako

$$x_1(\alpha) = \begin{cases} x(\alpha), & \alpha \in J, \\ 1, & \alpha \in \omega_1 \setminus J, \end{cases} \quad a \quad x_2(\alpha) = \begin{cases} x(\alpha), & \alpha \in J, \\ 2, & \alpha \in \omega_1 \setminus J. \end{cases}$$

Pak $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ a $\pi_J(x_1) = x = \pi_J(x_2)$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Zbývá probrat kardinální funkce na součinech. Tato úloha je jednoduchá na součinech konečně mnoha prostorů díky následujícímu faktu.

Tvrzení 2.39. Kardinální funkce na konečném součinu

Nechť $X_1, \dots, X_n$ neprázdné prostory, $X = \prod_{i=1}^n X_i$ a φ označuje některou z funkcí χ, w, d .

(a) Pokud $\max_{i=1, \dots, n} \{\varphi(X_i)\} < \omega$, platí $\varphi(X) = \prod_{i=1}^n \varphi(X_i)$.

(b) Pokud $\max_{i=1, \dots, n} \{\varphi(X_i)\} \geq \omega$, platí $\varphi(X) = \max_{i=1, \dots, n} \varphi(X_i)$.

Důkaz. Z principu matematické indukce stačí dokázat tvrzení pro $n = 2$.

(a) Nechť $\varphi = \chi$ a $(x_1, x_2) \in X$. Vezměme $\mathcal{U}_1$ lokální bázi x_1 kardinality $\chi(X_1, x_1)$ a $\mathcal{U}_2$ lokální bázi x_2 kardinality $\chi(X_2, x_2)$. Pak $\mathcal{U} = \{U_1 \times U_2; U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2\}$ je lokální báze (x_1, x_2) kardinality ne větší než $\chi(X_1) \cdot \chi(X_2)$. Tedy $\chi(X) \leq \chi(X_1) \cdot \chi(X_2)$.

Pro důkaz obrácené nerovnosti si uvědomme, že díky konečnosti $\chi(X_1)$ a $\chi(X_2)$ máme $\chi(X_1) = \chi(X_2) = 1$. Tedy obrácená nerovnost jistě platí.

Nechť nyní $\varphi = w$. Stejně jako výše si stačí uvědomit, že je-li $\mathcal{B}_1$ báze X_1 a $\mathcal{B}_2$ báze X_2 , je $\mathcal{B} = \{B_1 \times B_2; B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2\}$ báze X . Tím máme nerovnost $w(X) \leq w(X_1) \cdot w(X_2)$.

Obráceně uvažujme bázi $\mathcal{B}$ prostoru X . Nechť $w(X_1) = n_1$ a $w(X_2) = n_2$. Vezměme báze $\mathcal{B}_i$ prostorů X_i splňující $|\mathcal{B}_i| = n_i$, $i = 1, 2$.

Uvažujme $i \in \{1, 2\}$ pevné. Z konečnosti báze $\mathcal{B}_1$ plyne, že každý bod $x \in X_1$ má minimální (ve smyslu inkluze) okolí U_x . Nechť $B \in \mathcal{B}_1$ splňuje $x \in B \subset U_x$. Pak z minimality U_x plyne $B = U_x$. Tedy ono minimální okolí U_x patří do $\mathcal{B}_1$ pro každé $x \in X$. Pak je množina $\mathcal{A}_1 = \{U_x; x \in X\} \subset \mathcal{B}_1$ a je to báze, tedy $|\mathcal{A}_1| = |\mathcal{B}_1| = n_1$.

Obdobně ověříme, že systém minimálních okolí $\{U_y; y \in X_2\}$ je báze o velikosti n_2 . Nechť nyní $\mathcal{A} = \{U_1 \times U_2; U_1 \in \mathcal{A}_1, U_2 \in \mathcal{A}_2\}$. Pro každé $U_1 \in \mathcal{A}_1$ a $U_2 \in \mathcal{A}_2$ zvolíme $x_{U_1} \in U_1$ a $y_{U_2} \in U_2$ tak, že U_1 je minimální okolí x_{U_1} a U_2 je minimální okolí y_{U_2} .

Nechť $B_{(U_1, U_2)} \in \mathcal{B}$ splňuje

$$(x_{U_1}, y_{U_2}) \in B_{(U_1, U_2)} \subset U_1 \times U_2.$$

Pak $\pi_1(B_{(U_1, U_2)})$ je otevřené okolí x_{U_1} obsažené v U_1 , tedy $\pi_1(B_{(U_1, U_2)}) = U_1$. Analogicky $\pi_2(B_{(U_1, U_2)}) = U_2$. Tedy $B_{(U_1, U_2)} = U_1 \times U_2$ a báze $\mathcal{B}$ obsahuje alespoň všechny prvky systému $\mathcal{A}$. Proto $|\mathcal{B}| \geq n_1 \cdot n_2$ a druhá nerovnost je tak dokázána.

Nechť nyní $\varphi = d$. Zjevně je součin dvou hustých množin hustý v součinu, takže $d(X) \leq d(X_1) \cdot d(X_2)$.

Pro obrácenou nerovnost uvažujeme prostor X_1 s $d(X_1) = n_1 \in \mathbb{N}$. Ukážeme matematickou indukci, že pro každý prostor X_2 splňující $d(X_2) \in \mathbb{N}$ platí $d(X_1 \times X_2) \geq d(X_1) \cdot d(X_2)$.

Pokud $d(X_2) = 1$ a $D \subset X$ je hustá množina, je i $\pi_1(D)$ hustá. Tedy $|D| \geq n_1$. Proto

$$d(X) \geq n_1 \cdot 1 = d(X_1) \cdot d(X_2).$$

Nechť nyní naše tvrzení platí pro každé $k \in \{1, \dots, n_2\}$, kde $n_2 \in \mathbb{N}$. Ukážeme jeho platnost pro $n_2 + 1$. Nechť D je hustá množina v X a $D_2 = \{y_1, \dots, y_{n_2+1}\}$ hustá v X_2 . Označme $V = X_2 \setminus \{y_{n_2+1}\}$ a $W = X_2 \setminus \{y_1, \dots, y_{n_2}\}$. Díky předpokladu $d(X_2) = n_2 + 1$ vidíme, že V, W jsou neprázdné otevřené disjunktní množiny. Dále $d(V) \geq n_2$. Vskutku, kdyby byla menší, z inkluze

$$X_2 = \overline{\{y_1, \dots, y_{n_2+1}\}} = \overline{\{y_1, \dots, y_{n_2}\}} \cup \overline{\{y_{n_2+1}\}} \subset \overline{V} \cup \overline{\{y_{n_2+1}\}}$$

platné díky $V \subset \overline{\{y_1, \dots, y_{n_2}\}}$ by plynulo $d(X_2) < n_2 + 1$, což by byl spor.

Pak $X_1 \times V$ je otevřená množina v X , takže $D \cap (X_1 \times V)$ je hustá v $X_1 \times V$. Z indukčního předpokladu dostáváme $|D| \geq n_1 \cdot n_2$. Dále $E = D \cap (X_1 \times W)$ je též hustá v $X_1 \times W$. Tedy i její projekce $\pi_1(E)$ je hustá v X_1 . Proto $|E| \geq |\pi_1(E)| \geq n_1$. Dohromady máme

$$|D| = |D \cap (X_1 \times V)| + |D \cap (X_1 \times W)| \geq n_1 \cdot n_2 + n_1 = n_1(n_2 + 1).$$

Jelikož D byla libovolná hustá množina, je $d(X) \geq n_1(n_2 + 1)$.

(b) Nechť nyní pracujeme s nekonečnými kardinály. Horní odhady pro $\varphi(X)$ plynou snadno z pozorování, že součin bází je báze součinu, součin hustých podmnožin je hustá podmnožina součinu a součin bází je báze v součinu.

Dolní odhady pak plynou z faktu, že projekce báze součinu je báze, podobně projekce husté množiny je hustá a projekce báze okolí bodu je báze okolí bodu. $\square$

Pro součin nekonečně aspoň dvoubodových prostorů je úloha složitější (kromě součinu indiskrétních prostorů). Pro hustotu budeme potřebovat logaritmus kardinálního čísla. Je-li κ kardinální číslo, definujeme $\log \kappa = \min\{\lambda; 2^\lambda \geq \kappa\}$. Např. logaritmus mohutnosti reálných čísel je ω ($\log 2^\omega = \omega$).

V následujícím důkazu použijeme následující tvrzení.

Lemma 2.40. Vztah váhy a hustoty

Je-li X regulární, platí $w(X) \leq 2^{d(X)}$. Důsledkem je nerovnost $d(2^I) \geq \log |I|$.

Důkaz. Regulární prostor X má otevřenou bázi složenou z regulárně otevřených množin (vizte Fakt 1.68) (připomeňme, že G je regulárně otevřená, pokud G je vnitřek $\overline{G}$). Je-li S hustá v X a G regulárně otevřená, je $G = \text{Int}(\overline{G}) = \text{Int}(\overline{G \cap S})$. Toto zobrazení $G \rightsquigarrow G \cap S$, kde G probíhá bázi z regulárně otevřených množin, je prosté, což dokazuje tvrzení. Důsledek plyne z rovnosti $w(2^I) = |I|$ (vizte následující Větu 2.41(b)). $\square$

Věta 2.41. Kardinální funkce na součinech

At $X = \prod_I X_i$ je součin nekonečně mnoha aspoň dvoubodových prostorů, které nejsou indiskrétní.

- (a) $\chi(X) = \sup_I \{\chi(X_i)\} + |I|$;
- (b) $w(X) = \sup_I \{w(X_i)\} + |I|$;
- (c) $d(X) \leq \sup_I \{d(X_i)\} + \log |I|$ (rovnost platí, obsahuje-li každý prostor X_i dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny)..

Důkaz. (a) a (b) Víme, že $\chi \leq w$ a že kanonická otevřená báze v X má mohutnost $\sup_I \{w(X_i)\} + |I|$, což je tedy i horní odhad pro $w(X)$. Protože projekce báze okolí bodu $x \in X$ na X_i je bází okolí bodu $\pi_i(x)$ v X_i ,

je $\chi(X) \geq \sup_I \{w(X_i)\}$. Podle předpokladu existuje v každém X_i neprázdná otevřená množina G_i různá od X_i . Zvolme $a_i \in G_i, b_i \in X_i \setminus G_i$. Je-li $\mathcal{U}$ báze okolí bodu $a = \{a_i\}$, pak její průnik neobsahuje žádný bod mající nějakou souřadnici b_i . Pro každé $U \in \mathcal{U}$ uvažujme báze okolí V_U splňující $a \in V_U \subset U$. Pak $\mathcal{V} = \{V_U; U \in \mathcal{U}\}$ je lokální báze a a $|\mathcal{V}| \leq |\mathcal{U}|$. Pro každou $V \in \mathcal{V}$ uvažujme konečnou množinu $I_V \subset I$,

kteřá určuje tuto bázeovou množinu. Pokud existuje $i \in I \setminus \bigcup_{V \in \mathcal{V}} I_V$, pak bod $b = b(j) \begin{cases} a_j, & j \in I \setminus \{i\}, \\ b_i, & j = i, \end{cases}$

splňuje $b \in \bigcap \mathcal{V} \subset \bigcap \mathcal{U}$. To je však spor s vlastností $\mathcal{U}$ zmíněnou výše. Tedy $\bigcup_{V \in \mathcal{V}} I_V = I$. Pokud by tedy $|\mathcal{V}| < |I|$, měli bychom $|I| = |\bigcup_{V \in \mathcal{V}} I_V| \leq |\mathcal{V}| < |I|$, co by byl spor.

Takže $|\mathcal{U}| \geq |\mathcal{V}| \geq |I|$, čímž dostáváme hledanou nerovnost $\chi(X) \geq |I|$.

(c) *Krok 1.* Stačí dokázat, že $d(D^{2^\lambda}) \leq \lambda$ pro diskrétní prostor D , kde $|D| = \lambda$ pro nekonečný kardinál λ .

Pak totiž pro položíme $\lambda = \log |I| + \sup_I \{d(X_i)\}$ a vezmeme husté množiny S_i v X_i mohutnosti $d(X_i)$ a surjekce $f_i: D \rightarrow S_i$. Součin $\prod_I f_i: D^I \rightarrow \prod_{i \in I} S_i$ je spojitá surjekce. Součin D^I má podle předpokladu hustou část mohutnosti λ (protože $|I| \leq 2^\lambda$), a tedy i $d(X) \leq d(\prod_{i \in I} D_i) \leq \lambda$.

Krok 2. Zbývá tedy dokázat, že $d(D^{2^\lambda}) \leq \lambda$. Kanonická báze $\mathcal{B}$ v Cantorově prostoru 2^λ má mohutnost λ . Definujme $S \subset D^{2^\lambda}$ následovně:

$$S = \{h \in D^{2^\lambda}; \text{ existují disjunktní } B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}, n \in \mathbb{N}, h \text{ konstantní na každé z množin } B_1, \dots, B_n, 2^\lambda \setminus \bigcup B_k\}.$$

Jelikož konečných podmnožin $\mathcal{B}$ je λ a $|D| = \lambda$, platí $|S| \leq \lambda$. Ukážeme, že $\bar{S} = D^{2^\lambda}$.

Ať G je bázeová otevřená množina v D^{2^λ} , tedy $G = \bigcap_K \pi_{u_k}^{-1}(d_k)$, kde K je konečná množina, $u_k \in 2^\lambda$ jsou různé body a $d_k \in D$. Existují disjunktní množiny $B_k \in \mathcal{B}$ takové, že $u_k \in B_k$ pro $k \in K$ (2^λ je normální). Vybereme $d \in D$ a položíme $h: 2^\lambda \rightarrow D$ jako

$$h(u) = \begin{cases} d_k, & u \in B_k, k \in K, \\ d, & u \in 2^\lambda \setminus \bigcup_{k \in K} B_k. \end{cases}$$

Pak $h \in S$ a zároveň $h \in G$. Tedy S je hustá v D^{2^λ} . Tím je nerovnost v (c) dokázána.

Pro tvrzení v závorce v (c) musíme ukázat, že $d(X) \geq \log |I|$, protože nerovnost $d(X) \geq d(X_i)$ plyne z toho, že $X_i \neq \emptyset$ (dokonce $|X_i| \geq 2$) a X_i je homeomorfní rektu součinu (vizte Fakt 2.35).

Předpokládejme, že $d(X) < \log |I|$ a S je hustá podmnožina $d(X)$ mohutnosti menší než $\log |I|$. Označme $G_{i,0}, G_{i,1}$ dvě disjunktní neprázdné otevřené množiny v X_i , $i \in I$, a definujme zobrazení $\varphi: X \rightarrow 2^I$ následovně:

$$\varphi(x)(i) = \begin{cases} 0, & x(i) \in G_{i,0}, \\ 1, & x(i) \notin G_{i,0}, \end{cases} \quad i \in I.$$

Ukážeme, že $\varphi(S)$ je hustá množina v 2^I . Ať H je kanonická otevřená množina v 2^I , tj.

$$H = \{t \in 2^I; t(i_1) = \varepsilon_1, \dots, t(i_k) = \varepsilon_k\},$$

kde $i_1, \dots, i_k \in I$, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{0, 1\}$ a $k \in \mathbb{N}$. Uvažujme kanonickou otevřenou množinu O v X vytvořeno jako

$$O = \{x \in X; x_{i_1} \in G_{i_1, \varepsilon_1}, \dots, x_{i_k} \in G_{i_k, \varepsilon_k}\}.$$

Průnik $S \cap O$ obsahuje nějaký bod x . Pak je zřejmé, že $\varphi(x) \in \varphi(S) \cap H$, což dokazuje naše tvrzení o hustotě $\varphi(S)$.

Tím však již máme spor s předchozím Lemmatem 2.40, neboť $|\varphi(S)| < \log |I|$. □

Důsledek 2.42. Separabilita součinu

Součin nejvýše kontinuum mnoha separabilních prostorů je separabilní.

2.4.3 Zachovávání vlastností kvocienty

Na rozdíl od podprostorů se mnohem méně topologických vlastností zachovává kvocienty. Více vlastností se zachovává otevřenými nebo uzavřenými zobrazeními.

Po definici kvocientu jsme uvedli příklad ztotožnění množin $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{P}$ každou do jednoho bodu. Výsledkem je dvoubodový indiskrétní prostor. Kvocientové zobrazení je dokonce otevřené. Takže kvocientová otevřená zobrazení nezachovávají T_i vlastnost pro žádné i , ani metrizovatelnost a uspořadatelnost. Indiskrétní prostor je úplně regulární i normální a nuldimenzionální. Pro tyto třídy prostorů máme následující příklady.

Příklady 2.43. Jednoduché příklady na vlastnosti kvocientů

1. Ať Y je kvocient $\mathbb{R}$ vzniklý ztotožněním množiny iracionálních čísel do jednoho bodu p a f je příslušné kvocientové zobrazení. Prostor Y není regulární. Uzavřená množina $F \setminus \{1/n; n \in \mathbb{B}\} \cup \{0\}$ v Y nelze oddělit od bodu p otevřenými množinami, protože každá otevřená množina v Y obsahující F obsahuje i p .
2. Vezmeme-li místo $\mathbb{R}$ množinu $\mathbb{P}$ iracionálních čísel, v něm spočetnou hustou množinu S a ztotožníme $\mathbb{P} \setminus S$ do bodu p , můžeme zopakovat postup z předchozího příkladu. Navíc je $\mathbb{P}$ nuldimenzionální a uvedený kvocient není nuldimenzionální, protože $\mathbb{P} \setminus S$ je hustý v $\mathbb{P}$. $\square$

Předchozí dvě kvocientová zobrazení nejsou otevřená. Následující velmi silný Isbellův výsledek je úplným řešením situace

Věta 2.44. Otevřená spojitá zobrazení

Každý topologický prostor je kvocient při otevřeném zobrazení T_4 -prostoru.

Důkaz. Ať X je libovolný topologický prostor a κ je regulární kardinál, $\kappa \geq |X|$. Existuje κ disjunktních podmnožin $S_\alpha \subset \kappa$, $\alpha \in \kappa$, mohutnosti κ a bijekce $\varphi: X \times \kappa \rightarrow \kappa$. Množina $G \subset X \times \kappa$ je otevřená, jestliže pro každý bod $(x, \alpha) \in X \times \kappa$ existuje okolí U bodu x v X a $S' \subset S_{\varphi(x, \alpha)}$, $|S_{\varphi(x, \alpha)} \setminus S'| < \kappa$ tak, že $U \times S' \subset G$. Snadno se ukáže, že takto definované otevřené množiny jsou topologie a projekce $\pi_X: X \times \kappa \rightarrow X$ je spojitá a otevřená zobrazení.

Zbývá ukázat, že $X \times \kappa$ je nuldimenzionální T_4 -prostor. Tady jsem zatím skončil, rekonstruovat důkazy Isbella je někdy s potížema. Nicméně doufám, že to časem dokončím $\square$

Uzavřená kvocientová zobrazení zachovávají více vlastností. Asi nejjednoduššími příklady uzavřených kvocientových zobrazení je ztotožnění do bodu každé uzavřené množiny A_i z konečného počtu $A_1, \dots, A_n$.

Je zřejmé, že kvocient T_1 -prostoru je T_1 -prostor, právě když kvocientové zobrazení je uzavřené. Standardní příklad na nezachování T_0 -vlastnosti kvocientem je prostor $\mathbb{Z}$ s otevřenými množinami (n, ∞) , $n \in \mathbb{Z}$, kde ztotožníme sudá čísla do jednoho bodu a lichá čísla do jiného bodu. Kvocientem je indiskrétní prostor a kvocientové zobrazení je otevřené i uzavřené. Hausdorffovost ani regularita se nezachovává uzavřeným zobrazením: stačí vzít T_3 -prostor, který není normální a ztotožnit dvě uzavřené množiny, které nelze oddělit otevřenými množinami, do dvou bodů.

Vějíř vytvořený jako kvocient sumy spočetně mnoha intervalů $[0, 1]$ ztotožněním všech nul není metrizable a kvocientové zobrazení je uzavřené. Protože každý kompaktní metrizable prostor je spojitým obrazem Cantorovy množiny, nezachovává uzavřené kvocientové zobrazení ani nuldimenzionalitu. Zatím jsme se nezmínili o normálních prostorech, důvod ukáže následující tvrzení.

Tvrzení 2.45. Kvocient normálního prostoru

Kvocient normálního nebo T_4 -prostoru podle uzavřeného zobrazení je normální (resp. T_4 -prostor).

Důkaz. Ať $f: X \rightarrow Y$ je uzavřené kvocientové zobrazení a X je normální. Vezmeme dvě disjunktní uzavřené množiny F_1, F_2 v Y . Potom $f^{-1}(F : i)$ jsou uzavřené disjunktní množiny v X a existují dvě disjunktní otevřené množiny $G_i \supset f^{-1}(F : i)$. Množiny $Y \setminus f(X \setminus G_i)$ jsou otevřené, disjunktní a obsahují F_i . Protože f zachovává T_1 -vlastnost, tvrzení platí i pro T_4 -prostory. $\square$

Jak se chovají kardinální funkce vzhledem ke kvocientům?

Věta 2.46. Kardinální funkce a kvocient

Ať $f: X \rightarrow Y$ je kvocientové zobrazení. Pak platí následující tvrzení.

- (a) $d(Y) \leq d(X)$.
- (b) Je-li f otevřené, je $w(Y) \leq w(X)$, jinak nemusí existovat vztah mezi $w(X)$ a $w(Y)$.
- (c) Je-li f otevřené, je $\chi(Y) \leq \chi(X)$, jinak nemusí existovat vztah mezi $\chi(X)$ a $\chi(Y)$.

Důkaz. Tvrzení pro hustotu platí obecněji: je-li $f: X \rightarrow Y$ spojitá zobrazení, je $d(f(X)) \leq d(X)$. Tvrzení v (b) a (c) pro otevřená zobrazení jsou také jednoduchá: otevřený obraz otevřené báze v X je otevřená báze v Y a podobně otevřený obraz otevřené lokální báze je lokální báze. Příklad vějíře před Tvrzením 2.45 ukazuje, že uzavřené kvocientové zobrazení může zvýšit jak váhu, tak charakter. $\square$

Existuje mnoho tvrzení, které za dalších podmínek na kvocientové zobrazení ukazuje zachovávání některých vlastností (např. kdy kvocient metrizovatelného prostoru je metrizovatelný).

2.4.4 Zachovávání vlastností sumou

Tato část je nejjednodušší a nejméně zajímavá. Vnoření X_i do $\coprod_I X_i$ je otevřené i uzavřené na obojetný podprostor, takže všechny T_i -vlastnosti, regularita, úplná regularita, normalita, metrizovatelnost i nuldimenzionalita se zachovává. Trochu pozor se musí dávat u kardinálních funkcí, ale i pro ně jsou výsledky i jejich důkazy jednoduché.

Tvrzení 2.47. Kardinální funkce versus sumy

Ať $X = \coprod_I X_i$ a $\varphi \in \{w, d\}$. Pak $\varphi(X) = \sup_I \{\varphi(X_i)\} + |I|$, $\chi(X) = \sup_I \{\chi(X_i)\}$

2.5 Shrnutí

Přehled zachovávání vlastností jednotlivými operacemi. Symbol (+) znamená zachovávání pojmu alespoň na spočetný součin nebo sumu.

	$T_0, T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$	T_4	separabilní	spoč. báze	spoč. charakter	metr.
podprostor	+	-	-	+	+	+
(spočetná) suma	+	+	-(+)	-(+)	+	+
kvocient	-	-	+	-	-	-
(spočetný) součin	+	-	-(+)	-(+)	-(+)	-(+)

Všimněme si především vybočujících vlastností normality, která se nezachovává ani součinem (Sorgenfreyova přímka) ani podprostorem (obdélník Dieudonného 2.33). Normalita se zachovává uzavřeným podprostorem.

[Tabulku rozšíříme, nebude jednoduché zvolit, jak.](#)

Uvedeme nyní jeden z nejdůležitějších pojmů v topologii, a to kompaktní prostory. V jistém smyslu se dá říci, že zobecňují konečné prostory. Kompaktnost má mnoho charakterizací a z nich se jako definice obvykle uvádí popis pomocí pokrytí (je to možná historický důsledek, protože kompaktnost má svůj počátek v Borelově větě z r.1894 o konečném podpokrytí uzavřených omezených intervalů v $\mathbb{R}$). Uvidíme, že podstatné vlastnosti má kompaktnost pro Hausdorffovy prostory. Z tohoto důvodu se někdy definují kompaktní prostory jen jako Hausdorffovy (na to je třeba dávat pozor). Naše definice bude obecná.

Pokrytí i speciální případ otevřená pokrytí byla definována v 1.77. Navíc můžeme dodat, že podmnožina pokrytí, která je také pokrytím, se nazývá podpokrytí.

3.1 Kompaktní prostory

Definice 3.1. Definice kompaktnosti

1. Topologický prostor se nazývá *kompaktní*, pokud z každého otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
2. Topologický prostor se nazývá *spočetně kompaktní*, pokud z každého spočetného otevřeného pokrytí lze vybrat konečné podpokrytí.
3. Topologický prostor se nazývá *Lindelöfův*, pokud z každého otevřeného pokrytí lze vybrat spočetné podpokrytí. □

Je dobré si uvědomit, že je ekvivalentní místo uvedeného podpokrytí s danou omezenou mohutností požadovat otevřené zjemnění se stejně omezenou mohutností. Místo libovolného otevřeného pokrytí můžeme tedy uvažovat otevřené pokrytí s vhodnějšími množinami.

Přímo z definice vyplývá, že prostor je kompaktní, právě když je současně spočetně kompaktní a Lindelöfův. Prostor X , který obsahuje spočetnou uzavřenou diskrétní podmnožinu D , není spočetně kompaktní (vezme se otevřené pokrytí $\{X \setminus D\} \cup \{U_d; d \in D\}$, kde $U_d \cap D = \{d\}$). Podobně se zjistí, že prostor, který má nespočetnou uzavřenou diskrétní podmnožinu, není Lindelöfův.

Kompaktnost má kromě uvedených spočetných kompaktností a Lindelöfových vlastností mnoho dalších forem blízkých kompaktnosti (sekvenciální kompaktnost, pseudokompaktnost, hemikompaktnost, parakompaktnost, reálnou kompaktnost), ale nejdůležitější je ve svém základním významu. Ostatní možnosti se používají v případě, že zkoumaný prostor není kompaktní, ale v nějakém smyslu má ke kompaktnosti blízko. O některých z uvedených forem se zmíníme v dalším textu.

Je známo z metrických prostorů a ukážeme to i v příští kapitole, že pro ně je ekvivalentní být separabilní, mít spočetnou váhu, být Lindelöfův a že je ekvivalentní být spočetně kompaktní, kompaktní (i sekvenciálně kompaktní, pseudokompaktní).

Příklady 3.2. Jednoduché příklady

1. Každý konečný prostor je kompaktní, tedy např. Sierpiňského prostor. Každý nejvýše spočetný prostor je Lindelöfův.
2. Diskrétní prostor je kompaktní, právě když je spočetně kompaktní, právě když je konečný, Diskrétní prostor je Lindelöfův, právě když je nejvýše spočetný.
3. Každý indiskrétní prostor je kompaktní.
4. Každý prostor s ko-konečnou topologií je kompaktní. Každý prostor s ko-spočetnou topologií je Lindelöfův (a není kompaktní, pokud je nespočetný).

5. $\mathbb{R}$ ani otevřený interval $(0, 1)$ nejsou kompaktní.

6. Prostor s jedním hromadným bodem je kompaktní, právě když doplněk každého okolí hromadného bodu je konečný (tedy prostor $\mathbb{N}_\xi$ není kompaktní). $\square$

Ukážeme nyní několik jednoduchých charakterizací kompaktnosti, složitější uvedeme později (pro definici centrovaného systému viz Úvodní část o filtrech).

Věta 3.3. Charakterizace kompaktnosti

Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) X je kompaktní.
- (ii) Každý centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik.
- (iii) Každý filtr má hromadný bod.
- (iv) Každý ultrafiltr má limitu.
- (v) Každý usměrněný soubor v X má hromadný bod.

Důkaz. Implikace (i) $\implies$ (ii): Ať $\mathcal{F}$ je centrovaný systém v X sestávající z uzavřených množin a předpokládejme pro spor, že má prázdný průnik. Uvažujme systém otevřených množin $\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$. Pak je systém $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí X , neboť

$$X = X \setminus \emptyset = X \setminus \bigcap \{F; F \in \mathcal{F}\} = \bigcup \{X \setminus F; F \in \mathcal{F}\} = \bigcup \mathcal{U}.$$

Tedy existuje konečné podpokrytí $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ prostoru X . Víme, že $U_i = X \setminus F_i$ pro nějaká $F_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, n$. Pak ovšem

$$F_1 \cap \dots \cap F_n = (X \setminus U_1) \cap \dots \cap (X \setminus U_n) = X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n) = \emptyset,$$

což je spor s centrovaností systému $\mathcal{F}$.

Implikace (ii) $\implies$ (iii): Ať $\mathcal{F}$ je filtr na prostoru X . Pak systém $\{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$ je centrovaný, takže existuje $x \in X$ splňující $x \in \bigcap \{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$. Tedy x je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$.

(iii) $\implies$ (iv): Jelikož je hromadný bod ultrafiltru jeho limitou, máme požadovaný závěr.

(iv) $\implies$ (v): Ať $\{x_i\}_{i \in I}$ je usměrněný soubor v X . Položme $F_i = \{x_j : j \geq i\}$, $i \in I$. Pak je $\{F_i; i \in I\}$ centrovaný systém uzavřených množin, tedy lze vložit do nějakého ultrafiltru $\mathcal{U}$. Nechť $x \in X$ je limita $\mathcal{U}$, tj. $x \in \bigcap \{\overline{U}; U \in \mathcal{U}\}$. Pak x je hromadným bodem $\{x_i\}_{i \in I}$.

Vskutku, nechť V je otevřená množina obsahující x a $i \in I$ je dáno. Protože V i F_i jsou v $\mathcal{U}$, platí $V \cap F_i \neq \emptyset$. Tedy $V \cap \{x_j; j \geq i\} \neq \emptyset$ (jelikož V je otevřená). Existuje tak $j \geq i$ splňující $x_j \in V$. Tedy x je hromadný bod $\{x_i\}_{i \in I}$.

Implikaci (v) $\implies$ (i) dokážeme sporem. Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí X , které nemá konečné podpokrytí. Pak ke každé konečné $\mathcal{F} \subset \mathcal{U}$ existuje bod $x_{\mathcal{F}} \in X \setminus \bigcup \mathcal{F}$. Uspořádejme konečné podmnožiny $\mathcal{U}$ pomocí inkluze a uvažujme usměrněný soubor $(x_{\mathcal{F}})_{\mathcal{F}}$. Ten má nějaký hromadný bod $x \in X$. Ovšem $\mathcal{U}$ je pokrytí, a tedy existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $x \in U$. Nechť $\mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ konečná sestává z množiny U , tj. $\mathcal{H} = \{U\}$. Z definice hromadného bodu existuje $\mathcal{F} \supset \mathcal{H}$ konečná taková, že $x_{\mathcal{F}} \in U$. To je ovšem spor s faktem $x_{\mathcal{F}} \in X \setminus \bigcup \mathcal{F} \subset X \setminus U$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Jen s formální úpravou důkazu se dostanou následující podobné charakterizace spočetné kompaktnosti a Lindelöfovosti.

Věta 3.4. Charakterizace spočetné kompaktnosti

Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) X je spočetně kompaktní.
- (ii) Každý spočetný centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik.
- (iii) Každá posloupnost v X má hromadný bod.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Ať $\mathcal{F}$ je spočetný centrovaný systém v X sestávající z uzavřených množin a předpokládejme pro spor, že má prázdný průnik. Uvažujme spočetný systém otevřených množin $\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$.

Pak je systém $\mathcal{U}$ spočetné otevřené pokrytí X . Tedy existuje konečné podpokrytí $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \mathcal{U}$ prostoru X . Víme, že $U_i = X \setminus F_i$ pro nějaká $F_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, \dots, n$. Pak ovšem

$$F_1 \cap \dots \cap F_n = (X \setminus U_1) \cap \dots \cap (X \setminus U_n) = X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n) = \emptyset,$$

což je spor s centrováností systému $\mathcal{F}$.

(ii) $\implies$ (iii): Ať $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost v X . Položme $F_n = \overline{\{x_k : k \geq n\}}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak je $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ centrovaný systém uzavřených množin, tedy existuje $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Pak x je hromadným bodem $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

(iii) $\implies$ (i): Předpokládejme, že $\mathcal{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je spočetné otevřené pokrytí X , které nemá konečné podpokrytí. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)$. Posloupnost $\{x_n\}$ má nějaký hromadný bod $x \in X$. Ovšem $\mathcal{U}$ je pokrytí, a tedy existuje $k \in \mathbb{N}$ splňující $x \in U_k$. Z definice hromadného bodu existuje $n > k$ v $\mathbb{N}$ takové, že $x_n \in U_k$. To je ovšem spor s faktem

$$x_n \in U_k \cap (X \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_n)) \subset U_k \cap (X \setminus U_k) = \emptyset.$$

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Lze charakterizovat i Lindelöfovy prostory pomocí hromadných bodů jistých usměrněných souborů (je tzv. spočetné usměrněná), ale nepoužívá se.

Věta 3.5. Charakterizace Lindelöfovosti

Pro topologický prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

(i) X je Lindelöfův,

(ii) každý spočetně centrovaný systém z uzavřených množin má neprázdný průnik (jinými slovy, každý filtr se spočetnou průnikovou vlastností má hromadný bod),

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Ať $\mathcal{F}$ je spočetně centrovaný systém v X sestávající z uzavřených množin a předpokládejme pro spor, že má prázdný průnik. Uvažujme systém otevřených množin $\mathcal{U} = \{X \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$. Pak je systém $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí X . Tedy existuje spočetné podpokrytí $\mathcal{V} = \{U_i; i \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{U}$ prostoru X . Víme, že $U_i = X \setminus F_i$ pro nějaká $F_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$. Pak ovšem

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} F_i = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} (X \setminus U_i) = X \setminus \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i = X \setminus X = \emptyset,$$

což je spor se spočetnou centrováností systému $\mathcal{F}$.

(ii) $\implies$ (i): Necht $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí X . Předpokládejme, že nemá spočetné podpokrytí a uvažujme systém $\mathcal{F} = \{X \setminus U; U \in \mathcal{U}\}$. Pak pro libovolný spočetný podsystém $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ máme odpovídající spočetný podsystém $\mathcal{U}'$, takže

$$\bigcap \mathcal{F}' = \bigcap \{X \setminus U; U \in \mathcal{U}'\} = X \setminus \bigcup \mathcal{U}' \neq \emptyset.$$

Tedy $\mathcal{F}$ je spočetně centrovaný systém uzavřených množin. Dle (ii) je jeho průnik neprázdný, což ale díky rovnosti

$$\emptyset \neq \bigcap \mathcal{F} = \bigcap \{X \setminus U; U \in \mathcal{U}\} = X \setminus \bigcup \mathcal{U} = \emptyset$$

vede ke sporu. $\square$

Do Úvodu, část filtry, doplnit spočetnou centrovánost a spočetnou průnikovou vlastnost filtrů - tzv. spočetnou úplnost.

Příklady 3.6. Složitější příklady

1. Uspořádaný prostor je kompaktní, právě když je jeho definující uspořádání úplným svazem.

Necht $(X, \leq)$ je úplný svaz a $\mathcal{F}$ je filtr v X . Pro každou množinu $F \in \mathcal{F}$ vezmeme $x_F = \sup F$ a $y_F = \inf\{x_H; H \in \mathcal{F}, H \subset F\}$. Všimněme si, že pro $F_1 \subset F_2$ máme $x_{F_1} \leq x_{F_2}$ a $y_{F_2} \leq y_{F_1}$.

Ukážeme, že $z = \sup\{y_F; F \in \mathcal{F}\}$ je hromadným bodem filtru $\mathcal{F}$. Necht U je otevřený interval obsahující z a necht $F_1 \in \mathcal{F}$ je dána. Necht $F_0 \in \mathcal{F}$ splňuje $y_{F_0} \in U$. Položme $F_2 = F_1 \cap F_0 \subset F_0$. Pak $y_{F_1} \leq y_{F_2} \leq z$, tedy $y_{F_2} \in U$. Dále existuje $H \subset F_2$, $H \in \mathcal{F}$, splňující $x_H \in U$. Konečně nalezneme $x \in H$ takové, že $x \in U$. Pak $x \in H \cap U \subset F_2 \cap U \subset F_1 \cap U$, tj. z je hromadným bodem $\mathcal{F}$.

Pokud $(X, \leq)$ není úplný svaz, ať existuje $A \subset X$, která nemá v X supremum. Vezmeme otevřené systémy

$$\mathcal{S} = \{(\leftarrow, a); a \in A\} \quad \text{a} \quad \mathcal{T} = \{(h, \rightarrow); h \text{ je horní mez množiny } A\}$$

(jedna ze soustav $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ může být prázdná). Pak $X = \bigcup (\mathcal{S} \cup \mathcal{T})$. Vskutku, je-li $x \in X$, pak buďto existuje $a \in A$ splňující $x < a$, a pak $x \in \bigcup \mathcal{S}$, anebo $x \geq a$ pro každé $a \in A$. Pak x je horní závora A , která však nemůže být nejmenší horní závora (připomeňme, že A nemá supremum). Tedy existuje horní závora $h \in X$ množiny A , která je menší než x . Pak tedy $x \in \bigcup \mathcal{T}$.

Nyní ověříme, že z našeho pokrytí nelze vybrat konečné podpokrytí. Vskutku, nechť

$$\mathcal{S}' = \{(\leftarrow, a_i); a_1, \dots, a_n \in A\} \subset \mathcal{S} \quad \text{a} \quad \mathcal{T}' = \{(h_j, \rightarrow); h_1, \dots, h_m \text{ jsou horní závory } A\} \subset \mathcal{T}$$

jsou konečné systémy splňující $X = \bigcup (\mathcal{S}' \cup \mathcal{T}')$. Nechť $a = \max\{a_1, \dots, a_n\}$ a $h = \min\{h_1, \dots, h_m\}$. Pak $X = (\leftarrow, a) \cup (h, \rightarrow)$. Avšak neprázdný interval $[a, h]$ tak není pokrytý, což je spor.

Mohl by též nastat případ, kdy A nemá horní závora, tj. systém $\mathcal{T}$ je prázdný. Pak ovšem postupujeme jako výše se systémem $\mathcal{S}$ a odvodíme, že a není pokryto $\mathcal{S}'$.

2. Uspořádaný prostor ω_1 je spočetně kompaktní a není Lindelöfův (tedy není kompaktní).

Opravdu, každá posloupnost $\{\alpha_n\}$ v ω_1 má hromadný bod. Uvažujeme totiž spočetný ordinál $\beta = \sup\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\}$, takže hodnoty posloupnosti $\{\alpha_n\}$ leží v uzavřeném intervalu $[0, \beta]$. To je uspořádaný prostor, který jest úplným svazem. Tedy dle předchozího bodu je kompaktní, takže $\{\alpha_n\}$ má hromadný bod $\alpha \in [0, \beta]$. Jelikož je topologie $[0, \beta]$ daná uspořádáním podprostorová topologie prostoru ω_1 , je α i hromadným bodem posloupnosti $\{\alpha_n\}$ v prostoru ω_1 .

Nakonec si povšimneme, že otevřené pokrytí $\{[0, \alpha); \alpha \in \omega_1\}$ nemá spočetné podpokrytí.

3. Dlouhá polopřímka L^+ je spočetně kompaktní a není Lindelöfova.

Stejně jako výše vidíme, že pokrytí $\{[0, \alpha); \alpha < \omega_1\}$ nemá spočetné podpokrytí.

Pokud $\{x_n\}$ je posloupnost v L^+ , pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $\alpha_n \in \omega_1$ tak, že $x_n \leq \alpha_n$. Ať $\alpha = \sup\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\}$. Pak podprostor $[0, \alpha] \subset L^+$ je kompaktní, neboť se jedná o topologii určenou úplným svazem.

Vskutku, $[0, \alpha] \subset L^+$ má uspořádání určeno lexikografickým uspořádáním $([0, \alpha] \cap \omega_1) \times [0, 1]$, přičemž α je největší prvek $[0, \alpha]$. Stačí tedy ukázat, že toto uspořádání je úplným svazem. Nechť $A \subset [0, \alpha]$ neprázdná je dána. Nechť

$$\beta = \min\{\gamma \in \omega_1; \gamma \text{ horní závora } A\}.$$

Pak $\beta \leq \alpha$. Pokud β má předchůdce, tj. $\beta = \delta + 1$, máme $A \cap (\delta, \beta] \neq \emptyset$. Nyní stačí použít kompaktnost $[0, 1]$, abychom ověřili, že $\sup A \in (\delta, \beta]$ existuje.

Pokud β je limitní, pak pro každý ordinál $\delta < \beta$ je $A \cap (\delta, \beta] \neq \emptyset$. Tedy $\sup A = \beta$ též existuje.

4. Isbellův-Mrówkův prostor $X = N \cup \mathcal{S}$, $|\mathcal{S}| \geq \omega$, není nikdy spočetně kompaktní, protože $\mathcal{S}$ je nekonečná uzavřená diskretní podmnožina. Pro $|\mathcal{S}| > \omega$ není tedy X ani Lindelöfův. Je-li $|\mathcal{S}| \leq \omega$, je X metrizable, je kompaktní, právě když $|\mathcal{S}| < \omega$. Pro $|\mathcal{S}| = \omega$ je X Lindelöfův (je spočetný).

5. Sorgenfreyova přímka X je Lindelöfův prostor, který nemá spočetnou otevřenou bázi.

Je zřejmé, že X není spočetně kompaktní (podmnožina $\mathbb{N}$ nemá hromadný bod). Ať $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí X . Můžeme předpokládat, že $\mathcal{G} = \{[x, b_x); x \in X\}$, kde $b_x > x$. Označme $M = \bigcup_{x \in X} (x, b_x)$. Uvažujme nyní dva body $x_1 < x_2$ v $X \setminus M$. Pak $x_2 \notin (x_1, b_{x_1})$, takže $(x_2, b_{x_2}) \cap (x_1, b_{x_1}) = \emptyset$. Proto je systém $\{(x, b_x); x \in X \setminus M\}$ disjunktní, a tedy spočetný. Tedy i množina $X \setminus M$ je spočetná. Každý podprostor $\mathbb{R}$ je Lindelöfův, takže otevřené pokrytí $\{(x, b_x); x \in X\}$ množiny M má tedy spočetné podpokrytí. Z $\mathcal{G}$ vybereme spočetné pokrytí množiny $X \setminus M$ a dohromady dostáváme spočetné podpokrytí množiny X . $\square$

Příklad 3.7. Dvě šipky

Nechť

$$X = ((0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1) \times \{1\})$$

s lexikografickým uspořádáním. Pak X s intervalovou topologií je kompaktní Hausdorffův prostor. $\square$

Důkaz. Uvažujme prostor

$$Y = ([0, 1] \times \{0\}) \cup ([0, 1] \times \{1\})$$

s topologií danou lexikografickým uspořádáním. Pak $Y = X \cup \{(0, 0) \cup (1, 1)\}$, přičemž body $(0, 0)$ a $(1, 1)$ jsou izolované v Y . Pokud tedy dokážeme, že Y je kompaktní Hausdorffův prostor, je i X , jakožto jeho uzavřený podprostor, kompaktní Hausdorffův prostor.

Prostor Y je zjevně T_2 , neboť jeho topologie je generována lineárním uspořádáním. Abychom ověřili

kompaktnost Y , stačí dle Příkladu 3.6.1 ukázat, že Y je úplným svazem. Prostor $[0, 1]$ i $\{0, 1\}$ úplným svazem jsou. K dokončení důkazu tak stačí ověřit, že součin Z dvou úplných svazů Z_1, Z_2 , který uvažujeme s lexikografickým uspořádáním, je opět úplný svaz.

Nechť tedy $A \subset Z$ je neprázdná. Pak položíme $s_1 = \sup \pi_{Z_1}(A)$. Pokud $s_1 = \max \pi_{Z_1}(A)$, položíme

$$s_2 = \sup\{z \in Z_2; (s_1, z) \in A\}.$$

Jinak nechť $s_2 = \min Z_2$. Tvrdíme, že pak $s = (s_1, s_2)$ je supremum A .

Vskutku, nechť $(t_1, t_2) \in A$ je dáno. Pak $t_1 \leq s_1$ díky volbě s_1 . Pokud $t_1 = s_1$, pak $s_2 \geq t_2$ díky volbě s_2 , takže $(t_1, t_2) \leq (s_1, s_2)$. Pokud $t_1 < s_1$, máme ihned $(t_1, t_2) < (s_1, s_2)$. Tedy (s_1, s_2) je horní závora A .

Nechť nyní $(u_1, u_2) \in Z$ je libovolná horní závora A . Pak u_1 je horní závora $\pi_{Z_1}(A)$, takže $u_1 \geq s_1$. Pokud s_1 není maximum $\pi_{Z_1}(A)$, máme $(u_1, u_2) \geq (s_1, s_2) = (s_1, \min Z_2)$. Tedy $(u_1, u_2) \geq (s_1, s_2)$.

Pokud s_1 je maximum $\pi_{Z_1}(A)$, pak buďto $u_1 > s_2$, což implikuje $(u_1, u_2) > (s_1, s_2)$, nebo $u_1 = s_1$. Pak ovšem $(u_1, u_2) = (s_1, u_2) \geq (s_1, z)$ pro každé $z \in Z_2$ splňující $(s_2, z) \in A$. Tedy $u_2 \geq s_2$ z definice s_2 . Tedy $(u_1, u_2) \geq (s_1, s_2)$ i v tomto případě.

Ukázali jsme tak, že (s_1, s_2) je vskutku supremum A , takže Z je úplný svaz. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Následující lemma ukazuje chování kompaktnosti na množinové operaci.

Lemma 3.8. Kompakty a množinové operace

Nechť X je topologický prostor a $K_i, i \in I$, jsou kompakty v X .

(a) Je-li X Hausdorffův, je průnik $\bigcap_{i \in I} K_i$ kompaktní.

(b) Pokud I je konečná, je $\bigcup_{i \in I} K_i$ kompaktní.

Důkaz. (a) Nechť $K = \bigcap_{i \in I} K_i$ je neprázdný. Zvolme $i_0 \in I$. Pak $K_i, i \in I$, jsou uzavřené, a tedy

$$\bigcap_{i \in I} K_i = K_{i_0} \cap \bigcap_{i \in I \setminus \{i_0\}} K_i$$

je uzavřená množina v kompaktu K_{i_0} , a tedy kompaktní v K_{i_0} . Proto je kompaktní v X .

(b) Díky principu matematické indukce stačí dokázat tvrzení pro kompakty K_1 a K_2 . Uvažujme otevřené pokrytí $K_1 \cup K_2$. Pak vybereme konečné podpokrytí $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ splňující $K_1 \subset \bigcup \mathcal{U}_1$ a analogicky konečné podpokrytí $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}$ pokrývající K_2 . Pak $K_1 \cup K_2 \subset \bigcup (\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2)$. $\square$

Poznámka 3.9

Povšimněme si, že Lemma 3.8(a) neplatí např. v T_1 -prostorech. Vskutku, uvažujme prostor $X = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$, kde $\mathbb{Z}$ je diskretní otevřený podprostor a okolí bodů $+\infty$ a $-\infty$ jsou v $\mathbb{Z}$ doplňky konečných množin. Pak $X_1 = \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ i $X_2 = \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ jsou kompaktní množiny, ale jejich průnik $X_1 \cap X_2 = \mathbb{Z}$ je nekompaktní.

Dále si uvědomme, že kompaktní podmnožiny nemusí být uzavřené. Vskutku, je-li X indiskretní prostor, je každá jeho podmnožina kompaktní, ale nemusí být uzavřená.

Je důležité znát, jak se kompaktnost chová vzhledem k základním konstrukcím.

Věta 3.10. Kompaktnost a konstrukce

(a) Kompaktnost, spočetná kompaktnost a lindelöfovost je uzavřeně dědičná a není dědičná.

(b) Každý spojitý obraz kompaktního prostoru (resp. spočetně kompaktního či Lindelöfova prostoru) je kompaktní (resp. spočetně kompaktní či Lindelöfův).

(c) Součin $\prod_I X_i$ neprázdných prostorů je kompaktní, právě když jsou všechny prostory X_i kompaktní (Tichonovova věta).

(d) Suma $\coprod_I X_i$ je kompaktní, právě když je množina $\{i \in I; X_i \neq \emptyset\}$ konečná a všechny prostory X_i jsou kompaktní.

Důkaz. (a) Je-li E uzavřený podprostor X a $\mathcal{U}$ pokrytí E otevřenými množinami v E , pak pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje otevřená $\hat{U} \subset X$, že $\hat{U} \cap E = U$. Označme $\hat{\mathcal{U}} = \{\hat{U} : U \in \mathcal{U}\}$. Pak $\hat{\mathcal{U}} \cup \{X \setminus E\}$ je otevřené pokrytí

X a tedy k němu existuje konečné podpokrytí $\{\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n, X \setminus E\}$. Zřejmě $\{\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_n\}$ pokrývá E , tedy $U_1, \dots, U_n$ je konečné podpokrytí E prvky z $\mathcal{U}$.

Pro spočetnou kompaktnost a Lindelöfovou vlastnost bychom postupovali podobně.

(b) Je-li $f: X \rightarrow Y$ spojitý a X kompaktní, pak pro každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ množiny $f(X)$ je $\{f^{-1}(U): U \in \mathcal{U}\}$ otevřeným pokrytím X . Tedy existuje konečné podpokrytí $\{f^{-1}(U_1), \dots, f^{-1}(U_n)\}$ prostoru X . Zřejmě $\{U_1, \dots, U_n\}$ je konečné pokrytí $f(X)$.

Důkaz zbývajících tvrzení je zcela analogický.

(c) Součin $X = \prod_I X_i$ neprázdných prostorů je neprázdný. Je-li kompaktní, je každé $X_i = \pi_i(X)$ kompaktní podle (b).

Nechť $\mathcal{F}$ je ultrafiltr na X . Máme dokázat, že $\mathcal{F}$ má hromadný bod. Pro každé $i \in I$ je obraz $\pi_i(\mathcal{F}) = \{\pi_i(F); F \in \mathcal{F}\}$ ultrafiltr na X_i . Vskutku, je-li $A \subset X_i$, pak buďto $\pi_i^{-1}(A)$ nebo $X \setminus \pi_i^{-1}(A)$ leží v $\mathcal{F}$ dle Tvrzení 0.6. V prvním případě pak $A = \pi_i(\pi_i^{-1}(A)) \in \pi_i(\mathcal{F})$, v druhém případě pak $X_i \setminus A \in \pi_i(\mathcal{F})$. Dále pro $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ platí $\pi_i(F_1) \cap \pi_i(F_2) \supset \pi_i(F_1 \cap F_2)$, tedy průnik konečně mnoha množin z $\pi_i(\mathcal{F})$ je neprázdný. Tím pádem máme uzavřenost $\pi_i(\mathcal{F})$ na nadmnožině. Vskutku, pokud $A \supset \pi_i(F)$, pak buďto $A \in \pi_i(\mathcal{F})$, nebo $X_i \setminus A \in \pi_i(\mathcal{F})$. Druhý případ však nepřichází do úvahy, neboť inkluze

$$(X_i \setminus A) \cap \pi_i(F) \subset (X_i \setminus A) \cap A = \emptyset$$

by znamenala spor s neprázdností průniků konečně mnoha množin z $\pi_i(\mathcal{F})$. Tedy $A \in \pi_i(\mathcal{F})$. Z dokázaných faktů již plyne, že $\mathcal{F}$ je filtr, a to dokonce maximální, tj. ultrafiltr.

Nechť $x_i \in X_i$ je limita $\pi_i(\mathcal{F})$, $i \in I$. Pak bod $x = \{x_i\} \in X$ je limitní bod ultrafiltru $\mathcal{F}$. K ověření tohoto faktu vezmeme báze okolí $U = \bigcap_{l=1}^n \pi_{i_l}^{-1}(U_{i_l})$, kde $i_1, \dots, i_n \in I$ a U_{i_l} jsou otevřená okolí x_{i_l} , $l = 1, \dots, n$. Pak pro každé $l \in \{1, \dots, n\}$ okolí U_{i_l} protíná každou množinu $\pi_{i_l}(F)$, $F \in \mathcal{F}$, takže $\pi_{i_l}^{-1}(U_{i_l})$ protíná každou množinu $F \in \mathcal{F}$. Proto $\pi_{i_l}^{-1}(U_{i_l})$ náleží do $\mathcal{F}$. Tedy i průnik U těchto množin náleží do $\mathcal{F}$, což bylo dokázat.

(d) Toto tvrzení plyne snadno z toho, že $\{X_i\}_I$ je otevřené pokrytí sumy. $\square$

Formálně stejný je důkaz tvrzení (a) a (b) pro spočetně kompaktní a Lindelöfovy prostory, vlastnosti (d) pro spočetně kompaktní prostory, i pro Lindelöfovy prostory se změnou na spočetnou množinu $\{i \in I; X_i \neq \emptyset\}$. Existují příklady dvou spočetně kompaktních prostorů, jejichž součin není spočetně kompaktní – jsou složitější a jeden uvedeme v další části o kompaktifikacích (Příklad 3.52). Pro Lindelöfovy prostory je příklad jednodušší: v Příkladě 3.6.5 jsme ukázali, že Sorgenfreyova přímka X je Lindelöfova a víme, že $X \times X$ obsahuje nespočetnou uzavřenou diskrétní podmnožinu (vedlejší diagonála). Prostor $X \times X$ tedy není Lindelöfův.

Z Tichonovovy věty dostáváme, že Tichonovův kvádr $[0, 1]^\kappa$ a Cantorův prostor 2^κ jsou kompaktní pro každý kardinál κ , Hilbertův kvádr $\prod_{\mathbb{N}} [0, 1/n]$ je kompaktní.

Poznamenejme ještě, že Tichonovova věta je v ZF ekvivalentní s AC. Tichonovova věta zúžená pouze na Hausdorffovy prostory je v ZF ekvivalentní s Boolean prime ideal theorem.

Uvedeme nyní několik dalších důležitých vlastností kompaktních prostorů, převážně Hausdorffových.

Tvrzení 3.11. Nabývání extrémů

Spojité reálné funkce na (spočetně) kompaktním neprázdném prostoru nabývají svého maxima a minima.

Důkaz. Nechť $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá funkce na spočetně kompaktním prostoru X . Pak $f(X)$ je spočetně kompaktní prostor, a tedy je kompaktní. Vskutku, použijeme Větu 3.4 a zafixujeme nějakou posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ v $f(X)$. Nechť $x \in f(X)$ je hromadný bod zobecněné posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^\infty$. Z definice hromadné hodnoty nyní zkonstruujeme podposloupnost $\{x_{n_k}\}$ konvergující k x . Tedy $f(X)$ je kompaktní metrický prostor, a tedy i kompaktní topologický podprostor $\mathbb{R}$.

Zbývá již jen rozmyslet, že kompaktní podmnožina $K \subset \mathbb{R}$ má maximum a minimum. Pro tento účel označme $s = \sup K \in \mathbb{R}$, to existuje díky omezenosti K v $\mathbb{R}$. Z definice suprema existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $x_n \in K \cap (s - \frac{1}{n}, s]$. Nyní nalezneme hromadný bod $x \in K$ posloupnosti $\{x_n\}$. Pak nutně $x = s$, tj. $s \in K$ je maximum K .

Analogicky bychom provedli důkaz pro minimum. $\square$

Věta 3.12. Postačující podmínka pro normalitu

- (a) *Regulární Lindelöfův topologický prostor je normální.*
- (b) *Hausdorffův kompaktní topologický prostor je T_4 .*

Důkaz. (a) Ať E, F jsou uzavřené disjunktní množiny v regulárním Lindelöfově prostoru X . Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že jsou neprázdné. Pro každé $x \in E$ najdeme otevřené množiny $U_x \subset E$, že $x \in U_x \subset \overline{U_x} \subset X \setminus F$. Systém $\{U_x : x \in E\}$ je otevřené pokrytí Lindelöfova prostoru E , tedy existuje spočetná množina $C \subset E$ taková, že $\{U_c : c \in C\}$ pokrývá E . Uspořádejme systém $\{U_c : c \in C\}$ do posloupnosti $\{U_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Podobně nalezneme posloupnost otevřených množin $\{V_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ takovou, že $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j = F$ a $\overline{V_j} \subset X \setminus E$, $j \in \mathbb{N}$.

Položme pro $j \in \mathbb{N}$

$$U_j^* = U_j \setminus \bigcup_{k=1}^j \overline{V_k} \quad \text{a} \quad V_j^* = V_j \setminus \bigcup_{k=1}^j \overline{U_k}.$$

Dále definujeme

$$U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i^* \quad \text{a} \quad V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j^*.$$

Pak U a V jsou otevřené množiny a $E \subset U$ a $F \subset V$. Vskutku, nechť $x \in E$ je libovolné. Pak existuje $i \in \mathbb{N}$ splňující $x \in U_i$. Jelikož $x \notin \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \overline{V_j}$, je $x \in U_i^* \subset U$. Podobně máme $F \subset V$.

Navíc U a V jsou disjunktní. Kdyby totiž existovalo $x \in U \cap V$, pak nalezneme indexy $i, j \in \mathbb{N}$ takové, že $x \in U_i^* \cap V_j^*$. Pokud $i \geq j$, pak $x \in U_i \setminus \bigcup_{k=1}^i \overline{V_k}$, tedy $x \notin V_j$. To je ale spor, protože $V_j \supset V_j^*$. Příklad $i \leq j$ vede ke sporu podobně. Tedy X je normální.

(b) Pro druhou část nyní stačí ukázat, že Hausdorffův kompaktní prostor X je regulární. Ať tedy $F \subset X$ je uzavřená množina a $x \in X \setminus F$. Pro každé $y \in F$ najdeme disjunktní otevřené množiny $U_y \in \mathcal{U}(x)$ a $V_y \in \mathcal{U}(y)$. Systém $\{V_y : y \in F\}$ tvoří otevřené pokrytí F . Množina F je kompaktní, tedy existuje konečné podpokrytí $V_{y_1}, \dots, V_{y_n}$ množiny F . Nyní množiny $U = U_{y_1} \cap \dots \cap U_{y_n}$ a $V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$ oddělují x od F .

Vskutku, zjevně $x \in U$ a $F \subset V$. Kdyby existovalo $z \in U \cap V$, máme $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $z \in V_{y_i}$. Pak ovšem $z \in U \cap V_{y_i} \subset U_{y_i} \cap V_{y_i} = \emptyset$, tedy U a V jsou disjunktní. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Bez uvedených předpokladů tvrzení neplatí, např. nekonečný hrubý T_1 prostor je kompaktní a není normální.

Tvrzení 3.13. Kompakty jsou uzavřené v Hausdorffových prostorech

Je-li X Hausdorffův topologický prostor a $K \subset X$ je kompaktní, pak K je uzavřená v X .

Důkaz. Ať $x \in X \setminus K$. Pro každý bod $y \in K$ existují otevřené disjunktní množiny U_y a V_y takové, že $x \in U_y$ a $y \in V_y$. Systém $\{V_y : y \in K\}$ pokrývá K , a tedy existuje konečná množina $F \subset K$ splňující $K \subset \bigcup_{y \in F} V_y$. Pak $U = \bigcap_{y \in F} U_y$ je okolí x , které je disjunktní s K . Tedy x neleží v uzávěru K . $\square$

Ani toto tvrzení neplatí bez předpokladu T_2 , opět stačí vzít hrubé T_1 prostory $X \subset Y$.

Tvrzení 3.14. Automatický homeomorfismus

Ať X, Y jsou Hausdorffovy kompaktní prostory a $f : X \rightarrow Y$ spojitě. Je-li f na, pak f je kvocientové zobrazení. Je-li f prosté, pak f je homeomorfismus X na $f(X)$.

Důkaz. Stačí ověřit, že obraz každé uzavřené množiny je uzavřená. Nicméně uzavřené množiny jsou kompaktní, spojitý obraz kompaktu je kompakt, a tedy uzavřená množina v Y . Tedy f je uzavřený, a proto kvocientové. Je-li navíc f prosté, jedná se o bijekci na Hausdorffův prostor $f(X)$. Ten je kompaktní a f je ze stejného důvodu jako v prvním případě uzavřený, tedy homeomorfismus. $\square$

Pro příklad neplatnosti bez T_2 lze vzít identické zobrazení konečného diskrétního prostoru na indiskrétní.

Poznámka 3.15

Tedy kompaktní Hausdorffova topologie τ na dané množině X je minimální Hausdorffova a maximální kompaktní. Pokud je totiž σ Hausdorffova topologie na X , která splňuje $\sigma \subset \tau$, pak je zobrazení $\text{Id} : (X, \tau) \rightarrow (X, \sigma)$ dle Tvrzení 3.14 homeomorfismus, a tedy $\tau = \sigma$. Dále pokud je σ kompaktní topologie na X splňující $\tau \subset \sigma$, pak je T_2 (neboť τ je Hausdorffova a $\tau \subset \sigma$), takže $\tau = \sigma$ z předešlé úvahy. Existují minimální Hausdorffovy prostory, které nejsou kompaktní. Pokud je minimální Hausdorffův prostor regulární, je už kompaktní.

Následující dvě tvrzení jsou snadná, ale pro jejich časté použití je uvádíme.

Lemma 3.16. Lokální subbáze v kompaktním prostoru

Je-li X kompaktní prostor a neprázdná množina $F \subset X$ je průnikem uzavřených množin $\mathcal{H}$, pak $\mathcal{H}$ je subbáze okolí množiny F (tedy pro každou $U \supset F$ otevřenou existuje $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ konečná splňující $F \subset \bigcap \mathcal{F} \subset U$).

Důkaz. Necht U je otevřená nadmnožina F . Soustava $\{U\} \cup \{X \setminus H; H \in \mathcal{H}\}$ je otevřené pokrytí X (neboť $X \setminus F = X \setminus \bigcap \mathcal{H} = \bigcup \{X \setminus H; H \in \mathcal{H}\}$). Vybereme konečné podpokrytí $\{U\} \cup \{X \setminus H_k; H_k \in \mathcal{H}, k = 1, \dots, n\}$ a dostáváme $F \subset \bigcap_{k=1}^n H_k \subset U$. (Je-li totiž $x \in X \setminus U$, existuje $l \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $x \in X \setminus H_l$. Pak $x \notin \bigcap_{k=1}^n H_k$, a tedy $\bigcap_{k=1}^n H_k \subset U$.) $\square$

Toto tvrzení se často používá v případě, kdy bod v kompaktním prostoru je průnikem některých svých uzavřených okolí (většinou uzávěrů některých svých otevřených okolí). Jako důsledek dostaneme, že pro kompaktní T_2 -prostor X platí $\chi(X) \leq |X|$ (pro každé $y \neq x$ existuje uzavřené okolí $U_{x,y}$ bodu x neobsahující y – pak $\bigcap_{y \neq x} U_{x,y} = \{x\}$).

Lemma 3.17. Uzavřenost projekce podél kompaktního prostoru

Ať X, Y jsou topologické prostory a Y je kompaktní. Jestliže G je otevřená množina v $X \times Y$ obsahující $\{x\} \times Y$ pro nějaký bod $x \in X$, pak existuje okolí U_x bodu x v X tak, že $U_x \times Y \subset G$. Tedy projekce $\pi_X: X \times Y \rightarrow Y$ je uzavřená.

Důkaz. Pro každý $y \in Y$ existují otevřená okolí $U_{x,y}, V_y$ bodu x v X , resp. bodu y v Y , že $U_{x,y} \times V_y \subset G$. Z pokrytí $\{V_y\}_{y \in Y}$ vybereme konečné podpokrytí $\{V_{y_1}, \dots, V_{y_n}\}$. Potom $\bigcap_{i=1}^n U_{x,y_i}$ je hledané okolí U_x .

Necht $F \subset X \times Y$ je uzavřená a $x \notin \pi_X(F)$. Pak $G = (X \times Y) \setminus F$ je otevřená množina obsahující $\{x\} \times Y$. Tedy existuje okolí U_x bodu x splňující $U_x \times Y \subset G$. Pak $U_x \cap \pi_X(F) = \emptyset$, tedy $\pi_X(F)$ je uzavřená množina. $\square$

Kompaktní prostory mají mnoho souvislostí mezi svými kardinálními funkcemi. My máme zatím jen váhu, hustotu, charakter a mohutnost. Uvedeme jen dvě souvislosti. Další významná nerovnost je $|X| \leq 2^{\chi(X)}$, která má ale komplikovanější důkaz.

Tvrzení 3.18. Váha kompaktního prostoru a jeho spojitého obrazu

Necht X je kompaktní Hausdorffův prostor.

(a) Platí $w(X) \leq |X|$.

(b) Je-li $f: X \rightarrow Y$ spojitý a surjektivní a Y Hausdorffův, je $w(Y) \leq w(X)$.

Důkaz. (a) Můžeme předpokládat, že X je nekonečný. Víme z Lemmatu 3.16 a následující poznámky, že $\chi(X) \leq |X|$. Tedy $w(X) \leq |X|$, protože $w(X) \leq \chi(X) \cdot |X|$ (poslední nerovnost plyne z faktu, že sjednocení otevřených lokálních bází je otevřená báze celého prostoru).

(b) Je-li X konečný, je i Y konečný a tvrzení platí. Je-li Y konečný, tvrzení též platí. Můžeme tedy bez újmy na obecnosti předpokládat, že oba prostory jsou nekonečné. Ať $\mathcal{B}$ je báze prostoru X , ta je nekonečná..

Vskutku, kdyby $\mathcal{B}$ byla konečná, pak by topologie τ prostoru X byla konečná, tedy i systém $\mathcal{F}$ sestávající ze všech uzavřených množin X by byl konečný. Ale $\{\{x\}; x \in X\} \subset \mathcal{F}$, takže i X je konečný. Tento spor ukazuje, že $\mathcal{B}$ je nekonečná.

Nyní můžeme bez újmy na obecnosti předpokládat, že je uzavřená na konečná sjednocení. Definujme $\mathcal{C} = \{Y \setminus f(X \setminus B); B \in \mathcal{B}\}$. Zřejmě $|\mathcal{C}| \leq |\mathcal{B}|$. Ukážeme, že $\mathcal{C}$ je již báze prostoru Y . Ať je tedy $y \in Y$ a V otevřené okolí y . Pak $f^{-1}(y)$ je uzavřená množina obsažená v otevřené množině $f^{-1}(V)$. Systém $\{B \in \mathcal{B}; B \subset f^{-1}(V)\}$ tvoří otevřené pokrytí kompaktní množiny $f^{-1}(y)$. Proto existuje konečné podpokrytí $\{B_1, \dots, B_n\}$. Protože $\mathcal{B}$ je uzavřená na konečná sjednocení, dostáváme $B = B_1 \cup \dots \cup B_n \in \mathcal{B}$. Nyní $y \in Y \setminus f(X \setminus B) \subset V$. Tedy $\mathcal{C}$ je opravdu báze Y . $\square$

Protože vždy platí $\chi(X) \leq w(X)$, je i za daných podmínek $\chi(X) \leq |X|$. Pro T_1 -prostory výsledek neplatí. Uvědomme si, že jakmile v T_1 -prostoru X existuje jeden bod x , který má za okolí doplňky konečných množin, je prostor kompaktní. Další bod může mít lokální bázi velikou, např. generovanou volným ultrafiltrem, zbylé body izolované. Potom $\chi(X) > |X|$, např. pro $|X| = \omega$. Stejný příklad prostoru, nyní jako Y v tvrzení (b), dává příklad, kdy $w(Y) > w(X)$.

3.1.1 Složitější charakterizace kompaktnosti

Uvedeme nyní trochu složitější charakterizace kompaktnosti.

Věta 3.19. Charakterizace kompaktnosti pomocí subbáze a úplného hromadného bodu

Pro topologický prostor X jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) X je kompaktní.
- (ii) Každá nekonečná množina má úplný hromadný bod, tj. pro každou $A \subset X$ nekonečnou existuje $x \in X$ splňující $|U \cap A| = |A|$ pro každou $U \in \mathcal{U}(x)$.
- (iii) Je-li $\{F_i\}_{i \in I}$ soubor neprázdných uzavřených množin v X indexovaný lineárně uspořádanou množinou I a splňující $F_i \supset F_{i'}$ pokud $i \leq i'$, pak $\bigcap_{i \in I} F_i \neq \emptyset$.
- (iv) Existuje otevřená subbáze $\mathcal{S}$, že z každého pokrytí $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ lze vybrat konečné podpokrytí.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Necht A je nekonečná podmnožina kompaktního prostoru X a každý bod $x \in X$ má okolí U_x s $|U_x \cap A| < |A|$. Vybereme konečné podpokrytí $\{U_{x_1}, \dots, U_{x_n}\}$ prostoru X . Pak $A = \bigcup (A \cap U_{x_i})$, což dává spor $|A| > |A|$.

(ii) $\implies$ (i): Necht $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí X , které nemá konečné podpokrytí. Položme

$$\beta = \min \{ \alpha \text{ ordinál; existuje podpokrytí } \mathcal{U}' \subset \mathcal{U} \text{ takové, že } |\mathcal{U}'| = |\alpha| \}.$$

Pak β není konečný ordinál. Uvažujme podpokrytí $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ velikosti $|\beta|$, tj. $\mathcal{V} = \{V_\gamma\}_{\gamma < \beta}$. Pro každé $\gamma < \beta$ není systém $\{V_\delta; \delta < \gamma\}$ pokrytí X , tedy můžeme pro každé $\gamma < \beta$ vybrat bod

$$x_\gamma \in V_\gamma \setminus \bigcup_{\delta < \gamma} V_\delta.$$

Pak množina $A = \{x_\gamma; \gamma < \beta\}$ má úplný hromadný bod $x \in X$. Pro ten nalezneme $\gamma < \beta$ takový, že $x \in V_\gamma$. Pak

$$|\beta| = |\{x_\gamma; \gamma < \beta\}| = |A| = |V_\gamma \cap A| \leq |\{x_\delta; \delta \leq \gamma\}| \leq |\gamma|.$$

Tedy $|\beta| = |\gamma|$, tj. existuje bijekce $e: \gamma \rightarrow \beta$. Uvažujme nyní množiny $W_\delta = V_{e(\delta)}$, $\delta < \gamma$. Pak

$$\{W_\delta; \delta < \gamma\} = \{V_\delta; \delta < \beta\},$$

takže $\mathcal{W} = \{W_\delta; \delta < \gamma\}$ je pokrytí X splňující $|\mathcal{W}| = |\gamma|$. Ale $\gamma < \beta$, takže dostáváme spor s volbou β .

Implikace (i) $\implies$ (iii): Mějme systém $\{F_i; i \in I\}$ jako v předpokládu (iii). Pak se jedná o centrováný systém uzavřených množin, takže dle Věty 3.3(ii) má neprázdný průnik.

Implikace (iii) $\implies$ (iv): Mějme libovolnou subbázi $\mathcal{S}$ a pokrytí $\mathcal{U} \subset \mathcal{S}$ prostoru X . Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ nemá konečné podpokrytí. Položme

$$\beta = \min \{ \alpha \text{ ordinál; existuje podpokrytí } \mathcal{V} \subset \mathcal{U} \text{ takové, že } |\mathcal{V}| = |\alpha| \}.$$

Pak $\beta \geq \omega$. Vezměme pokrytí $\{V_\gamma\}_{\gamma < \beta} \subset \mathcal{U}$ a uvažujme množiny

$$F_\gamma = X \setminus \bigcup \{V_\delta; \delta < \gamma\}, \quad \gamma < \beta.$$

Pak $\{F_\gamma; \gamma < \beta\}$ je nerostoucí systém uzavřených neprázdných množin (to plyne jako výše z minimality β), který má dle (iii) neprázdný průnik. Je-li však bod x v tomto průniku, platí

$$x \in \bigcap \{F_\gamma; \gamma < \beta\} = X \setminus \left(\bigcup_{\gamma < \beta} \bigcup_{\delta < \gamma} V_\delta \right) = \emptyset.$$

Tento spor říká, že $\mathcal{U}$ má konečné podpokrytí.

(iv) $\implies$ (i): Mějme otevřenou subbázi s vlastností v (iv) a předpokládejme, že $\mathcal{F}$ je ultrafiltr v X bez hromadného bodu. Pro každé $x \in X$ existuje konečná $\mathcal{S}_x \subset \mathcal{S}$, že $x \in \bigcap \mathcal{S}_x \notin \mathcal{F}$. Protože $\mathcal{F}$ je filtr, musí pro každé $x \in X$ existovat $S_x \in \mathcal{S}_x$ takové, že $S_x \notin \mathcal{F}$. Z pokrytí $\{S_x\}_{x \in X}$ vybereme konečné podpokrytí $\{S_{x_1}, \dots, S_{x_n}\}$. Pak existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ splňující $S_{x_i} \in \mathcal{F}$. Vskutku, kdyby platilo $S_{x_1}, \dots, S_{x_n} \notin \mathcal{F}$, z vlastností ultrafiltru bychom měli

$$\emptyset = \bigcap_{i=1}^n (X \setminus S_{x_i}) \in \mathcal{F},$$

což nelze. Tedy $S_{x_i} \in \mathcal{F}$ pro nějaké $i \in \{1, \dots, n\}$. To je ale spor s faktem $S_{x_i} \notin \mathcal{F}$. Tím je důkaz dokončen. $\square$

Vlastnost (iii) je spíše pomocného charakteru, i když bývá někdy potřebná. Charakterizaci (ii) ukázalo už v r. 1921 několik autorů, charakterizaci (iv) až v r. 1939 J.W.Alexander. Tyto dvě charakterizace se používají k důkazu Tichonovy věty o součinnosti kompaktních prostorů (Tichonov ji v r. 1930 přímo nevyslovil, ale snadno vyplynula z jeho speciálního důkazu pomocí existence úplných hromadných bodů; explicitně ji uvedl a podobným způsobem dokázal E.Čech v r.1937). Na konci 30.let 20.století se začaly používat jednodušší přístupy pomocí ultrafiltrů (Bourbaki), které tu jsou uvedeny.

Důkaz součinnosti kompaktních prostorů pomocí Alexanderovy věty je jednoduchý (za otevřenou subbázi na součinu se vezme standardní subbáze součinu $\mathcal{S} = \{\pi_i^{-1}(U) : U \in \tau_i, i \in I\}$), ale důkaz Alexanderovy věty bez použití ultrafiltrů je komplikovanější.

Na závěr této části uvedeme zajímavou charakterizaci kompaktních Hausdorffových prostorů. Víme, že $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není normální prostor (2.38). Odtud plyne, že X^{ω_1} není normální pro každý metrizovatelný nekompaktní prostor, protože takový X obsahuje uzavřenou spočetnou diskrétní množinu a její ω_1 -mocnina není normální a je uzavřenou podmnožinou X^{ω_1} . Takže metrizovatelný prostor je kompaktní právě když jeho ω_1 -mocnina je normální. Podobný výsledek lze dokázat i pro nemetrizovatelné Tichonovovy prostory.

Věta 3.20. Charakterizace kompaktnosti pomocí součinu a normality

Topologický prostor je kompaktní Hausdorffův, právě když každá jeho mocnina je normální T_1 .

Důkaz. Víme, že součin kompaktních Hausdorffových prostorů je kompaktní a Hausdorffův, a tedy normální.

Dokážeme opačnou implikaci v tvrzení. Ať X je prostor, který není kompaktní a každá jeho mocnina je T_4 (takže X je Tichonovův).

Krok 1. Ukážeme, že prostor X je spočetně kompaktní.

Vskutku, jinak obsahuje prostou posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, která nemá v X hromadný bod. Pak je množina $N = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ homeomorfní s diskrétním prostorem $\mathbb{N}$. Uvažujme totiž zobrazení $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow N$ zobrazující $n \in \mathbb{N}$ na x_n . Pak φ je zjevně spojitý. Avšak i inverze φ^{-1} je spojitá, neboť N s podprostorovou topologií je též diskrétní prostor.

Dále si uvědomme, že N je uzavřená množina v X . Vskutku, je-li $x \in X \setminus N$, existuje okolí $U \in \mathcal{U}(x)$ protínající N pouze v konečně mnoha bodech. Z Hausdorffovosti X lze potom U zmenšit na okolí $V \in \mathcal{U}(x)$, které je s N disjunktní.

Stoneův příklad nyní říká, že N^{ω_1} není normální, takže ani X^{ω_1} by nebyl normální, neboť N^{ω_1} je jeho uzavřený podprostor.

Krok 2. Prostor X tedy není Lindelöfův, takže existuje systém $\mathcal{F}$ uzavřených množin na X , který má prázdný průnik, ale průniky spočetně mnoha jeho prvků jsou neprázdné (takže $\mathcal{F}$ je nespočetný). V součinu $X^{\mathcal{F}}$ jsou množiny

$$P = \Delta_X = \{\{x\}_{F \in \mathcal{F}}; x \in X\} \quad \text{a} \quad Q = \prod_{F \in \mathcal{F}} F$$

disjunktní a uzavřené. Vezmeme libovolné otevřené okolí G množiny Q a libovolný bod $x_1 \in Q$. Někaké kanonické okolí bodu x_1 je částí G , takže existuje konečná podmnožina $J_1 \subset \mathcal{F}$, že $\pi_{J_1}^{-1}(\pi_{J_1}(x_1)) \subset G$. Vybereme bod $y_1 \in \bigcap_{F \in J_1} F$ a vezmeme bod $x_2 \in X^{\mathcal{F}}$ se souřadnicemi rovnými y_1 na J_1 a rovnými souřadnicím x_1 na $\mathcal{F} \setminus J_1$. Bod x_2 leží v Q , existuje tedy konečná množina $J_2 \supset J_1$, že $\pi_{J_2}^{-1}(\pi_{J_2}(x_2)) \subset G$.

Indukcí dostaneme posloupnosti bodů $y_n \in \bigcap_{F \in J_n} F$ a $x_n \in Q$, $n \in \mathbb{N}$, s vlastnostmi $\pi_F(x_n) = y_n$ pro $F \in J_n$ a $\pi_{J_n}^{-1}(\pi_{J_n}(x_n)) \subset G$.

Posloupnost $\{y_n\}$ má hromadný bod y . Potom bod $\tilde{y} = \{y\}_{F \in \mathcal{F}} \in P$ se souřadnicemi y leží v uzávěru množiny G (což je spor s normalitou součinu). Opravdu, ať $U = \prod_{k \in K} U_k \times X^{\mathcal{F} \setminus K}$ je kanonické okolí $\tilde{y}$. Existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $K \cap \bigcup J_n = L \subset J_m$. Pak $\bigcap_{k \in L} U_k$, jakožto okolí y , obsahuje nějaký bod y_n , takže i U obsahuje bod $\tilde{y}_n = \{y_n\}_{F \in \mathcal{F}} \in G$. $\square$

Pro Tichonovův prostor, který není spočetně kompaktní, není X^{ω_1} normální. Jestliže je spočetně kompaktní a není Lindelöfův, není X^{κ} normální, kde $\omega_1 \leq \kappa \leq w(X)$. Lze tedy upřesnit hlavní část předchozího tvrzení:

Je-li X nekompaktní Tichonovův prostor a $\kappa = \max\{\omega_1, w(X)\}$, není součin X^{κ} normální.

Poznámka 3.21

Uvedená Nobleova věta se ukázala důležitá a tak se objevila řada jiných důkazů. Všechny důkazy používají Stoneův příklad. My jsme uvedli elementární důkaz R.Engelkinga z r. 1988. Zmíníme se o dvou dalších důkazech, které však nejsou elementární a používají hlubší tvrzení. (možná budou někde dále v textu)

1. Víme že X je spočetně kompaktní a není Lindelöfův. Nejen X , ale i jeho mocnina $X^{\mathcal{F}}$ musí být spočetně kompaktní ($X^{\mathcal{F}}$ je homeomorfní s $(X^{\mathcal{F}})^{\omega_1}$). Množiny P, Q oddělíme spojitou funkcí f , ta na spočetně kom-

paktním součinu závisí na spočetně mnoha souřadnicích, takže projekce množin P, Q na tyto souřadnice jsou oddělitelné, což je spor, protože se protínají ($\mathcal{F}$ má neprázdné průniky spočetně mnoha svých prvků).

2. Další důkaz má opět stejný začátek. Pak vezmeme nějaký prvek $\mathcal{F} \in \beta(X) \setminus X$ chápaný jako filtr uzavřených množin. Jako v předchozím důkazu musí být $X^{\mathcal{F}}$ spočetně kompaktní, takže podle Glicksbergovy věty je $\beta(X^{\mathcal{F}}) = (\beta(X))^{\mathcal{F}}$ a spojitou funkci oddělující množiny P, Q lze rozšířit spojitě na $(\beta(X))^{\mathcal{F}}$, což není možné, protože uzávěry těchto množin v $(\beta(X))^{\mathcal{F}}$ obsahují bod se stejnými souřadnicemi rovnými $\mathcal{F}$.

3.2 Prostory spojitých funkcí na kompaktu

Před definicí 1.47 jsem zavedli značení $C(X, Y)$ apod. pro množiny spojitých funkcí. Zmínili jsme se o topologii bodové konvergence zděděné ze součinové topologie Y^X a o topologii stejnoměrné konvergence pro reálné funkce, která je vytvořena tzv. supremovou metrikou. S touto metrikou je $C^*(X)$, a tedy $C(X)$ pro kompaktní prostor, Banachovým prostorem, jehož některé vlastnosti jsou těsně provázány s topologickými vlastnostmi prostoru X . Uvidíme v další části, že $C^*(X) = C(Y)$ pro vhodný kompaktní T_2 -prostor, a tedy je vhodné zkoumat $C(X)$ hlavně na kompaktních Hausdorffových prostorech. Základním výsledkem této části je Stoneova-Weierstrassova věta o aproximaci. Nejdříve uvedeme několik pomocných tvrzení.

Tvrzení 3.22. Diniho kriterium stejnoměrné konvergence

Ať X je kompaktní topologický prostor, $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ posloupnost spojitých funkcí, že $f_{n+1} \geq f_n$, které konvergují bodově ke spojitě funkci $f: X \rightarrow \mathbb{R}$. Pak (f_n) konverguje stejnoměrně k f .

Důkaz. Ať $\varepsilon > 0$ a $D_n = \{x \in X: f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak systém $\{D_n: n \in \mathbb{N}\}$ je otevřené pokrytí X . Tedy lze vybrat konečné podpokrytí $\{D_1, \dots, D_n\}$. Máme $D_1 \subset D_2 \subset \dots \subset D_n$, tedy $D_n = X$. $\square$

Lemma 3.23. Stejnoměrná aproximace odmocniny polynomy

Existuje posloupnost polynomů, která stejnoměrně konverguje k funkci $\sqrt{t}$ na $[0, 1]$.

Důkaz. Položme $p_0(t) = 0$ a dále $p_{n+1}(t) = p_n(t) + (t - p_n^2(t))/2$ pro $n \geq 0$. Indukcí ověříme, že $p_n(t) \leq \sqrt{t}$ a $p_{n-1}(t) \leq p_n(t)$ pro každé $t \in [0, 1]$. Pro $n = 0$ to platí. Předpokládejme, že to platí pro n a dokazujeme pro $n + 1$. Zřejmě $p_{n+1}(t) - p_n(t)$ je díky předpokladu nezáporné. Dále

$$\sqrt{t} - p_{n+1}(t) = \sqrt{t} - p_n(t) - \frac{1}{2}(t - p_n(t)^2) = \dots = (\sqrt{t} - p_n(t))(1 - \frac{1}{2}(\sqrt{t} + p_n(t)))$$

přičemž výraz vpravo je součinem dvou nezáporných čísel podle indukčního předpokladu (a toho, že $\sqrt{t} + p_n(t) \leq 2\sqrt{t}$). Tedy $\sqrt{t} - p_{n+1}(t) \geq 0$.

Tedy limita posloupnosti $p_n(t)$ existuje vlastní pro každé $t \in [0, 1]$ a z rekurentního vztahu se odvodí, že má limitu $\sqrt{t}$. Podle Diniho kriteria p_n konverguje stejnoměrně k odmocnině. $\square$

Okruh a svaz jsou pojmy algebraické povahy. Nebudeme zde připomínat jejich obecné definice. Pouze poznamenejme, že pro $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{F})$ tvoří systém $\mathcal{A}$ okruh, pokud je uzavřený na násobení, sčítání a odčítání funkcí. Systém $\mathcal{A}$ je samoadjungovaný, pokud $\bar{f} \in \mathcal{A}$, kdykoliv $f \in \mathcal{A}$. Systém $\mathcal{A} \subset C(K, \mathbb{R})$ je svaz, pokud je uzavřený na max a min dvou (resp. konečně mnoha) funkcí.

Věta 3.24. Stoneova-Weierstrassova věta

Ať K je kompaktní topologický prostor.

- (a) *Nechť $\mathcal{B} \subset C(K, \mathbb{R})$ je vektorový podprostor obsahující konstanty a oddělující body. Je-li $\mathcal{B}$ okruh nebo svaz, pak $\mathcal{B}$ je hustá v $C(K, \mathbb{R})$.*
- (b) *Nechť $\mathcal{B} \subset C(K, \mathbb{C})$ je vektorový podprostor obsahující konstanty a oddělující body, který je navíc samoadjungovaný. Pokud je okruh, je $\mathcal{B}$ hustý v $C(K, \mathbb{C})$.*

Důkaz. (a) Dokážeme větu nejprve pro svaz. Začneme pozorováním, že pro různé body $x, y \in K$ a reálná čísla $a, b \in \mathbb{R}$ existuje $h \in \mathcal{B}$, že $h(x) = a, h(y) = b$. Existuje totiž funkce $u \in \mathcal{B}$, že $u(x) \neq u(y)$. Dále lze volit za h lineárně přeskálovanou funkci u:

$$h(z) = \frac{b - a}{u(y) - u(x)}(u(z) - u(x)) + a.$$

Ať tedy $f \in C(K)$ je libovolná a $\varepsilon > 0$. Pro každou dvojici různých bodů $x, y \in K$ zafixujeme funkci $f_{x,y} \in \mathcal{B}$, že $f_{x,y}(x) = f(x)$ a $f_{x,y}(y) = f(y)$. Položíme $f_{x,x} = f(x)$. Buď nyní $x \in K$ pevné. Pak pro každé $y \in K$ existuje otevřené $U_y \in \mathcal{U}(y)$, že $|f_{x,y}(z) - f_{x,y}(y)| < \varepsilon/2$ a $|f(z) - f(y)| < \varepsilon/2$ pro $z \in U_y$. Systém $\{U_y : y \in K\}$ tvoří otevřené pokrytí K , tedy existují $y_1, \dots, y_k$, že $U_{y_1} \cup \dots \cup U_{y_k} = K$. Definujeme $f_x = \min\{f_{x,y_1}, \dots, f_{x,y_k}\}$. Zřejmě platí $f_x \in \mathcal{B}$ a $f_x \leq f + \varepsilon$ na celém K a $f_x(x) = f(x)$.

Nyní pro každé $x \in K$ existuje otevřené $U_x \in \mathcal{U}(x)$, že $|f_x(z) - f_x(x)| < \varepsilon/2$ a $|f(z) - f(x)| < \varepsilon/2$ pro $z \in U_x$. Opět systém $\{U_x : x \in K\}$ tvoří otevřené pokrytí K a tedy existuje konečné podpokrytí $U_{x_1}, \dots, U_{x_l}$. Položme $g = \max\{f_{x_1}, \dots, f_{x_l}\}$. Pak $g \geq f - \varepsilon$. Zřejmě $g \in \mathcal{B}$ a $\|f - g\| \leq \varepsilon$.

Nyní předpokládejme, že $\mathcal{B}$ je okruh. Ukážeme, že pak $\overline{\mathcal{B}}$ je svaz. Zřejmě $\overline{\mathcal{B}}$ je opět vektorový prostor obsahující konstanty a oddělující body a také opět okruh. Ať $f \in \overline{\mathcal{B}}$. Ukážeme, že $|f| \in \overline{\mathcal{B}}$. Funkce f je spojitá na kompaktu, tedy omezená. Proto existuje konstanta $c > 0$, že $cf^2 \in C(K, [0, 1])$. Ať p_n je posloupnost polynomů konvergujících stejnoměrně k odmocnině na intervalu $[0, 1]$ z předchozího lemmatu. Pak $p_n \circ (cf^2)$ konverguje stejnoměrně k $\sqrt{\cdot} \circ (cf^2) = \sqrt{c}|f|$. Navíc $p_n \circ (cf^2) \in \overline{\mathcal{B}}$, protože $\overline{\mathcal{B}}$ je okruh. Tedy i $\sqrt{c}|f| \in \overline{\mathcal{B}}$ díky uzavřenosti $\overline{\mathcal{B}}$. Odtud již $|f| \in \overline{\mathcal{B}}$.

Platí, že $\max\{f, g\} = (f + g + |f - g|)/2$ a podobně pro minimum. Tedy $\overline{\mathcal{B}}$ je svaz. Podle již dokázané části věty pro svaz je $\overline{\mathcal{B}}$ hustá v $C(K)$. Tedy i $\mathcal{B}$ je hustá v $C(K)$.

(b) Nechť $\mathcal{B} \subset C(K, \mathbb{C})$ splňuje předpoklady tvrzení. Uvažujme $\mathcal{A} = \{f \in \mathcal{B}; f(K) \subset \mathbb{R}\}$. Pak $\mathcal{A}$ je reálný vektorový prostor obsahující reálné konstanty, který je uzavřený na násobení. Navíc $\mathcal{A}$ odděluje body K .

Vskutku, pokud $x, y \in K$ jsou různé, existuje $f \in \mathcal{B}$ splňující $f(x) \neq f(y)$. Pak pro $u = \Re f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ a $v = \Im f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$ platí $u, v \in \mathcal{A}$. Pak buďto $u(x) \neq u(y)$ nebo $v(x) \neq v(y)$. Proto $\mathcal{A}$ odděluje body.

Dle reálného tvrzení tedy platí $\overline{\mathcal{A}} = C(K, \mathbb{R})$. Nechť nyní $f \in C(K, \mathbb{C})$ a $\varepsilon > 0$ jsou dány. Nalezneme $f_1, f_2 \in \mathcal{A}$ splňující $\|\Re f - f_1\| + \|\Im f - f_2\| < \varepsilon$. Pak $g = f_1 + if_2 \in \mathcal{B}$ a platí

$$\|f - g\| = \|(\Re f - f_1) + i(\Im f - f_2)\| < \varepsilon.$$

Tedy $\overline{\mathcal{B}} = C(K, \mathbb{C})$. □

Stoneova-Weierstrassova věta patří mezi nejvíce aplikovatelné výsledky topologie. Uvedeme několik jejích důsledků, nejdříve jednoduchých.

Důsledek 3.25. Různé aproximace spojitých funkcí

(a) Polynomy s racionálními koeficienty tvoří hustou podmnožinu prostoru $C([0, 1], \mathbb{R})$ (Weierstrassova věta, 1885).

(b) Spojitá funkce $f(x_1, \dots, x_n): [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}$ lze stejnoměrně aproximovat lineární kombinací součinů polynomů jedné proměnné $p_1(x_1) \cdots p_n(x_n)$.

Důkaz. (a) Ihned vidíme, že prostor polynomů na $[0, 1]$ je vektorový podprostor $C([0, 1], \mathbb{R})$ oddělující body a obsahující konstanty. Tedy jeho uzávěr je hustý v $C([0, 1], \mathbb{R})$. Zjevně jsou polynomy s racionálními koeficienty husté v tomto prostoru, takže (a) je dokázáno.

(b) Systém

$$\mathcal{P} = \{(x_1, \dots, x_n) \mapsto p_1(x_1) \cdots p_n(x_n); p_1, \dots, p_n \text{ polynomy na } [0, 1]\}$$

obsahuje konstanty, odděluje body, je uzavřený na násobení. Jeho lineární obal je též uzavřený na násobení, takže je hustý v $C([0, 1]^n, \mathbb{R})$. □

Důsledek 3.26. Prostor $C(K)$ na kompaktním metrickém prostoru je separabilní

Je-li K metrizable kompaktní prostor, pak $C(K, \mathbb{F})$ je separabilní.

Důkaz. Nechť nejprve $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Prostor K má spočetnou bázi $\mathcal{B}$. Pro každou dvojici $A, B \in \mathcal{B}$ s disjunktními uzávěry fixujeme spojitou funkci $f_{A,B}: K \rightarrow [0, 1]$, která je na A nulová a na B rovná jedné. Nechť 1 značí funkci všude rovnou jedné a necht

$$\mathcal{A} = \{f_{A,B}; A, B \in \mathcal{B}, \overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset\} \cup \{1\}.$$

Pak $\mathcal{A}$ je spočetná, takže i

$$\mathcal{A}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{a_1 \cdots a_n; a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}\}$$

je spočetná. Ať $\mathcal{C}$ je nejmenší okruh obsahující $\mathcal{A}$. Pak nahlédneme, že

$$\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}', n \in \mathbb{N} \right\},$$

a tudíž je separabilní.

Vskutku, uvažujme spočetný systém

$$\mathcal{D} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i; \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{Q}, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{A}', n \in \mathbb{N} \right\}$$

v $\mathcal{C}$. Je-li $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i$ v $\mathcal{C}$, uvažujme pro dané $\varepsilon > 0$ racionální čísla $\beta_1, \dots, \beta_n$ splňující $\sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| < \varepsilon$. Pak $g = \sum_{i=1}^n \beta_i a_i \in \mathcal{D}$ a

$$\|f - g\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \beta_i| \|a_i\| \leq \varepsilon \cdot \max_{i=1, \dots, n} \|a_i\|.$$

Tedy $\mathcal{D}$ je spočetná hustá v $\mathcal{C}$.

Pak $\bar{\mathcal{C}}$ je separabilní okruh obsahující konstanty a oddělující body. Tedy $\bar{\mathcal{C}}$ je podle Stone-Weierstrassovy věty hustý v $C(K, \mathbb{R})$, ale z uzavřenosti $\bar{\mathcal{C}}$ je to již celé $C(K, \mathbb{R})$.

Pokud $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, nalezneme spočetnou hustou množinu $\mathcal{D} \subset C(K, \mathbb{R})$. Pak $\mathcal{D}' = \mathcal{D} + i\mathcal{D} = \{d_1 + id_2; d_1, d_2 \in \mathcal{D}\}$ je spočetná hustá množina v $C(K, \mathbb{C})$. $\square$

Posledně zmíněný výsledek lze přirozeně zobecnit tak, že hustota prostoru $C(K)$ je nejvýše rovna váze kompaktního Hausdorffova prostoru K .

Nyní trochu složitější důsledky. První z nich (někdy nazývaný *Čechova rozšiřovací věta*) neobsahuje ani není obsažena v Tietzově-Urysohnově větě. Uvidíme později, že se však s její pomocí dá Tietzova-Urysohnova věta vyvodit.

Věta 3.27. Spojité rozšíření z kompaktních množin

Každý kompaktní podprostor Tichonovova prostoru je C^ -vnořený.*

Důkaz. Necht X je Tichonovovův prostor a $A \subset X$ je kompaktní. Označme $\mathcal{F} = \{f|_A; f \in C(X, \mathbb{R})\}$. Ukážeme, že $\mathcal{F}$ je uzavřený lineární podprostor v $C(A, \mathbb{R})$ obsahující konstanty a rozlišující body, který je uzavřený na násobení. Podle Stoneovy-Weierstrassovy věty je pak $\mathcal{F} = C(A, \mathbb{R})$, což dokazuje tvrzení.

Je zřejmé, že $\mathcal{F}$ obsahuje konstanty, rozlišuje body v A a je okruhem v $C(A, \mathbb{R})$. Zbývá ukázat, že je uzavřený v $C(A, \mathbb{R})$. Ať $\{f_n\}$ je posloupnost v $C(X, \mathbb{R})$ taková, že posloupnost funkcí $g_n = f_n|_A$ konverguje na A stejnoměrně k funkci $g \in C(A, \mathbb{R})$. Po výběru vhodné podposloupnosti můžeme předpokládat, že $\|g_{n+1} - g_n\| \leq 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$. Položíme

$$h_1 = f_1 \quad \text{a} \quad h_n = \max\{-2^{-n}, \min\{f_{n+1} - f_n, 2^{-n}\}\}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Pak $-2^{-n} \leq h_n \leq 2^{-n}$, $n \geq 2$, $h_1|_A = g_1$, $h_n|_A = g_{n+1} - g_n$ pro $n \geq 2$. Řada $h_1 + \sum_{n=1}^{\infty} h_n$ konverguje v $C(X, \mathbb{R})$ stejnoměrně k funkci h a

$$h|_A = g_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (g_{n+1} - g_n) = g.$$

Funkce g tedy má spojitě rozšíření na X a náleží do $\mathcal{F}$. $\square$

V dalším důsledku použijeme závislost zobrazení na součinu na nějaké množině souřadnic. Říkáme, že zobrazení $f: \prod_I X_i \rightarrow Z$ závisí na spočetně mnoha souřadnicích, jestliže existuje spočetná množina $J \subset I$ taková, že $f(x) = f(y)$ jakmile $\pi_J(x) = \pi_J(y)$ (jinými slovy, existuje zobrazení $g: \prod_{i \in J} X_i \rightarrow Z$ takové, že $f = g \circ \pi_J$). Je zřejmé, jak se definuje závislost např. na κ -mnoha souřadnicích. Pokud je f spojitě, je i zobrazení g spojitě, protože π_J je otevřené zobrazení, a tedy kvocientové.

Věta 3.28. Závislost funkce na souřadnicích

Ať prostory $X_i, i \in I$, jsou kompaktní Hausdorffovy. Pak každá spojitá funkce $\prod_I X_i \rightarrow \mathbb{R}$ závisí na spočetně mnoha souřadnicích.

Důkaz. Označme $X = \prod_{i \in I} X_i$ a $\mathcal{F} = \{f \in C(X, \mathbb{R}); f \text{ závisí na spočetně mnoha souřadnicích}\}$. Je jednoduché ukázat, že $\mathcal{F}$ splňuje předpoklady Stoneovy-Weierstrassovy věty a je uzavřený, takže $\mathcal{F} = C(X, \mathbb{R})$.

Vskutku, jsou-li $f, g \in C(X, \mathbb{R})$ závislé na spočetně mnoha souřadnicích. Pak existují spočetné množiny $I_f, I_g \subset I$ takové, že $f(x) = f(y)$, jakmile $\pi_{I_f}(x) = \pi_{I_f}(y)$ (respektive $g(x) = g(y)$, jakmile $\pi_{I_g}(x) = \pi_{I_g}(y)$). Položíme $J = I_f \cup I_g$, co je spočetná množina. Pokud $\pi_J(x) = \pi_J(y)$, pak $f(x) = f(y)$ a $g(x) = g(y)$. Tedy $(f + g)(x) = (f + g)(y)$. Podobně lze ověřit uzavřenost $\mathcal{F}$ na součin. Zjevně $\mathcal{F}$ obsahuje konstanty. Zbývá ověřit, že se jedná o uzavřenou množinu. Nechtě tedy $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{F}$ stejnoměrně konvergující k $f \in C(X)$. Pro každou f_n máme spočetnou množinu $I_n \subset I$ z definice. Položíme $J = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ a uvažujeme $x, y \in X$ splňující $\pi_J(x) = \pi_J(y)$. Pak $f_n(x) = f_n(y)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže $f(x) = f(y)$. Proto $f \in \mathcal{F}$. $\square$

3.3 Kompaktifikace

Kompaktní prostory mají hodně důležitých vlastností, které obecné prostory nemají. V této části uvedeme, jak lze některým nekompaktním prostorům přiřadit kompaktní prostory, úzce svázanými s původními prostory. Místo zkoumání původních prostorů lze tedy někdy zkoumat uvedené přiřazené kompaktní prostory. Toto přiřazení lze provést zcela obecně, ale základem je přiřazení kompaktních Hausdorffových prostorů Tichonovovým prostorům. Uvidíme, proč tomu tak je. O obecném přiřazení se zmíníme později.

Definice 3.29. Kompaktifikace

Ať X je topologický prostor.

Dvojice (j, Y) se nazývá *kompaktifikací* prostoru X , pokud $j: X \rightarrow Y$ je vnoření X na hustou podmnožinu kompaktního Hausdorffova prostoru Y . Často se jako kompaktifikace označuje pouze samotný prostor Y a zobrazení j se chápe jako inkluze.

Řekneme, že kompaktifikace (j_1, Y_1) je *větší* než kompaktifikace (j_2, Y_2) , pokud existuje spojitě zobrazení $f: Y_1 \rightarrow Y_2$, že $f \circ j_1 = j_2$.

Kompaktifikace (j_1, Y_1) a (j_2, Y_2) prostoru X nazýváme *ekvivalentní*, pokud existuje homeomorfismus $h: Y_1 \rightarrow Y_2$, který rozšiřuje $j_2 \circ j_1^{-1}$. (Pokud chápeme j_1 jako identické vnoření, homeomorfismus h rozšiřuje Id_X .) $\square$

Fakt 3.30. Ekvivalence kompaktifikací

- (a) Kompaktifikace Hausdorffova kompaktního prostoru X je homeomorfní s X .
- (b) Má-li X kompaktifikaci, je X Tichonovův prostor.
- (c) Je-li jedna kompaktifikace větší než druhá a druhá větší než první, pak jsou již ekvivalentní.

Důkaz. (a) Je-li (j, Y) kompaktifikace X , pak $j(X)$ je kompaktní hustá podmnožina Y , tedy $j(X)$ je uzavřená. Proto $j(X) = \overline{j(X)} = Y$ a $j: X \rightarrow j(X) = Y$ je homeomorfismus X na Y .

(b) Jelikož je kompaktifikace (j, Y) kompaktní Hausdorffův prostor, jde o Tichonovův prostor. Tato vlastnost se dědí na podprostory, takže $j(X)$ je Tichonovův. Tedy i X je Tichonovův.

(c) Ať (j_1, Y_1) a (j_2, Y_2) jsou dvě kompaktifikace prostoru X . Z předpokladu existují spojitá zobrazení $f_1: Y_1 \rightarrow Y_2$ a $f_2: Y_2 \rightarrow Y_1$ taková, že $f_1 \circ j_1 = j_2$ a $f_2 \circ j_2 = j_1$. Nyní $f_2 \circ f_1 \circ j_1 = f_2 \circ j_2 = j_1$, a tedy zobrazení $f_2 \circ f_1$ je identické na množině $j_1(X)$. Ta je v Y hustá a navíc Y je Hausdorffův. Podle Důsledku 1.66 o jednoznačnosti rozšíření spojitě zobrazení je nutně $f_2 \circ f_1$ identické na množině Y_1 . Podobně je $f_1 \circ f_2$ identické na množině Y_2 . Tedy f_1 a f_2 jsou vzájemně inverzní spojitá zobrazení, a tedy to jsou homeomorfismy. Odtud již plyne ekvivalence uvedených kompaktifikací. $\square$

Příklady 3.31. Jednoduché kompaktifikace

1. Uzavřený interval $Y_1 = [0, 1]$ je kompaktifikací otevřeného intervalu $X = (0, 1)$ přičemž $j_1: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ je vnoření.
2. Kružnici Y_2 lze přirozeným způsobem chápat jako kompaktifikaci $X = (0, 1)$. Formálně $j_2(x) = \exp(2\pi i x)$ a Y_2 je jednotková kružnice v komplexní rovině. Kompaktifikace (j_1, Y_1) je větší než kompaktifikace (j_2, Y_2) . Vskutku, (j_1, Y_1) a (j_2, Y_2) jsou dvě kompaktifikace $(0, 1)$. Kompaktifikace Y_1 je větší než Y_2 , neboť zobrazení $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ definované jako $f(x) = \exp(2\pi i x)$, $x \in [0, 1] = Y_1$, je spojitá surjekce splňující $f \circ j_1 = j_2$.
3. $\mathbb{R}^* = [-\infty, \infty]$ s intervalovou topologií je kompaktifikací $\mathbb{R}$.

4. Dvoudimenzionální sféra je kompaktifikací roviny (Riemannova projekce).
5. Prostá posloupnost S v $\mathbb{R}$ spolu se svou limitou je kompaktifikací S .
6. $\omega_1 + 1$ je kompaktifikací ω_1 . □

V předchozích příkladech bylo několik situací, kdy kompaktifikace vznikla přidáním jednoho bodu k danému prostoru. Takovéto kompaktifikace se nazývají jednobodové a lze je obecně popsat.

Definice 3.32. Lokálně kompaktní prostory

Topologický prostor X se nazývá *lokálně kompaktní*, pokud je Hausdorffův a každý bod má kompaktní okolí. □

Fakt 3.33. Báze okolí v lokálně kompaktním prostoru

Je-li X lokálně kompaktní prostor, má každý bod bázi z kompaktních okolí.

Důkaz. Nechť τ je topologie prostoru X . Nechť $x \in X$ a $U \in \mathcal{U}(x)$ je otevřené okolí x . Nalezneme kompaktní okolí K bodu x , tj. $x \in \text{Int } K$. Pak $V = U \cap \text{Int } K$ je τ -otevřené okolí bodu x obsažené v Hausdorffově kompaktu K . Protože K je regulární, existuje otevřené okolí W v K , že $W \subset \overline{W}^K \subset V$. Protože K je uzavřená v X , je $\overline{W}^K = \overline{W}^X$. Protože V je otevřená v X a W je otevřená v K , a tedy i ve V , je W otevřená v X s kompaktním uzávěrem, který je částí U . □

Příklady 3.34. Lokálně kompaktní prostory

1. Každý kompaktní Hausdorffův prostor je lokálně kompaktní.
2. Euklidovské prostory jsou lokálně kompaktní.
3. Diskrétní prostor je lokálně kompaktní.
4. Isbellův-Mrówkův prostor je lokálně kompaktní.
5. Prostor ω_1 je lokálně kompaktní. □

Důkaz. 1. Pro kompaktní prostor X a bod $x \in X$ stačí uvažovat jakékoliv okolí a to uzavřít.

2. Všechny koule v euklidovském prostoru jsou kompaktní.

3. Zřejmě je okolí $\{x\}$ bodu x kompaktní okolí.

4. Nechť $X = N \cup \mathcal{S}$, kde N je spočetná a $\mathcal{S}$ je skoro disjunktní systém množin na N . Body N jsou izolované, a tedy každý má kompaktní okolí. Uvažujeme-li bod $S \in \mathcal{S}$, je okolí $U = \{S\} \cup S$ kompaktní.

5. Je-li $\alpha \in \omega_1$, (tj. $\alpha \in [0, \omega_1)$), pak $\alpha \in [0, \alpha + 1] \subset \omega_1$. Jelikož je $[0, \alpha + 1]$ kompaktní a je to okolí α , je ω_1 lokálně kompaktní. □

Věta 3.35. Vlastnosti lokálně kompaktních prostorů

- (a) *Lokální kompaktnost je uzavřeně a otevřeně dědičná.*
- (b) *Součin lokálně kompaktních prostorů je lokálně kompaktní, právě když jsou, až na konečný počet indexů, všechny souřadnicové prostory kompaktní.*
- (c) *Suma lokálně kompaktních prostorů je lokálně kompaktní.*
- (d) *Otevřený spojitý obraz lokálně kompaktního prostoru je lokálně kompaktní, pokud je Hausdorffův.*

Důkaz. (a) a (c) mají přímý důkaz z definice lokální kompaktnosti.

(b) Součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů je zřejmě lokálně kompaktní. Součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů s libovolným počtem kompaktních prostorů je vlastně součin konečně mnoha lokálně kompaktních prostorů s jedním kompaktním (a tedy lokálně kompaktním) prostorem. Mějme nyní součin nekonečně mnoha nekompaktních lokálně kompaktních prostorů $X = \prod_{i \in I} X_i$. Kdyby bod $x \in X$ měl kompaktní okolí U , pak existuje kanonické okolí $\prod_{i \in K} U_i \times \prod_{i \in I \setminus K} X_i \subset U$, a tedy i uzávěr

$\prod_{i \in K} \overline{U_i} \times \prod_{i \in I \setminus K} X_i \subset U$ je kompaktní. Vybereme $j \in I \setminus K$, pak

$$X_j = \pi_j \left(\prod_{i \in K} \overline{U_i} \times \prod_{i \in I \setminus K} X_i \right)$$

je kompaktní prostor. To je však spor s naším předpokladem.

(d) Necht $f: X \rightarrow Y$ je otevřené spojitě zobrazení lokálně kompaktního prostoru X na Hausdorffův prostor Y . Vezmeme $y \in Y$ a $x \in f^{-1}(y)$. Bod x má kompaktní okolí K v X . Protože f je otevřené, je $V = f(\text{Int } K)$ okolí y . Navíc je $V \subset f(K)$ a $f(K)$ je kompaktní, takže $\overline{V}$ je kompaktní okolí y v Y . $\square$

Příklad 3.36. Uzavřené spojitě zobrazení nezachovává lokální kompaktnost

Vezmeme kvocient Y prostoru $\mathbb{R}$, který slepí dohromady všechny body $\mathbb{N}$. Kvocientové zobrazení $q: \mathbb{R} \rightarrow Y$ je uzavřené a Y je Tichonovův prostor. Předpokládejme, že bod $q(\mathbb{N})$ má kompaktní okolí K . Vzor $q^{-1}(K)$ je okolí $\mathbb{N}$, takže pro každé $n \in \mathbb{N}$ najdeme $x_n \in q^{-1}(K)$ takové, že $x_n \neq n$ a $|x_n - n| < 1/n$. Posloupnost $\{q(x_n)\}$ je prostá a má v K hromadný bod z . Jediná možnost je $y = q(\mathbb{N})$. Ale $\{x_n\}$ je uzavřená množina v $\mathbb{R}$, a tedy její q -obraz je uzavřená množina neobsahující $q(\mathbb{N})$, což je spor s tím, že $q(\mathbb{N})$ je hromadným bodem tohoto q -obrazu. $\square$

Definice 3.37. Jednobodová kompaktifikace

Říkáme, že kompaktifikace (j, bX) prostoru X je *nejvýše jednobodová* (resp. jednobodová), jestliže $|bX \setminus j(X)| \leq 1$ (resp. $|bX \setminus j(X)| = 1$). $\square$

Jednobodové kompaktifikace zavedl P.S.Aleksandrov v r. 1924, a proto se někdy nazývají Aleksandrovova kompaktifikace a značí se αX nebo aX .

Lemma 3.38. Jednoznačnost jednobodové kompaktifikace

Jednobodová kompaktifikace je určena jednoznačně, až na ekvivalenci kompaktifikací.

Pro zjednodušení zápisu chápeme kompaktifikaci bX prostoru X jako prostor obsahující X jako hustý podprostor.

Důkaz. Necht $Y = X \cup \{\infty\}$ je jednobodová kompaktifikace prostoru X . Prostor X je otevřený v Y a otevřené okolí U bodu ∞ má kompaktní doplněk K v Y . Opačně, protože Y je Hausdorffův, doplněk v Y každé kompaktní množiny K v X je otevřené okolí ∞ . Každé identické zobrazení na X má tedy homeomorfní rozšíření na jednobodové kompaktifikace prostoru X (pokud existují). $\square$

Má-li prostor X nejvýše jednobodovou kompaktifikaci, musí být X lokálně kompaktní, protože je otevřený v uvedené kompaktifikaci. Ukážeme nyní opak.

Tvrzení 3.39. Aleksandrovova (jednobodová) kompaktifikace

Každý lokálně kompaktní nekompaktní prostor má jednobodovou kompaktifikaci.

Důkaz. Předpokládejme, že X je lokálně kompaktní nekompaktní prostor a bod ∞ splňuje $\infty \notin X$. Označme jako τ topologii na X . Položme $Y = X \cup \{\infty\}$ a definujme topologii σ na Y pomocí otevřené báze. Označme

$$\mathcal{B} = \tau \cup \{Y \setminus K; K \text{ je kompaktní množina v } X\}.$$

Ověříme, že $\mathcal{B}$ má vlastnosti báze: Zřejmě $\mathcal{B}$ pokrývá Y . Necht $x \in B_1 \cap B_2, B_i \in \mathcal{B}$. Netriviální případ je pouze $x = \infty$, pak $B_i = Y \setminus K_i$, takže $B_1 \cap B_2 = Y \setminus (K_1 \cup K_2)$, což je opět množina z $\mathcal{B}$.

Protože pro kompaktní $K \subset X$ je $\emptyset \neq X \cap (Y \setminus K) = X \setminus K \in \tau \subset \mathcal{B}$, je X otevřený hustý podprostor Y . Ukážeme, že Y je kompaktní Hausdorffův. Necht $\mathcal{G}$ je otevřené pokrytí Y . Existuje $G_0 \in \mathcal{G}$, že $\infty \in G_0$, takže existuje kompaktní K in X , že $X \setminus K \subset G_0$. Existuje konečná $\mathcal{G}' \subset \mathcal{G}$ pokrývající K . Potom $\mathcal{G}' \cup \{G_0\} \subset \mathcal{G}$ je konečné pokrytí Y . V důkazu, že Y je Hausdorffův je netriviální případ jen oddělování bodu ∞ od bodu $x \in X$. Ale x má kompaktní okolí K a $Y \setminus K$ je disjunktní okolí ∞ . $\square$

Jako důsledek si uvědomíme, že lokálně kompaktní prostor je úplně regulární.

Lokálně kompaktní prostory jsou otevřené ve své nejvýše jednobodové kompaktifikaci. Snadno ukážeme, že jsou otevřené v každé své kompaktifikaci. Protože naopak, otevřené podmnožiny kompaktních Hausdorffových prostorů jsou lokálně kompaktní, charakterizuje následující tvrzení lokálně kompaktní prostory, ať vezmeme otevřenost v jedné kompaktifikaci nebo ve všech.

Tvrzení 3.40. Kompaktifikace lokálně kompaktních prostorů

Lokálně kompaktní prostor je otevřený v každé své kompaktifikaci.

Důkaz. Ať X je lokálně kompaktní a bX je nějaká jeho kompaktifikace. Pro $x \in X$ vezmeme jeho kompaktní okolí K v X . Ukážeme, že K je okolí x v bX . Protože X je hustý v bX , pro každou otevřenou množinu G v X platí $G \subset \text{Int}_{bX}(\overline{G}^{bX}) \subset \overline{G}^{bX}$. V našem případě $G = \text{Int} K$, takže $x \in \text{Int}_{bX}(\overline{G}^{bX}) \subset K$ a $\text{Int}_{bX}(\overline{G}^{bX})$ je okolí x v bX ležící v $K \subset X$. $\square$

Důsledkem je následující očekávané tvrzení.

Důsledek 3.41. Nejmenší kompaktifikace

Jednobodová kompaktifikace prostoru X je nejmenší kompaktifikace X .

Důkaz. Máme dokázat, že má-li X jednobodovou kompaktifikaci aX a bX je jiná kompaktifikace X , existuje spojitě zobrazení $f: bX \rightarrow aX$, které je identitou na X . Vezmeme $f: bX \rightarrow aX$, které je identitou na X a zobrazuje $bX \setminus X$ na $aX \setminus X$. Protože f je spojitě na X a X je otevřená v bX , stačí dokázat, že f je spojitě v každém bodě $x \in bX \setminus X$. Bázové okolí bodu $f(x)$ je $aX \setminus K$ pro nějakou kompaktní množinu $K \subset X$. Pak $f^{-1}(aX \setminus K) = bX \setminus K$, což je otevřená množina v bX obsahující x . $\square$

Příklad 3.42. Kompaktifikace netvoří lineární uspořádání

Uvažujme prostor X vytvořený jako disjunktní suma $X = (0, 1) \coprod (0, 1)^2$ spolu s jednobodovými kompaktifikacemi $\alpha((0, 1))$ a $\alpha((0, 1)^2)$. Pak

$$X_1 = [0, 1] \coprod \alpha((0, 1)^2) \quad \text{a} \quad X_2 = \alpha((0, 1)) \coprod [0, 1]^2$$

jsou dvě kompaktifikace X , které nejsou vzájemně uspořádané. $\square$

Jednobodová kompaktifikace (pokud existuje) je tedy mezi všemi kompaktifikacemi nejmenší. Ty tedy existují jen pro lokálně kompaktní Hausdorffovy prostory. Ukážeme nyní, že druhý extrém, největší kompaktifikace existuje pro každý Tichonovův prostor.

V kapitole 2, Příklad 2.22.4 jako důsledek Tvrzení 2.21 jsme uvedli, že každý Tichonovův prostor X lze vnořit do Tichonovova kvádrů. Uzávěr obrazu při vnoření je tedy kompaktifikace prostoru X .

Věta 3.43. Existence kompaktifikací

Každý Tichonovův prostor má nějakou kompaktifikaci.

Jestliže vezmeme vnoření v jistém smyslu největší, dostaneme i největší kompaktifikaci.

Definice 3.44. Čechova-Stoneova kompaktifikace

Ať X je Tichonovův prostor a $e: X \rightarrow [0, 1]^{C(X, [0, 1])}$ je jeho diagonální vnoření do Tichonovova kvádrů. Potom kompaktifikace $(e, \overline{e(X)})$ a každá její ekvivalentní kompaktifikace se nazývá *Čechova-Stoneova* (nebo beta obal) a značí se βX . $\square$

Věta 3.45. Charakterizace βX

Ať X je Tichonovův topologický prostor a (j, Y) je kompaktifikace X . Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) Y je Čechova-Stoneova kompaktifikace X .
- (ii) Každou spojitou funkci $f: X \rightarrow [0, 1]$ lze spojitě rozšířit na Y , tj. existuje spojitá $\tilde{f}: Y \rightarrow [0, 1]$ splňující $f = \tilde{f} \circ j$.
- (iii) Každou spojitou funkci $f: X \rightarrow Z$ do kompaktního Hausdorffova prostoru Z lze spojitě rozšířit na Y , tj. existuje spojitá $\tilde{f}: Y \rightarrow Z$ splňující $f = \tilde{f} \circ j$.
- (iv) Y je největší kompaktifikace X .

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Můžeme předpokládat, že $Y = \overline{e(X)}$, kde $I = C(X, [0, 1])$ a $j = e$, kde $e: X \rightarrow [0, 1]^I$ je vnoření definované jako $e(x)(f) = f(x)$, $f \in I$.

Je-li $f: X \rightarrow [0, 1]$ spojité, pak $f \in I$. Uvažme zobrazení $\pi_f: [0, 1]^I \rightarrow [0, 1]$ restringované na Y . Zřejmě $\pi_f \circ e = f$.

(ii) $\implies$ (iii): Nechť $e: Z \rightarrow [0, 1]^K$ je vnoření (a tedy homeomorfismus) Z do $[0, 1]^K$ (zde K je nějaká indexová množina). Pro každé $k \in K$ je $\pi_k \circ e \circ f: X \rightarrow [0, 1]$ spojitá funkce, takž má rozšíření na Y , tj. existuje $g_k: Y \rightarrow [0, 1]$ splňující $g_k \circ j = \pi_k \circ e \circ f$. Pak $g = \Delta_{k \in K} g_k: Y \rightarrow [0, 1]^K$ je spojitě zobrazení takové, že $g \circ j = e \circ f$. Vskutku, pro každé $k \in K$ totiž platí

$$\pi_k(g(j(x))) = g_k(j(x)) = \pi_k(e(f(x))).$$

Dále

$$g(Y) = \overline{g(j(X))} \subset \overline{g(j(X))} = \overline{e(f(X))} \subset \overline{e(Z)} = e(Z).$$

Tedy zobrazení $\tilde{f} = e^{-1} \circ g$ je spojitě a splňuje pro $x \in X$ rovnost

$$\tilde{f}(j(x)) = e^{-1}(g(j(x))) = e^{-1}(e(f(x))) = f(x).$$

Následující komutativní diagram ukazuje příslušnou situaci (plné šipky jsou dané, čárkované šipky se postupně sestavují, nejdříve g_k , pak g a nakonec $\tilde{f}$ šipka dolů):

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{g_k} & [0, 1] \\ & \searrow f & \downarrow \tilde{f} & \searrow g & \uparrow \pi_k \\ & & Z & \xrightarrow{e} & [0, 1]^K \end{array}$$

Implikace (iii) $\implies$ (iv): Je-li (k, Z) nějaká kompaktifikace X , pak $k: X \rightarrow Z$ lze dle (iii) spojitě rozšířit na Y , tj. existuje $\tilde{k}: Y \rightarrow Z$ splňující $k = \tilde{k} \circ j$. Tedy Y je větší kompaktifikace než Z .

Implikace (iv) $\implies$ (i): Chceme ukázat, že Y je ekvivalentní s Čechovou-Stoneovou kompaktifikací. Jedna nerovnost je jasná, protože Y je největší kompaktifikace. Na druhou stranu podle již dokázané implikace (i) $\implies$ (iii) víme, že Čechova-Stoneova kompaktifikace je větší než Y . Tedy musí být podle Faktu 3.30 již ekvivalentní. $\square$

Uvědomíme si, že vlastnost (ii) je ekvivalentní vlastnosti, že X je C^* -vnořený v Y .

Poznámka 3.46

Každou spojitou omezenou funkci Tichonovova prostoru X lze spojitě rozšířit na (omezenou) spojitou funkci $\beta X \rightarrow \mathbb{R}$. Tedy je možné ztotožnit Banachovy prostory $C^b(X, \mathbb{R})$ a $C(\beta X, \mathbb{R})$, speciálně pak máme ztotožnění ℓ_∞ a $C(\beta \mathbb{N}, \mathbb{R})$ (konkrétněji, je-li $I: C^b(X, \mathbb{R}) \rightarrow C(\beta X, \mathbb{R})$ zobrazení přiřazující f její jednoznačné spojitě rozšíření na βX , jedná se o izometrický izomorfismus těchto prostorů.)

Existuje jednoznačná korespondence mezi kompaktifikacemi a jistými prostory funkcí (totiž těch omezených reálných funkcí, které lze spojitě rozšířit na celou kompaktifikaci). Při této korespondenci odpovídá beta obal prostoru všech omezených spojitých reálných funkcí. Je-li X lokálně kompaktní, pak jednobodová kompaktifikace odpovídá všem spojitým funkcím $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje kompaktní podprostor $K \subset X$, že $\text{diam}(f(X \setminus K)) < \varepsilon$.

Beta obal i jednoduchých topologických prostorů může být velice komplikovaný. Příkladem je prostor $\beta \mathbb{N}$, který lze například popsat jako prostor všech ultrafiltrů na $\mathbb{N}$ s vhodnou topologií. Tento popis nyní ukážeme.

Příklad 3.47. Čechova-Stoneova kompaktifikace diskrétního prostoru

Ať X je nekonečný diskrétní prostor. Označme bX množinu všech ultrafiltrů na množině X a pro $A \subset X$ uvažujme množinu

$$U_A = \{\mathcal{U} \in bX; A \in \mathcal{U}\}.$$

Pak platí následující tvrzení.

- (a) Systém $\{U_A; A \subset X\}$ je báze topologie β na bX .
- (b) Prostor (bX, β) je kompaktní Hausdorffův prostor.
- (c) Zobrazení $b: X \rightarrow bX$, které posílá $x \in X$ na pevný ultrafiltr $\mathcal{U}_x = \{A \subset X; x \in A\}$, je homeomorfismus X a $\{\mathcal{U}_x; x \in X\}$. Navíc je $b(X)$ hustá podmnožina bX .

(d) (b, bX) je Čechova-Stoneova kompaktifikace X .

□

Důkaz. (a) Ověříme vlastnosti báze z Tvzení 1.5. Necht U_A a U_B pro $A, B \subset X$ a $\mathcal{U} \in U_A \cap U_B$ jsou dány. Pak $A, B \in \mathcal{U}$, tedy i $A \cap B \in \mathcal{U}$. Pak $\mathcal{U} \in U_{A \cap B} \subset U_A \cap U_B$, takže (B1) je ověřena.

Je-li $\mathcal{U} \in bX$ libovolný, ať $A \in \mathcal{U}$ je nějaká množina. Pak $\mathcal{U} \in U_A$, takže i (B2) platí. Tedy existuje jednoznačně určená topologie β na bX sází $\{U_A; A \subset X\}$.

(b) Necht $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in bX$ jsou různé ultrafiltry. Pak existuje $A \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{V}$ nebo existuje $B \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{U}$. V prvním případě platí $X \setminus A \in \mathcal{V}$ ($\mathcal{V}$ je ultrafiltr), takže $\mathcal{U} \in U_A$, $\mathcal{V} \in U_{X \setminus A}$ a $U_A \cap U_{X \setminus A} = \emptyset$. Tedy máme okolí oddělující naše dva ultrafiltry. V druhém případě bychom postupovali obdobně.

Nyní ověříme, že (bX, β) je kompaktní. Necht $\mathcal{A}$ je systém podmnožin X , který určuje pokrytí $\{U_A; A \in \mathcal{A}\}$ prostoru bX . Dokážeme, že existuje $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ konečná taková, že $X \setminus \bigcup \mathcal{B}$ je konečná množina. Předpokládejme, že tomu tak není, tj. $A_{\mathcal{B}} = X \setminus \bigcup \mathcal{B}$ je nekonečná pro každý $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ konečný podsystém. Pak systém

$$\{A_{\mathcal{B}}; \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \text{ konečná}\}$$

má konečnou průnikovou vlastnost (platí totiž $A_{\mathcal{B}_1} \cap A_{\mathcal{B}_2} = A_{\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2}$), takže existuje prvek $\mathcal{U} \in bX$ obsahující tento systém. Necht $A_0 \in \mathcal{A}$ splňuje $\mathcal{U} \in U_{A_0}$. Pak $A_0 \in \mathcal{U}$, stejně jako pro systém $\mathcal{B}_0 = \{A_0\}$ máme

$$A_{\mathcal{B}_0} = X \setminus \bigcup \mathcal{B}_0 = X \setminus A_0 \in \mathcal{U}.$$

To je však spor s definicí filtru.

Tedy naše pozorování platí, a existuje tak $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ konečná splňující, že $A_{\mathcal{B}}$ je konečná. Ať $A_{\mathcal{B}} = \{x_1, \dots, x_n\}$ a $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_m\}$. Ať $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ splňují $\mathcal{U}_{x_1} \in U_{A_1}, \dots, \mathcal{U}_{x_n} \in U_{A_n}$. Pak

$$\{U_{A_1}, \dots, U_{A_n}\} \cup \{U_{B_1}, \dots, U_{B_m}\}$$

je podsystém našeho zadaného pokrytí a též pokrývá bX .

Vskutku, je-li $\mathcal{U} \in bX$ libovolný, nastávají dvě možnosti. Buďto $A = \{x_1, \dots, x_n\} \in \mathcal{U}$, nebo $X \setminus A \in \mathcal{U}$.

V prvním případě existuje index $i \in \{1, \dots, n\}$ takový, že $\{x_i\} \in \mathcal{U}$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, tj. $X \setminus \{x_i\} \in \mathcal{U}$ pro $i = 1, \dots, n$ měli bychom

$$\bigcap_{i=1}^n (X \setminus \{x_i\}) = X \setminus A \in \mathcal{U}.$$

Jelikož předpokládáme $A \in \mathcal{U}$, dostáváme spor. Pak tedy $\{x_i\} \in \mathcal{U}$, a $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{x_i}$. Proto $\mathcal{U} \in U_{A_i}$.

Pokud $A \notin \mathcal{U}$, máme $X \setminus A = \bigcup_{j=1}^m B_j \in \mathcal{U}$. Pak existuje $j \in \{1, \dots, m\}$ takové, že $B_j \in \mathcal{U}$. Kdyby tomu totiž tak nebylo, měli bychom z rovnosti

$$\bigcap_{j=1}^m (X \setminus B_j) = X \setminus \bigcup \mathcal{B} = A \in \mathcal{U}$$

spor. Tedy máme index $j \in \{1, \dots, m\}$ splňující $B_j \in \mathcal{U}$. Pak ovšem $\mathcal{U} \in U_{B_j}$. Takže náš vybraný podsystém je opravdu pokrytí a β je kompaktní Hausdorffova topologie na bX .

(c) Zobrazení b je evidentně prosté a spojitě. Dokážeme, že $\{U_x\}$ je otevřená množina v bX pro každé $x \in X$, z čehož poplyne diskrétnost prostoru $b(X)$ v topologii bX . Tato vlastnost je však zjevná, neboť

$$U_{\{x\}} = \{\mathcal{U} \in bX; \{x\} \in \mathcal{U}\} = \mathcal{U}_x.$$

Abychom ukázali, že $\{c.U_x; x \in X\}$ je hustá, uvažujme libovolné neprázdné $A \subset X$. Necht $x \in A$ je zvoleno. Pak $\mathcal{U}_x \in U_A$, takže $b(X)$ protíná libovolnou neprázdnou otevřenou množinu v bX . Tím je hustota $b(X)$ ověřena.

(d) Ukážeme, že každou funkci $f: X \rightarrow [0, 1]$ je možné jednoznačně rozšířit na $\tilde{f}: bX \rightarrow [0, 1]$ tak, že $f = \tilde{f} \circ b$. Necht tedy f je taková funkce. Pak pro daný $\mathcal{U} \in bX$ je systém $f(\mathcal{U}) = \{f(A); A \in \mathcal{U}\}$ báze filtru. Vskutku, máme $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$ pro $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$.

Uvažujme tedy libovolný ultrafiltr $\mathcal{H}$ obsahující $f(\mathcal{U})$. Pak existuje $\lim \mathcal{H}$ z kompaktnosti $[0, 1]$. Ukážeme, že nezáleží na výběru $\mathcal{H}$. Necht $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ jsou dva ultrafiltry obsahující $f(\mathcal{U})$ s limitami s_1 a s_2 v $[0, 1]$. Pokud $s_1 \neq s_2$, necht V_1, V_2 jsou otevřená okolí s_1 a s_2 splňující $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Z definice limity ultrafiltru máme, že

$$\forall A \in \mathcal{U}: f(A) \cap V_1 \neq \emptyset \text{ a } f(A) \cap V_2 \neq \emptyset.$$

Tedy

$$\forall A \in \mathcal{U}: A \cap f^{-1}(V_1) \neq \emptyset \text{ a } A \cap f^{-1}(V_2) \neq \emptyset.$$

Z vlastností ultrafiltru plyne $f^{-1}(V_1)$ a $f^{-1}(V_2) \in \mathcal{U}$. Avšak

$$\emptyset = f^{-1}(V_1 \cap V_2) = f^{-1}(V_1) \cap f^{-1}(V_2) \in \mathcal{U}$$

je spor s vlastnostmi filtru. Tedy $s_1 = s_2$.

Můžeme tedy definovat $\tilde{f}(\mathcal{U}) = \lim \mathcal{H}$, kde $\mathcal{H}$ je libovolný ultrafiltr v $[0, 1]$ obsahující $f(\mathcal{U})$.

Pak platí $\tilde{f}(\mathcal{U}_x) = f(x)$. Vskutku, je-li $\mathcal{H}$ ultrafiltr obsahující $f(\mathcal{U}_x)$ s limitou s různou od $f(x)$, nechť V je okolí s neobsahující $f(x)$. Pak z definice limity filtru plyne

$$\forall A \in \mathcal{U}_x: f(A) \cap V \neq \emptyset,$$

což speciálně dává

$$f(\{x\}) \cap V \neq \emptyset.$$

To je však spor s volbou V . Takže $\tilde{f}(\mathcal{U}_x) = \lim \mathcal{H} = f(x)$.

Dále je $\tilde{f}$ spojitý. Je-li totiž $\mathcal{U} \in bX$ a W okolí bodu $\tilde{f}(\mathcal{U})$, pak uvažujme okolí V bodu $\tilde{f}(\mathcal{U})$ splňující $\tilde{f}(\mathcal{U}) \in V \subset \bar{V} \subset W$. Pak $A_0 = f^{-1}(V)$ splňuje $\tilde{f}(U_{A_0}) \subset W$ a $\mathcal{U} \in U_{A_0}$.

Vskutku, máme $A_0 \in \mathcal{U}$, neboť

$$\forall A \in \mathcal{U}: V \cap f(A) \neq \emptyset,$$

takže

$$\forall A \in \mathcal{U}: f^{-1}(V) \cap A \neq \emptyset.$$

Tedy $A_0 = f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$.

Nechť nyní $\mathcal{V} \in U_{A_0}$ je dáno. Ať $\mathcal{H}$ je ultrafiltr obsahující $f(\mathcal{V})$. Pokud $s = \lim \mathcal{H}$ neleží ve $\bar{V}$, existuje otevřené okolí G bodu s neprotínající $\bar{V}$. Pak ovšem

$$\forall A \in \mathcal{V}: G \cap f(A) \neq \emptyset,$$

což znamená

$$\emptyset \neq G \cap f(A_0) = G \cap f(f^{-1}(V)) \subset G \cap V = \emptyset.$$

Tento spor dává $s \in \bar{V}$, tj.

$$\tilde{f}(\mathcal{V}) = \lim \mathcal{H} = s \in \bar{V} \subset W.$$

Tím je ověřena spojitost $\tilde{f}$.

Z Věty 3.45 nyní plyne, že (b, bX) je Čechova-Stoneova kompaktifikace X . □

Příklad 3.48. Konvergentní posloupnosti v $\beta\mathbb{N}$

V $\beta\mathbb{N}$ neexistuje netriviální konvergentní posloupnost. □

Důkaz. Nechť $\{\mathcal{U}_n\}$ je prostá posloupnost v $\beta\mathbb{N}$ konvergující k $\mathcal{U}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{U}$ není prvkem dané posloupnosti. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ je množina $\{\mathcal{U}_k; k \in \mathbb{N} \setminus \{n\}\} \cup \{\mathcal{U}\}$ uzavřená. Existují tak otevřené bazové množiny oddělující tyto dvě množiny. Indukcí tak zkonstruujeme bazové množiny U_{A_n} , $n \in \mathbb{N}$, takové, že $\mathcal{U}_n \in U_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$, a $\{U_{A_n}; n \in \mathbb{N}\}$ je disjunktní systém.

Uvažujme množiny $B_n \subset \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, definované jako

$$B_1 = A_1, \quad B_n = A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1}), \quad n \geq 2.$$

Jelikož

$$\mathcal{U}_n \in U_{\mathbb{N} \setminus A_1} \cap U_{\mathbb{N} \setminus A_2} \cap \dots \cap U_{\mathbb{N} \setminus A_{n-1}} \cap U_{A_n} = U_{A_n \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n-1})} = U_{B_n}, \quad n \geq 2,$$

platí $\mathcal{U}_n \in U_{B_n}$, $n \in \mathbb{N}$, a systém $\{B_n; n \in \mathbb{N}\}$ je disjunktní.

Uvažujme dvě disjunktní množiny

$$C = \bigcup \{B_n; n \in \mathbb{N} \text{ liché}\} \quad \text{a} \quad \mathbb{N} \setminus C.$$

Pak $U_C \cup U_{\mathbb{N} \setminus C} = \beta\mathbb{N}$, a tedy $\mathcal{U}$ padne do jedné z těchto množin. Pokud $\mathcal{U} \in U_C$, máme $\mathcal{U}_n \in U_{\mathbb{N} \setminus C}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ sudá, což znamená že podposloupnost $\{\mathcal{U}_n\}_n$ sudé nekonverguje k $\mathcal{U}$. A to je ale spor.

Podobně pokud $\mathcal{U} \in U_{\mathbb{N} \setminus C}$, podposloupnost lichých členů nekonverguje k $\mathcal{U}$. □

Ukážeme, že pro diskrétní prostory je βX velmi veliké, např. na $\mathbb{N}$ je 2^{2^ω} volných ultrafiltrů.

Věta 3.49. Velikost βX pro diskrétní X

Je-li X nekonečný diskrétní prostor mohutnosti κ , pak $|\beta X| = 2^{2^\kappa}$.

Důkaz. Ať diskrétní prostor X má mohutnost κ . Podle Věty 2.41 má součin 2^{2^κ} hustou množinu S mohutnosti κ . Existuje bijekce $f: X \rightarrow S$, kterou spojitě rozšíříme na $\tilde{f}: \beta X \rightarrow 2^{2^\kappa}$. Spojitý obraz kompaktního prostoru je kompaktní, a tedy uzavřený, obsahuje hustou část, takže $\tilde{f}$ je surjekce. Tudíž $|\beta X| \geq 2^{2^\kappa}$.

Díky Příkladu 3.47 víme, že každý bod βX lze ztotožnit s ultrafiltrem na X . Jelikož potenční množina X má mohutnost $2^{|X|}$ a ultrafiltr je podsystém množiny $\mathcal{P}(X)$, není ultrafiltrů více než prvků množiny $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$, tj. $2^{2^{|X|}} = 2^{2^\kappa}$. Takže všech (volných) ultrafiltrů na nekonečné množině mohutnosti κ je 2^{2^κ} . $\square$

Uvedený postup konstrukce βX pro diskrétní prostory lze provést pro libovolné Tichonovovy prostory se změnou, že se neberou maximální filtry na všech podmnožinách X , ale jen na funkcionálně uzavřených množinách (viz vlastnosti a popis úplně regulárních prostorů v kapitole 1, 1.61, 1.62).

Ne vždy má beta obal velký přírůstek. Existují prostory X libovolné mohutnosti, pro něž je βX jednobodovou kompaktifikací.

Příklad 3.50. Čechova-Stoneova kompaktifikace ω_1

Ukážeme, že $\beta\omega_1 = \omega_1 + 1$, tj. že ω_1 je C^* -vnořený v $\omega_1 + 1$. To hned plyne z vlastností spojitých funkcí na ω_1 v Příkladě 1.42.4: funkce je od nějakého α konstantní a touto konstantou se spojitě rozšíří na bod $\{\omega_1\}$. Stejný postup a výsledek platí pro libovolný kardinál κ s nespočetnou kofinalitou. $\square$

Přidáme ještě dva příklady, které ale nedokážeme. Prvním je Isbellův-Mrówkův prostor. Mrówka dokázal, že existuje taková maximální skoro disjunktní soustava, že příslušný Isbellův-Mrówkův prostor má jednobodovou Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci.

Druhým příkladem je prostor X získaný odebráním libovolného bodu ze součinu $[0, 1]^\kappa$ pro $\kappa > \omega$. Každá spojitá funkce na X závisí na spočetně mnoha souřadnicích a dá se tedy spojitě rozšířit na celý součin. Platí tedy $\beta X = [0, 1]^\kappa$. Tímto postupem se dají najít příklady i pro jiné rozdílly $|\beta X \setminus X|$. Dokonce lze jít ještě dále a sestrojit X tak, že $\beta X \setminus X$ je nějaký daný prostor.

Příklad 3.51. Isbellův-Mrówkův prostor a pseudokompaktnost

Nechť $\mathcal{S}$ je maximální skoro disjunktní systém na $\mathbb{N}$. Pak každá spojitá funkce na Isbellově-Mrówkově prostoru $X = \mathbb{N} \cup S$ je omezená a nabývá svého suprema a infima. $\square$

Důkaz. Nechť $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá neomezená funkce. Jelikož je $\mathbb{N}$ hustá množina v X , musí být f neomezená na $\mathbb{N}$. Nechť tedy $\{n_k\}$ je prostá posloupnost v $\mathbb{N}$ splňující $|f(n_k)| \geq k$, $k \in \mathbb{N}$. Jelikož je systém $\mathcal{S}$ maximální, existuje $S \in \mathcal{S}$ taková, že S protíná posloupnost $\{n_k\}$ v nekonečně mnoha bodech. Očíslujeme $S \cap \{n_k; k \in \mathbb{N}\}$ jako $\{n_{k_j}; j \in \mathbb{N}\}$. Z definice topologie na X pak máme $\lim_{j \rightarrow \infty} n_{k_j} = S$. Ze spojitosti f tedy máme $|f(S)| = \lim_{j \rightarrow \infty} |f(n_{k_j})| \geq \lim_{j \rightarrow \infty} k_j = \infty$, což je zřejmý spor. Tedy f je omezená na X .

Nechť nyní $M = \sup f(X)$. Pokud existuje $n \in \mathbb{N}$ splňující $f(n) = M$, je důkaz hotov. Pokud ne, opět díky hustotě $\mathbb{N}$ v X existuje prostá posloupnost $\{n_k\}$ v $\mathbb{N}$ splňující $\lim_{k \rightarrow \infty} f(n_k) = M$. Stejně jako výše nalezneme podposloupnost $\{n_{k_j}\}_{j \in \mathbb{N}}$ a $S \in \mathcal{S}$ takové, že $\lim_{j \rightarrow \infty} f(n_{k_j}) = f(S)$. Pak ovšem $f(S) = M$ a f nabývá svého suprema. Obdobně bychom odvodili nabývání infima. $\square$

Na konec uvedeme slíbený příklad dvou spočetně kompaktních prostorů, jejichž součin není spočetně kompaktní (J. Novák, 1953).

Příklad 3.52. Součin dvou spočetně kompaktních prostorů nemusí být spočetně kompaktní

Existují dva spočetně kompaktní podprostory $X, Y \subset \beta\mathbb{N}$ s vlastností $X \cap Y = \mathbb{N}$. Potom diagonála $\Delta_{\mathbb{N}}$ je uzavřená v $X \times Y$ a nemá žádný hromadný bod v $X \times Y$. $\square$

Důkaz. Množinu $D \subset \beta\mathbb{N}$ nazveme relativně diskretní, pokud $D \cap D' = \emptyset$. Všimněme si, že nekonečná spočetná relativně diskretní množina v $\beta\mathbb{N}$ je homeomorfní s $\mathbb{N}$.

Krok 1. Je-li $D \subset \beta\mathbb{N}$ nekonečná spočetná relativně diskretní množina, pak $\beta D = \overline{D}^{\beta\mathbb{N}}$.

Abychom dokázali toto tvrzení, stačí ukázat, že každá omezená funkce na D má spojitě rozšíření na $\overline{D}^{\beta\mathbb{N}}$. K tomuto účelu píšme $D = \{u_n; n \in \mathbb{N}\}$ a zkonstruujeme disjunktní systém množin $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ v $\mathbb{N}$ takový, že $u_n \in U_{A_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

V prvním kroku konstrukce použijeme pozorování

$$u_1 \notin \overline{D \setminus \{u_1\}} = (D \setminus \{u_1\}) \cup (D \setminus \{u_1\})',$$

které nám umožní nalézt množinu $B \subset \mathbb{N}$ splňující

$$u_1 \in U_B = \overline{U_B} \subset \beta\mathbb{N} \setminus \overline{D \setminus \{u_1\}}.$$

Položíme $A_1 = B$. Pak

$$u_1 \in U_{A_1} \quad \text{a} \quad \overline{D \setminus \{u_1\}} \subset U_{\mathbb{N} \setminus A_1}.$$

Předpokládejme nyní, že máme nalezeny disjunktní množiny $A_1, \dots, A_n$ v $\mathbb{N}$ takové, že $u_i \in U_{A_i}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ a

$$\overline{D \setminus \{u_1, \dots, u_n\}} \subset U_{\mathbb{N} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)}.$$

Pak existuje $B \subset \mathbb{N}$ splňující

$$u_{n+1} \in U_B = \overline{U_B} \subset \beta\mathbb{N} \setminus \overline{D \setminus \{u_{n+1}\}}.$$

Položíme $A_{n+1} = B \cap (\mathbb{N} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n))$. Pak $u_i \in U_{A_i}$, $i \in \{1, \dots, n+1\}$, a

$$\begin{aligned} \overline{D \setminus \{u_1, \dots, u_{n+1}\}} &= \overline{(D \setminus \{u_1, \dots, u_n\}) \cap (D \setminus \{u_{n+1}\})} \subset \overline{D \setminus \{u_1, \dots, u_n\}} \cap \overline{D \setminus \{u_{n+1}\}} \\ &\subset U_{\mathbb{N} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_n)} \cap U_{\mathbb{N} \setminus B} = U_{\mathbb{N} \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_{n+1})}. \end{aligned}$$

Navíc je systém $\{A_1, \dots, A_{n+1}\}$ disjunktní.

Mějme nyní omezenou funkci $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Definujme funkci $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ jako

$$g(k) = \begin{cases} f(u_n), & k \in A_n, n \in \mathbb{N}, \\ 0, & k \in \mathbb{N} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \end{cases}$$

Pak g je omezená funkce na $\mathbb{N}$, takže má spojitě rozšíření $\tilde{g}: \beta\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Ověříme nyní, že $\tilde{g} = f$ na D .

Nechť tedy $u_n \in D$ je dáno. Jelikož $u_n \in U_{A_n}$ a $g = f(u_n)$ na A_n , platí $\tilde{g}(v) = f(u_n)$ pro každé $v \in U_{A_n}$, tedy i pro u_n . Vskutku, je-li $v \in U_{A_n}$ dáno, pak $\tilde{g}(v) = \lim \mathcal{H}$, kde $\mathcal{H}$ je ultrafiltr obsahující systém $g(v) = \{g(A); A \in v\}$. Pak pro každé okolí $U \subset \mathbb{R}$ bodu $\tilde{g}(v)$ platí $U \cap g(A) \neq \emptyset$, $A \in v$. Speciálně tedy máme $U \cap g(A_n) = U \cap \{f(u_n)\} \neq \emptyset$, takže $\tilde{g}(v) = f(u_n)$. Tedy $\tilde{g} = f$ na D .

Z Věty 3.45 plyne nyní požadovaná rovnost $\beta D = \overline{D}^{\beta\mathbb{N}}$.

Krok 2. Transfinitní indukci pro $\alpha \in [0, \omega_1)$ nyní sestrojíme spočetně kompaktní prostor $\mathbb{N} \subset X \subset \beta\mathbb{N}$ splňující $|X| = 2^\omega$.

Položme $X_0 = \mathbb{N}$.

Pro $\alpha = 1$ uvažujme X_0 . Pro každou relativně diskretní nekonečnou spočetnou množinu $A \subset X_0$ vybereme nějaký její hromadný bod $x_A \in \beta\mathbb{N}$. Nechť

$$X_1 = X_0 \cup \{x_A; A \subset X_0 \text{ relativně diskretní spočetná nekonečná}\}.$$

Pak $|X_1| \leq 2^\omega$.

Uvažujme nyní $\alpha \in (0, \omega_1)$ a množiny X_β , $\beta < \alpha$, kde $|X_\beta| \leq 2^\omega$ a pro každé $\beta < \alpha$ a každou relativně diskretní nekonečnou spočetnou množinu $A \subset \bigcup_{\gamma < \beta} X_\gamma$ existuje její hromadný bod v X_β . Nechť $A \subset \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ je nekonečná spočetná relativně diskretní množina a $x_A \in \beta\mathbb{N}$ je její hromadný bod. Položíme

$$X_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta \cup \{x_A; A \subset \bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta \text{ nekonečná spočetná relativně diskretní}\}.$$

Jelikož $|X_\beta| \leq 2^\omega$ a $|\alpha| < \omega_1 \leq 2^\omega$, máme $|\bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta| \leq 2^\omega$. Všech spočetných podmnožin $\bigcup_{\beta < \alpha} X_\beta$ je tak opět nejvýše 2^ω , takže $|X_\alpha| \leq 2^\omega$.

Nakonec položíme $X = \bigcup_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$. Pak $|X| \leq 2^\omega$ a X je spočetně kompaktní.

Vskutku, je-li $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ prostá posloupnost, nalezneme $\alpha_n < \omega_1$, $n \in \mathbb{N}$, splňující $x_n \in X_{\alpha_n}$. Pak $\alpha = \sup\{\alpha_n; n \in \mathbb{N}\} < \omega_1$, takže $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X_\alpha$. Pokud množina $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ má hromadný bod v X_α , máme hromadný bod posloupnosti $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Pokud D nemá hromadný bod v X_α , jedná se o spočetnou nekonečnou relativně diskretní množinu v X_α . Z konstrukce nyní vyplývá, že D má hromadný bod v $X_{\alpha+1} \subset X$. Posloupnost $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tak má hromadný bod v X .

Krok 3. Nalezneme spočetně kompaktní prostor Y velikosti 2^ω splňující $X \cap Y = \mathbb{N}$. Konstrukce je stejná jako v Kroku 2, jenom vybíráme hromadné body z $\beta\mathbb{N} \setminus X$. To je díky Kroku 1 vždy možné, neboť máme-li nekonečnou spočetnou relativně diskretní množinu $D \subset \beta\mathbb{N}$, je $|\overline{D}^{\beta\mathbb{N}}| = |\beta D| = 2^{2^\omega}$. Tedy množina hromadných bodů D má mohutnost $2^{2^\omega} > 2^\omega$. $\square$

Metrizovatelnost a čechovská úplnost

Metrické prostory mají řadu užitečných vlastností, které obecně ani již uvedené speciální topologické prostory nemají. Proto se matematici snažili již od počátku topologických prostorů najít topologické vlastnosti, které zaručují metrizovatelnost. Nejdříve se jednalo o jednodušší postačující vlastnosti, které si v této kapitole uvedeme. Zhruba v polovině 20. století byly nalezeny ekvivalentní vlastnosti, které však vyžadují větší přípravu a budou uvedeny v pozdějších kapitolách.

Velmi důležitá vlastnost metrických prostorů je úplnost. Ta však není topologickou vlastností metrizovatelných prostorů. Poměrně brzy se našly vhodné topologické vlastnosti metrizovatelných prostorů postačující k vlastnostem podobným úplnosti. Po delší době zkoumání možností zobecnění úplnosti na všechny topologické prostory (se zachováním vlastností úplnosti) se zjistilo, že taková možnost neexistuje, ale existuje na Tichonovových prostorech. Příslušnou vlastnost objevil E. Čech, a proto se tyto prostory nazývají čechovsky úplné.

4.1 Metrizovatelnost

Někdy jsou uváděna následující tvrzení pro pseudometrizovatelné prostory místo metrizovatelných. Je jednoduché přecházet od metrizovatelnosti k pseudometrizovatelnosti. Hausdorffova modifikace pseudometrizovatelného prostoru je metrizovatelný prostor a naopak, pseudometrizovatelný prostor je retraktem součinu své Hausdorffovy modifikace s indiskrétním prostorem. V této kapitole budeme používat jen metrizovatelné prostory. Protože se nám jedná o topologickou vlastnost, můžeme vhodně používat topologicky ekvivalentní metriky. Např. je vhodné použít omezené metriky: je-li ρ metrika, je $\sigma = \min\{\rho, 1\}$ metrika topologicky ekvivalentní s ρ (tj. obě metriky vytvářejí stejnou topologii).

Některé výsledky chování metrizovatelnosti vzhledem k základním konstrukcím byly zmíněny ve 2. kapitole: zachovávání podprostory, sumou, spočetnými součiny a nikoli kvocienty. Speciální případ zachovávání metrizovatelnosti kvocienty kompaktních prostorů uvedeme v 4.4. Spočetná součinnost metrizovatelných prostorů nebyla ve 2. kapitole dokázána (důkaz byl jen naznačen), ukážeme to nyní. Je zřejmé, že součin nespočetně mnoha aspoň dvoubodových prostorů nemůže být metrizovatelný (ale může být pseudometrizovatelný – součin indiskrétních prostorů). Zajímavé je, že na součinu nespočetně mnoha aspoň dvoubodových prostorů ani neexistuje metrika, jejíž konvergence se shoduje s konvergencí posloupností na topologickém součinu (to stačí ukázat pro Cantorovy prostory $2^{\mathbb{N}}$).

Připomeňme metrizovatelnost spočetného součinu metrizovatelných prostorů, vizte Věta 2.36(c).

Tvrzení 4.1. Součin metrizovatelných prostorů

Jsou-li X_n , $n \in \mathbb{N}$, metrizovatelné topologické prostory, pak součin $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ je také metrizovatelný.

Kromě metriky v důkazu Věty 2.36(c) lze alternativně pro metrizovatelnost spočetného součinu použít například metriku

$$\sigma(x, y) = \sum \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{2^n(1 + \rho_n(x_n, y_n))}$$

nebo

$$\sigma(x, y) = \max\{\rho_n(x_n, y_n) : n \in \mathbb{N}\},$$

pokud $\text{diam}_{\rho_n}(X_n) \leq 1/n$.

Jednou z prvních a hned velmi důležitých metrizačních vět je následující Urysohnova věta z r. 1924 (nutno dodat, že Urysohn dokázal toto tvrzení pro normální prostory, asi o rok později Tichonov dokázal, že stačí použít regularitu místo normality).

Věta 4.2. Urysohnova metrizační věta

Každý topologický T_3 -prostor se spočetnou bází je metrizovatelný.

Důkaz. Regulární prostor se spočetnou bází je Lindelöfův a tedy normální (Věta 3.12). Ať $\mathcal{B}$ je spočetná báze. Označme $\mathcal{A} = \{(U, V) : U, V \in \mathcal{B}, \overline{U} \subset V\}$. Pro $(U, V) \in \mathcal{A}$ existuje spojitá funkce $f_{U,V} : X \rightarrow [0, 1]$ taková, že $f(U) \subset \{0\}$, $f(X \setminus V) \subset \{1\}$. Pak diagonální zobrazení $\Delta_{(U,V) \in \mathcal{A}} f_{U,V} : X \rightarrow [0, 1]^{\mathcal{A}}$ je vnoření podle Tichonovova lemmatu. Prostor $[0, 1]^{\mathcal{A}}$ je metrizovatelný, protože jde o spočetný součin metrizovatelných prostorů. Tedy prostor X je homeomorfní podprostoru metrizovatelného prostoru, tedy je také metrizovatelný. $\square$

V případě kompaktních prostorů dostáváme dokonce charakterizaci metrizovatelnosti.

Důsledek 4.3. Charakterizace kompaktních metrizovatelných prostorů

Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný, právě když má spočetnou bází.

Důkaz. Kompaktní Hausdorffův prostor je již T_4 , tedy splňuje předpoklady Urysohnovy metrizační věty, pokud má spočetnou bází. Naopak, je-li metrizovatelný, je separabilní a každý metrický separabilní prostor má spočetnou bází. $\square$

Důsledek 4.4. Metrizovatelnost kompaktního kvocientu

Spojitý obraz metrizovatelného kompaktu je metrizovatelný kompakt, pokud je obraz Hausdorffův.

Důkaz. Víme, že spojitý obraz kompaktu nezvyšuje jeho váhu (Tvzení 3.18). Protože víme, že obraz je Hausdorffův a jeho váha je spočetná, dostáváme z předchozího důsledku, že je metrizovatelný. $\square$

Poznámka 4.5

V předchozím důkazu jsme obdrželi dokonce metrizovatelnost totálně omezenou metrikou, tj. metrikou, že každé pokrytí $\{B(x, r) : x \in X, r > 0\}$, obsahuje konečné podpokrytí (viz kapitolu o uniformitách). To vyplývá z toho, že každý kompaktní metrický prostor má ekvivalentní totálně omezenou metriku (opak neplatí, např. interval $(0, 1)$). Uvedený příklad $(0, 1)$ také ukazuje, že vlastnost být vytvořen totálně omezenou metrikou není topologická vlastnost.

Z důkazu Urysohnovy metrizační věty navíc plyne, že každý separabilní metrizovatelný prostor má metrizační kompaktifikaci a lze ho vnořit do Hilbertova kvádru $[0, 1]^{\mathbb{N}}$. Toto tvrzení charakterizuje separabilní metrizovatelné prostory (ale je tzv. „vnější“, není to, na rozdíl od Urysohnovy věty, charakterizace pomocí vnitřních vlastností prostoru). Z tohoto vnoření také vyplývá, že nejen kompaktní, ale každý separabilní metrický prostor má ekvivalentní totálně omezenou metriku.

Z Urysohnovy metrizační věty můžeme snadno získat následující zajímavý důsledek, který dokázal (jiným způsobem) V.E.Šneider v r.1945 (J.Chaber v r.1967 ukázal, že platí i pro spočetně kompaktní prostory).

Věta 4.6. Šneiderova metrizační věta

Kompaktní Hausdorffův prostor je metrizovatelný, právě když má G_δ -diagonálu.

Důkaz. Ať kompaktní Hausdorffův prostor X má G_δ -diagonálu Δ_X . Ukážeme, že je metrizovatelný (obrácené tvrzení je triviální). Pak $X^2 \setminus \Delta_X$ je F_σ -podmnožina kompaktního prostoru X^2 , a tedy je Lindelöfova. Pro každé $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta_X$ nalezneme otevřenou množinu U_x obsahující x a otevřenou množinu V_y obsahující y takové, že $(\overline{U_x} \times \overline{V_y}) \cap \Delta_X = \emptyset$. Pak $\overline{U_x} \cap \overline{V_y} = \emptyset$.

Nyní vybereme spočetně mnoho dvojic (x_n, y_n) , $n \in \mathbb{N}$, tak, že $X^2 \setminus \Delta_X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{x_n} \times V_{y_n}$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ sestrojíme spojitou funkci $f_n : X \rightarrow [0, 1]$ splňující $f(U_{x_n}) \subset \{0\}$ a $f(V_{y_n}) \subset \{1\}$. Pak systém funkcí $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ odděluje body X . Proto je zobrazení $\Delta_{n \in \mathbb{N}} f_n : X \rightarrow [0, 1]^{\mathbb{N}}$ spojitě a prostě. Tedy se jedná o homeomorfismus X a $(\Delta_{n \in \mathbb{N}} f_n)(X)$. Tato množina je však podprostorem metrizovatelného kompaktu $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, a tedy je sama metrizovatelná. Proto je i prostor X metrizovatelný. $\square$

Později budou uvedena hlubší tvrzení o metrizovatelnosti nekompaktních prostorů. Některá z nich by bylo možné uvést a dokázat i v tomto místě, např. metrizační větu Aleksandrova a Urysohna z r. 1923 pomocí posloupnosti normálních pokrytí definovaných v Definici 1.77. Jednodušší a průhlednější však bude uvést tato tvrzení po kapitolách o uniformitách a parakompaktních prostorech.

4.2 Úplnost

Úplnost metrických prostorů je velmi důležitá vlastnost a od počátku systematického zkoumání topologických prostorů byla snaha zavést úplnost i v topologických prostorech se zachováním základních vlastností úplných prostorů v metrických prostorech. Zvláště Hausdorff se o to snažil po 15 let. Neuspěl, protože chtěl definovat úplnost pro všechny Hausdorffovy prostory. E.Čech v r.1937 uspěl s definicí úplnosti pro Tichonovovy prostory a asi o 20 let později Frolík ukázal, že úplnost pro Hausdorffovy prostory s očekávanými vlastnostmi neexistuje.

Pro větší soběstačnost tohoto textu zopakujeme základní vlastnosti úplných metrických prostorů a ukážeme charakterizaci, kdy je metrizable prostor úplně metrizable. Z této charakterizace je vidět možný Čechův myšlenkový pochod pro jeho definici úplnosti v Tichonovových prostorech.

4.2.1 Úplné metrické prostory

Připomeňme, že posloupnost $\{x_n\}$ v metrickém prostoru (X, ρ) se nazývá cauchyovská, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje n_0 , že $\text{diam}\{x_n; n \geq n_0\} \leq \varepsilon$.

Definice 4.7. Úplný metrický prostor

Metrický prostor se nazývá úplný, pokud každá jeho cauchyovská posloupnost má limitu (ekvivalentně: má hromadný bod). $\square$

Mezi úplné prostory patří: euklidovské prostory, prostory ℓ_p a L_p , diskrétní a indiskrétní prostory, ježek, $C(X)$ se stejnoměrnou konvergencí (obecněji $C(X, Y)$ pro úplný prostor Y).

Základní vlastnosti úplných metrických prostorů jsou podobné základním vlastnostem kompaktních prostorů. Tato podobnost není náhodná a platí obecně pro jisté třídy prostorů.

Tvrzení 4.8. Základní vlastnosti

- (a) Je-li (X, ρ) úplný metrický prostor, je jeho uzavřený podprostor též úplný.
- (b) Úplný podprostor metrického prostoru je uzavřený.
- (c) Spočetný součin úplně metrizable prostorů je úplně metrizable.

Důkaz. Důkazy prvních dvou tvrzení jsou přímočaré.

(a) Je-li totiž $Y \subset X$ uzavřený a $\{x_k\}$ je cauchyovská posloupnost v Y , je cauchyovská i v X . Konverguje proto k nějakému $x \in X$. Tento bod však leží v Y , neboť Y je uzavřený.

(b) Je-li Y úplný v metrickém prostoru X a $\{x_k\}$ je posloupnost v Y konvergující k $x \in X$, je cauchyovská v Y . Konverguje proto k nějakému $y \in Y$, takže nutně $x = y \in Y$. Proto je Y uzavřený.

Dokažme nyní (c). Uvažujme úplné metrické prostory (X_n, σ_n) . Nejprve pozměníme metriku σ_n na $\rho_n(x, y) = \min\{\sigma_n(x, y), 1\}$, $x, y \in X_n$. To je opět úplná metrika generující stejnou topologii jako σ_n . Na $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ nyní uvažujme metriku

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(x_n, y_n), \quad x, y \in X.$$

V důkazu Věty 2.36(c) jsme ukázali, že tato metrika je kompatibilní se součinnou topologií na X . Ukažme nyní, že je úplná.

Uvažujme tedy ρ -cauchyovskou posloupnost $\{x^k\}$ v X . Pak zřejmě $\{x_n^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ je ρ_n -cauchyovská pro každé $n \in \mathbb{N}$, takže má limitu $x_n \in X_n$. Pak $x = (x_1, x_2, \dots) \in X$ je limitou $\{x^k\}$. Vskutku, je-li $\varepsilon > 0$ dáno, zvolíme $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $2^{-n_0} < \varepsilon$. Necht $k_0 \in \mathbb{N}$ splňuje $\rho_n(x_n^k, x_n) < \varepsilon$ pro každé $k \geq k_0$ a $n \in \{1, \dots, n_0\}$. Pak ovšem pro $k \geq k_0$ platí odhad

$$\rho(x^k, x) = \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} \rho_n(x_n^k, x_n) + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon \sum_{n=1}^{n_0} 2^{-n} + 2^{-n_0} < 2\varepsilon.$$

Tedy $\{x^k\}$ konverguje k x , a X je tak úplný. $\square$

Úplně stejně se dokáže, že je-li metrický prostor Y úplný a omezený, tak i mocnina Y^X je úplná v metrice stejnoměrné konvergence (omezenost Y lze vypustit, pokud nás zajímá jen topologie prostorů) - vizte Definici 1.47 a Větu 1.48.

Vzhledem k jisté podobnosti s kompaktními prostory se nabízí otázka ohledně úplných obalů, tj. zda existuje úplný prostor, obsahující daný prostor jako hustou část. Takový úplný prostor se nazývá *úplný obal* nebo *zúplnění* daného prostoru.

Tvrzení 4.9. Zúplnění

Je-li (X, ρ) metrický prostor, pak existuje úplný metrický prostor (Y, σ) a izometrické zobrazení $e: X \rightarrow Y$ takové, že $e(X)$ je husté v Y .

Důkaz. Ať (X, ρ) je neprázdný metrický prostor. Pak $(\ell^\infty(X), \|\cdot\|_\infty)$ je úplný normovaný vektorový prostor, a tedy úplný metrický prostor. Zafixujeme pevně $u \in X$ a uvažujme zobrazení $e: X \rightarrow \ell^\infty(X)$ definované jako

$$e(x) = e_x: y \mapsto \rho(y, x) - \rho(y, u), \quad y \in X.$$

Pak platí

$$\|e_x\|_\infty = \sup_{y \in X} |\rho(y, x) - \rho(y, u)| \leq \rho(x, u) < \infty,$$

tedy $e_x \in \ell^\infty(X)$.

Dále je e izometrie, neboť pro $x, x' \in X$ platí

$$\|e_x - e_{x'}\| = \sup_{y \in X} |e_x(y) - e_{x'}(y)| = \sup_{y \in X} |\rho(y, x) - \rho(y, u) - (\rho(y, x') - \rho(y, u))| = \sup_{y \in X} |\rho(y, x) - \rho(y, x')|,$$

což je výraz splňující

$$\rho(x, x') \leq \sup_{y \in X} |\rho(y, x) - \rho(y, x')| \leq \rho(x, x').$$

Tedy e je izometrie a hledaný úplný prostor (Y, σ) získáme jako $\overline{e(X)}^{\ell^\infty(X)}$. □

Následující tvrzení ukazuje rozdíl oproti kompaktním prostorům a vyplyne z ní jednoznačnost úplného obalu. Připomeňme, že $f: (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ je stejnoměrně spojitý, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, že $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$, pokud $\rho(x, y) < \delta$.

Tvrzení 4.10. Rozšíření stejnoměrně spojitého zobrazení na uzávěr

Každé stejnoměrně spojitě zobrazení z podprostoru A metrického prostoru (X, ρ) do úplného metrického prostoru (Y, σ) lze rozšířit na stejnoměrně spojitě zobrazení z $\bar{A}$ do Y .

Důkaz. Necht x je libovolný bod v $\bar{A} \setminus A$. Zvolíme posloupnost $\{x_n\}$ v A konvergující k x , ta je pak cauchyovská v X , takže $\{f(x_n)\}$ je cauchyovská v Y díky stejnoměrné spojitosti f na A . Tedy existuje limita $F(x) = \lim f(x_n)$.

Ukážeme, že hodnota $F(x)$ nezávisí na volbě $\{x_n\}$. Je-li totiž $\{y_n\}$ další posloupnost v A konvergující k x , je posloupnost $\{z_n\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, \dots\}$ konvergentní k x , takže její obraz $\{f(z_n)\}$ je cauchyovský v Y . Tedy existuje limita $y = \lim f(z_n)$. Jelikož $\{f(x_n)\}$ je podposloupnost $\{f(z_n)\}$, je $y = F(x)$. Dále je $\{f(y_n)\}$ též podposloupnost $\{f(z_n)\}$, takže $\lim f(y_n) = y = \lim f(x_n) = F(x)$.

Definujme tedy naše rozšíření $F: \bar{A} \rightarrow Y$ jako

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \lim f(x_n), & x \in \bar{A} \setminus A, x_n \rightarrow x \text{ je posloupnost v } A. \end{cases}$$

Pak F je stejnoměrně spojitá na $\bar{A}$. Vskutku, necht $\varepsilon > 0$ je dáno. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $\sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$, kdykoliv $x, y \in A$ splňují $\rho(x, y) < \delta$. Necht $x, y \in \bar{A}$ splňují $\rho(x, y) < \frac{\delta}{3}$. Zvolme posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ v A takové, že $\lim x_n = x$ a $\lim y_n = y$. Necht $n_0 \in \mathbb{N}$ je zvoleno tak, že

$$\sigma(f(x_{n_0}), F(x)) + \sigma(f(y_{n_0}), F(y)) < \varepsilon \quad \text{a} \quad \rho(x, x_{n_0}) + \rho(y, y_{n_0}) < \frac{\delta}{3}.$$

Pak

$$\rho(x_{n_0}, y_{n_0}) \leq \rho(x_{n_0}, x) + \rho(x, y) + \rho(y, y_{n_0}) \leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} < \delta,$$

takže $\sigma(f(x_{n_0}), f(y_{n_0})) < \varepsilon$. Dohromady odhadneme

$$\begin{aligned} \sigma(F(x), F(y)) &\leq \sigma(F(x), F(x_{n_0})) + \sigma(F(x_{n_0}), F(y_{n_0})) + \sigma(F(y_{n_0}), F(y)) \\ &= \sigma(F(x), f(x_{n_0})) + \sigma(f(x_{n_0}), f(y_{n_0})) + \sigma(f(y_{n_0}), F(y)) \\ &< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy F je stejnoměrně spojitý. $\square$

Důsledkem předchozího rozšíření je jednoznačnost zúplnění – zúplnění prostoru X budeme značit γX .

Tvrzení 4.11. Jednoznačnost zúplnění

Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $(Y_1, \sigma_1), (Y_2, \sigma_2)$ úplné metrické prostory a $e_1: X \rightarrow Y_1, e_2: X \rightarrow Y_2$ dvě izometrická zobrazení splňující $\overline{e_1(X)}^{Y_1} = Y_1$ a $\overline{e_2(X)}^{Y_2} = Y_2$. Pak existuje izometrické surjektivní zobrazení $e: Y_1 \rightarrow Y_2$ splňující $e_2 = e \circ e_1$.

Důkaz. Uvažujme stejnoměrně spojitý zobrazení $E_1: Y_1 \rightarrow Y_2$ rozšiřující izometrické zobrazení $e_2 \circ e_1^{-1}$ z $e_1(X)$ na $Y_1 = \overline{e_1(X)}^{Y_1}$. Podobně nechť $E_2: Y_2 \rightarrow Y_1$ je stejnoměrně spojitý zobrazení rozšiřující $e_1 \circ e_2^{-1}$. Pak

$$E_2 \circ E_1 \circ e_1 = E_2 \circ e_2 = e_1 \quad \text{a} \quad E_1 \circ E_2 \circ e_2 = E_1 \circ e_1 = e_2,$$

takže $E_2 \circ E_1 = \text{Id}_{e_1(X)}$ a $E_1 \circ E_2 = \text{Id}_{e_2(X)}$. Díky jednoznačnosti spojitýho rozšíření (vizte Tvrzení 1.66) platí $E_2 \circ E_1 = \text{Id}_{Y_1}$ a $E_1 \circ E_2 = \text{Id}_{Y_2}$. Proto jsou E_1 a E_2 dvě navzájem inverzní spojitá zobrazení. Navíc se jedná o izometrie, neboť pro $x, y \in Y_1$ zvolíme posloupnosti $\{x_n\}$ a $\{y_n\}$ v X takové, že $\lim e_1(x_n) = x$ a $\lim e_1(y_n) = y$. Pak

$$\begin{aligned} \sigma_2(E_1(x), E_1(y)) &= \lim \sigma_2(E_1(e_1(x_n)), E_1(e_1(y_n))) = \lim \sigma_2(e_2(x_n), e_2(y_n)) = \lim \rho(x_n, y_n) \\ &= \lim \sigma_1(e_1(x_n), e_1(y_n)) = \sigma_1(x, y). \end{aligned}$$

Tedy E_1 je izometrie. Podobně by se ověřila izometričnost E_2 . Tím je důkaz dokončen. $\square$

V této souvislosti stojí za zmínku srovnání pojmu zúplnění metrického prostoru a kompaktifikaci topologického prostoru. Jde o podobné koncepty, avšak s podstatným rozdílem, že zúplnění je určeno (až na ekvivalenci) jednoznačně, zatímco kompaktifikací pevného topologického prostoru může být více. Nicméně se ukazuje, že kompaktifikace jsou speciálním případem *zúplnění uniformních prostorů*.

Při použití úplných prostorů se často používá následující vlastnost. G.Cantor ji ukázal v r.1880 pro klesající posloupnosti v $\mathbb{R}$, F.Hausdorff v r.1914 pro úplné prostory a K.Kuratowski následující obecnou formulaci v r.1943.

Věta 4.12. Cantorova věta o úplnosti

Pro metrický prostor (X, ρ) jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) X je úplný.
- (ii) *Nechť $\mathcal{F}$ je centrovaný systém uzavřených neprázdných množin, který pro každé $\varepsilon > 0$ obsahuje množinu F splňující $\text{diam } F < \varepsilon$. Pak $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.*

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Ať X je úplný a $\mathcal{F}$ je systém splňující předpoklady (ii). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $F_n \in \mathcal{F}$ splňující $\text{diam } F_n < 2^{-n}$ a vybereme bod $x_n \in F_n$. Pak $\{x_n\}$ je cauchyovská posloupnost.

Vskutku, je-li $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ splňuje $2 \cdot 2^{-n_0} < \varepsilon$, nechť $m > n \geq n_0$ jsou dána. Pak $F_m \cap F_n \neq \emptyset$, tj. existuje $u \in F_m \cap F_n$. Pak

$$\rho(x_m, x_n) \leq \rho(x_m, u) + \rho(u, x_n) \leq 2^{-m} + 2^{-n} \leq 2 \cdot 2^{-n} \leq 2 \cdot 2^{-n_0} < \varepsilon.$$

Posloupnost $\{x_n\}$ má tak limitu $x \in X$. Ukážeme, že $x \in F$ pro každé $F \in \mathcal{F}$. Je-li tedy nějaké $F \in \mathcal{F}$ dáno a $\rho(x, F) = d > 0$, nechť $n \in \mathbb{N}$ splňuje $\rho(x_n, x) < \frac{d}{4}$ a $2^{-n} < \frac{d}{4}$. Pak $F_n \cap F = \emptyset$, neboť pro $y \in F_n \cap F$ platí

$$d \leq \rho(y, x) \leq \rho(y, x_n) + \rho(x_n, x) \leq 2^{-n} + \frac{d}{4} \leq \frac{d}{2}.$$

Tedy vskutku F_n neprotíná F , což nelze. Proto $\rho(x, F) = 0$, tj. $x \in F$.

(ii) $\implies$ (i): Chceme ukázat úplnost X . Uvažujme cauchyovskou posloupnost $\{x_n\}$ a položme $F_n = \{x_k; k \geq n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Díky cauchyovskosti $\{x_n\}$ splňuje systém $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ předpoklady (ii). Tedy existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$. Ten je limitou posloupnosti $\{x_n\}$.

Vskutku, je-li $\varepsilon > 0$ dáno, nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ je zvolena tak, že $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ pro $n, m \geq n_0$. Ať $n \geq n_0$ je libovolné. Pak $x, x_n \in F_n$ a $\text{diam } F_n \leq \text{diam } F_{n_0} \leq \varepsilon$. Tedy $\rho(x, x_n) \leq \varepsilon$.

Tím je důkaz dokončen. $\square$

Z důkazu je vidět, že uvedené obecné tvrzení je ekvivalentní původnímu tvrzení s klesající posloupností uzavřených množin místo centrovaného systému. Proto ho uvádíme jako Cantorovu větu. Z ní se často uvádí jako důsledek následující Baireova věta:

Věta 4.13. Baireova věta

V úplném metrickém prostoru je průnik spočetně mnoha hustých množin opět hustá množina, tj. úplný metrický prostor je Baireův.

Důkaz. Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a G_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou husté v X . Chceme dokázat, že $\bigcap G_n$ je hustý, což znamená, že pro každou neprázdnou otevřenou množinu G je $G \cap \bigcap G_n \neq \emptyset$.

Mějme tedy $G \subset X$ neprázdnou otevřenou. Induktivně sestrojíme posloupnost koulí $B(x_n, r_n)$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že

- $B(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset \overline{B(x_n, r_n)} \subset G \cap G_n$, $n \in \mathbb{N}$,
- $\overline{B(x_n, r_n)} \subset G \cap G_n$, $n \in \mathbb{N}$,
- $r_n < 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

V prvním kroku indukce nalezneme kouli $B(x_1, r_1)$ s $r_1 < \frac{1}{2}$ splňující $\overline{B(x_1, r_1)} \subset G \cap G_1$, přičemž využíváme, že $G \cap G_1$ je neprázdna otevřená množina.

V $n + 1$ -kroku indukce vezmeme v potaz neprázdnou otevřenou množinu $B(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$ a nalezneme kouli $B(x_{n+1}, r_{n+1})$ splňující $r_{n+1} < 2^{-(n+1)}$ a $\overline{B(x_{n+1}, r_{n+1})} \subset B(x_n, r_n) \cap G_{n+1}$. Tím je konstrukce dokončena.

Posloupnost $\{\overline{B(x_n, r_n)}; n \in \mathbb{N}\}$ splňuje předpoklady Věty 4.12(ii), takže existuje

$$x \in \bigcap \overline{B(x_n, r_n)} = \bigcap B(x_n, r_n).$$

Díky vlastnostem konstrukce pak $x \in G \cap \bigcap G_n$, což bylo dokázat. $\square$

4.2.2 Úplně metrizovatelné prostory

Všimneme si že Baireova věta má topologický charakter, kdežto Cantorova věta má metrický charakter. Změníme-li úplnou metriku na ekvivalentní neúplnou metriku (např. obvyklou metriku na $\mathbb{R}$ na metriku $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |\arctg x - \arctg y|$), Cantorova věta přestane platit, i když Baireova věta platí dále. To znamená, že v Baireově větě můžeme místo „v úplném metrickém prostoru“ psát „v metrickém prostoru mající ekvivalentní úplnou metriku“. To je trochu zdlouhavé a tak se zavádí následující pojem.

Definice 4.14. Úplně metrizovatelný prostor

Topologický prostor se nazývá *úplně metrizovatelný*, pokud na něm existuje úplná metrika generující jeho topologii. $\square$

Příklad 4.15

Prostor $(0, 1)$ je úplně metrizovatelný. Lze dokázat přímo, např. pomocí řetězových zlomků, že prostor iracionálních čísel je úplně metrizovatelný, což vyplyne i z následujících tvrzení. Prostor racionálních čísel není úplně metrizovatelný (každý úplný prostor bez izolovaných bodů je totiž nespočetný). $\square$

Každý úplně metrizovatelný prostor je tedy Baireův. To bylo známo už počátkem minulého století a matematici se začali pokoušet charakterizovat úplně metrizovatelné prostory pomocí topologických vlastností. Je zajímavé podívat se na vývoj v tomto směru. V r. 1923 poslal Aleksandrov Hausdorffovi svůj důkaz, že podprostor separabilního metrického prostoru lze přemetrizovat úplnou metriku, právě když je G_δ . Hausdorff odpověděl během pár měsíců, že separabilitu lze vynechat pro implikaci $\Leftarrow$. A krátce nato odpověděli Aleksandrov s Urysohnem, že i opačná implikace platí bez separability. Je to hezká ukázka vzájemné spolupráce. My si nyní tuto charakterizaci dokážeme.

Věta 4.16. Úplně metrizovatelné prostory

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) *Prostor X je G_δ -podmnožinou svého zúplnění.*
- (ii) *Prostor X má úplnou kompatibilní metriku.*

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Necht $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ je zúplnění X , přičemž ztotožníme X se svým obrazem v $\tilde{X}$. Ať $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřené v $\tilde{X}$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $G_1 \supset G_2 \supset G_3 \supset \dots$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ je funkce

$$g_n(x) = \tilde{\rho}(x, \tilde{X} \setminus G_n), \quad x \in \tilde{X},$$

spojitá a kladná na G_n . Její převrácená hodnota

$$h_n(x) = \frac{1}{g_n(x)}, \quad x \in G_n,$$

je tedy spojitá na G_n . Pak

$$\sigma_n(x, y) = \tilde{\rho}(x, y) + |h_n(x) - h_n(y)|, \quad x, y \in G_n,$$

je metrika na G_n generující na G_n stejnou topologii jako $\tilde{\rho}$.

Prostor (G_n, σ_n) je navíc úplný. Vskutku, cauchyovská posloupnost $\{u_k\}$ v (G_n, σ_n) je zjevně cauchyovská v $(G_n, \tilde{\rho}|_{G_n})$, takže konverguje v $\tilde{X}$ k nějakému bodu u . Tento bod u však leží v G_n . Kdyby totiž $u \notin G_n$, pak

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_n(u_k) = \infty,$$

takže pro jakékoliv $k_0 \in \mathbb{N}$ je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_n(u_{k_0}, u_k) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} |h_n(u_{k_0}) - h_n(u_k)| = \infty.$$

To je však ve sporu s cauchyovskostí $\{u_k\}$ v (G_n, σ_n) . Tedy $u \in G_n$, a proto $\lim u_k = u$ v (G_n, σ_n) .

Uvažujme nyní součin $G = \prod_{n \in \mathbb{N}} (G_n, \sigma_n)$, což je úplně metrizable prostor dle Tvzení 4.8. Stačí tedy X homeomorfně vnořit na uzavřenou podmnožinu tohoto součinu, což zařídí zobrazení $\varphi = \Delta_{n \in \mathbb{N}} \varphi_n: X \rightarrow G$, kde $\varphi_n: X \rightarrow (G_n, \sigma_n)$ jsou identická vnoření. Ukážeme, že φ je homeomorfismus na svůj obraz a $\varphi(X)$ je uzavřená podmnožina G .

Necht $u = (u_1, u_2, \dots) \in G \setminus \varphi(X)$. Pak $u_n \in G_n$, $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $u_i \neq u_j$ pro nějaké $1 \leq i < j$. Pak $u_i, u_j \in G_i$ jsou různé body, takže existují disjunktní otevřené množiny U a V v G_i takové, že $u_i \in U$ a $u_j \in V$. Pak otevřená množina

$$W = \{v \in G; \pi_i(v) \in U, \pi_j(v) \in V\}$$

obsahuje u a neprotíná $\varphi(X)$.

Pokud $u_1 = u_2 = \dots$, pak $x = u_1$ splňuje $x = u_n \in G_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X$. Proto $u = \varphi(x)$, což je spor s volbou u . Tedy $\varphi(X)$ je uzavřená množina v G , a tedy je úplně metrizable.

Nakonec si povšimněme, že X je homeomorfní s $\varphi(X)$. Vskutku, φ je zjevně spojitě a prostě. Pokud posloupnost $\{\varphi(x_k)\}$ konverguje k bodu $\varphi(x)$ pro nějaké $x \in X$, pak ovšem $\pi_1(\varphi(x_k)) = x_k \rightarrow \pi_1(\varphi(x)) = x$, takže $x_k \rightarrow x$. Proto je spojitá i inverze k φ . Tedy φ je homeomorfismus.

Prostor X je tak úplně metrizable.

(ii) $\implies$ (i): Necht $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ je zúplnění prostoru (X, ρ) a σ je úplná metrika na X . Ztotožníme X se svým obrazem v $\tilde{X}$.

Chceme ukázat, že $X \subset G_n$ pro $n \in \mathbb{N}$. Identita $\text{Id}: (X, \rho) \rightarrow (X, \sigma)$ je spojitá, takže pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje $r(x, n) \in (0, 2^{-n})$ tak, že $B_\rho(x, 2r(x, n)) \subset B_\sigma(x, 2^{-n})$. Ať

$$G_n = \bigcup_{x \in X} B_{\tilde{\rho}}(x, r(x, n)) \subset \tilde{X}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Je zřejmé, že $X \subset G_n$ pro $n \in \mathbb{N}$.

Stačí dokázat, že $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \subset X$. Ať $u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in X$ takové, že

$$u \in B_{\tilde{\rho}}(x_n, r(x_n, n)).$$

Pak je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská v (X, σ) .

Vskutku, je-li $\varepsilon > 0$ dáno, necht $n_0 \in \mathbb{N}$ splňuje $2^{-n_0} < \varepsilon$. Uvažujme libovolné $m \geq n \geq n_0$. Pak

$$\rho(x_n, x_m) = \tilde{\rho}(x_n, x_m) \leq \tilde{\rho}(x_n, u) + \tilde{\rho}(u, x_m) < r(x_n, n) + r(x_m, m) \leq 2 \max\{r(x_n, n), r(x_m, m)\}.$$

Dostáváme tak, že buďto $\rho(x_n, x_m) < 2r(x_n, n)$, tj.

$$x_m \in B_\rho(x_n, 2r(x_n, n)) \subset B_\sigma(x_n, 2^{-n}).$$

V tomto případě tak máme $\sigma(x_m, x_n) < 2^{-n} \leq 2^{-n_0} < \varepsilon$. V druhém případě dostáváme $\rho(x_n, x_m) < 2r(x_m, m)$, což dává

$$x_n \in B_\rho(x_m, 2r(x_m, m)) \subset B_\sigma(x_m, 2^{-m}),$$

tedy $\sigma(x_n, x_m) \leq 2^{-m} \leq 2^{-n_0} < \varepsilon$.

Z úplnosti (X, σ) tak plyne konvergence posloupnosti $\{x_n\}$ k nějakému $x \in X$ v metrice σ . Jelikož σ i ρ generují stejnou topologii, konverguje $\{x_n\}$ k x i v ρ . Avšak platí

$$\tilde{\rho}(x_n, u) \leq r(x_n, n) \leq 2^{-n},$$

takže $\{x_n\}$ konverguje k u v prostoru $\tilde{X}$. Tedy $u = x \in X$ a důkaz je dokončen. $\square$

Věta 4.17. Úplně metrizovatelné prostory jsou absolutní G_δ

Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

- (i) *Prostor X má úplnou kompatibilní metriku.*
- (ii) *Je-li (Y, σ) metrický prostor homeomorfní s X , je Y G_δ -podmnožina svého zúplnění.*
- (iii) *Je-li (Z, σ) metrický prostor a $j: X \rightarrow j(X) \subset Z$ je homeomorfismus, pak $j(X)$ je G_δ -podmnožina Z .*
- (iv) *Existují úplný metrický prostor (Y, σ) a homeomorfismus $j: X \rightarrow j(X) \subset Y$ takové, že $j(X)$ je G_δ -podmnožina Y .*

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Je-li Y homeomorfní s úplně metrizovatelným prostorem X , má též kompatibilní úplnou metriku. Dle Věty 4.16 je Y G_δ -podmnožinou svého zúplnění.

(ii) $\implies$ (iii): Nechť $Y = j(X)$ je homeomorfní kopie X v prostoru (Z, σ) . Nechť $(\tilde{Z}, \tilde{\sigma})$ je zúplnění (Z, σ) . Pak prostor $\bar{Y}^{\tilde{Z}}$ je úplný prostor obsahující Y jako hustý podprostor. Tedy se jedná o zúplnění Y . Podle (ii) je Y G_δ -podmnožina $\bar{Y}^{\tilde{Z}}$. Tedy existují otevřené množiny G_n , $n \in \mathbb{N}$, v $\tilde{Z}$ takové, že $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{Y}^{\tilde{Z}} \cap G_n)$.

Dále je množina $\bar{Y}^{\tilde{Z}}$ uzavřená v metrickém prostoru $\tilde{Z}$, a tedy je též G_δ . Nechť H_n , $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřené množiny v $\tilde{Z}$ splňující $\bar{Y}^{\tilde{Z}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$. Pak dostáváme

$$j(X) = Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bar{Y}^{\tilde{Z}} \cap G_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (H_n \cap G_n),$$

tedy $j(X)$ je G_δ -podmnožina $\tilde{Z}$. Zjevně pak

$$j(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (H_n \cap G_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (Z \cap H_n \cap G_n),$$

takže $j(X)$ je G_δ -podmnožina Z .

(iii) $\implies$ (i): Nechť $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ je zúplnění X . Dle (iii) je X G_δ -podmnožinou $\tilde{X}$, takže dle Věty 4.16 má úplnou kompatibilní metriku.

(i) $\implies$ (iv): Dle Věty 4.16 stačí uvažovat za Y zúplnění X .

(iv) $\implies$ (i): Nechť $j(X)$ je homeomorfní kopie X v úplném metrickém prostoru Y taková, že $j(X)$ je G_δ -podmnožina Y . Pak $\overline{j(X)}^Y$ je zúplnění $j(X)$, takže $j(X)$ je G_δ -podmnožinou $\overline{j(X)}^Y$. Dle Věty 4.16 má $j(X)$ úplnou kompatibilní metriku. Tedy i X má úplnou kompatibilní metriku. $\square$

Protože prostor iracionálních čísel je G_δ ve svém zúplnění $\mathbb{R}$, je úplně metrizovatelný.

Poznamenejme, že Aleksandrov v r.1924 našel i vnitřní charakterizaci úplně metrizovatelných separabilních prostorů. Hausdorff a Vedenisov odstranili nezávisle na sobě separabilitu v následujícím roce. Nebudeme na tomto místě tuto charakterizaci uvádět, protože je stejná jako pozdější charakterizace čechovsky úplných prostorů, kterou ukážeme v následující části. Je zajímavé, že Aleksandrov ve svém důkazu ukázal, že separabilní metrizovatelné prostory jsou tzv. parakompaktní, což je pojem vzniklý o 20 let později. Ve 20. letech tento vedlejší výsledek nikoho nezajímal a až později se ukázal jako velmi důležitý.

4.2.3 Úplnost v Čechově smyslu

Předchozí charakterizace úplně metrizovatelných prostorů (G_δ -množina ve svém zúplnění) asi Čecha inspirovala k zavedení úplnosti pro Tichonovy prostory, kde využil β -obal, který právě zavedl.

Definice 4.18. Čechovsky úplný prostor

Tichonovův prostor se nazývá *čechovsky úplný* nebo *úplný ve smyslu Čecha*, jestliže je G_δ -množinou ve svém β -obalu. $\square$

Na rozdíl od jediného zúplnění metrických prostorů mívají Tichonovy prostory mnoho kompaktifikací. Následující tvrzení ukazuje, že je jedno, kterou kompaktifikaci použijeme. K tomu potřebujeme jednoduché pomocné tvrzení.

Lemma 4.19. O přírůstku kompaktifikací

Jsou-li (j_1, Y_1) a (j_2, Y_2) kompaktifikace topologického prostoru X a $f: Y_1 \rightarrow Y_2$ je spojitě rozšíření zobrazení $j_2 \circ j_1^{-1}$, pak $f(Y_1 \setminus j_1(X)) = Y_2 \setminus j_2(X)$.

Důkaz. Spojitý obraz kompaktu $f(Y_1)$ je kompakt, tedy uzavřená v Y_2 a $f(Y_1)$ je hustá, protože obsahuje $j_2(X)$. Tedy zobrazení f je na. Jelikož $f(j_1(X)) = j_2(X)$, musí nutně $f(Y_1 \setminus j_1(X)) \supset Y_2 \setminus j_2(X)$.

Pro důkaz obrácené inkluze předpokládejme, že existuje $y \in Y_1 \setminus j_1(X)$ takové, že $f(y) \in j_2(X)$. Necht $x \in X$ splňuje $j_2(x) = f(y)$. Zvolíme otevřené množiny U, V v Y_1 takové, že $j_1(x) \in U$, $y \in V$ a $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. Jelikož je $j_1(X)$ husté v Y_1 a $y \in V \cap (Y_1 \setminus \overline{U})$, existuje usměrněný soubor $\{x_i\}_{i \in I}$ v X takový, že $j_1(x_i) \in V \cap (Y_1 \setminus \overline{U})$, $i \in I$, a $\lim_{i \in I} j_1(x_i) = y$. Pak ovšem

$$j_2(x) = f(y) = \lim_{i \in I} f(j_1(x_i)) = \lim_{i \in I} j_2(x_i).$$

Jelikož je j_2 homeomorfní vnoření, platí $\lim_{i \in I} x_i = x$. Tedy i $\lim_{i \in I} j_1(x_i) = j_1(x)$. To však není možné, neboť $j_1(x_i) \notin U$, $i \in I$, a U je okolí x . Tedy $f(y) \in Y_2 \setminus j_2(X)$. $\square$

Tvrzení 4.20. Charakterizace čechovsky úplných prostorů

Pro Tichonovův prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) X je čechovsky úplný.
- (ii) X je G_δ v každé kompaktifikaci.
- (iii) X je G_δ v nějaké kompaktifikaci.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Ať (j, Y) je nějaká kompaktifikace X . Jelikož $(e, \beta X)$ je největší kompaktifikace X , existuje $f: \beta X \rightarrow Y$ spojitě a rozšiřující $j \circ e^{-1}$. Necht $e(X) = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n jsou otevřené v βX . Položme $F_n = \beta X \setminus G_n$. To jsou kompaktní množiny a $\bigcup F_n = \beta X \setminus e(X)$. Podle předchozího lemmatu $f(\beta X \setminus e(X)) = Y \setminus j(X)$. Množiny $f(F_n)$ jsou spojitě obrazy kompaktů, tedy kompakty, a proto uzavřené v Y . Navíc $\bigcup f(F_n) = Y \setminus j(X)$. Tedy $j(X) = \bigcap (Y \setminus f(F_n))$ je typu G_δ v Y .

Implikace (ii) $\implies$ (iii) platí, protože nějaká kompaktifikace Tichonova prostoru existuje.

(iii) $\implies$ (i): Ať (j, Y) je nějaká kompaktifikace X a opět $f: \beta X \rightarrow Y$ je spojitě rozšíření $j \circ e^{-1}$. Ať $G_n \subset Y$ jsou otevřené množiny splňující $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = j(X)$. Pak ze spojitosti f jsou množiny $f^{-1}(G_n)$ otevřené, obsahují X a díky lemmatu o přírůstku $\bigcap f^{-1}(G_n) = e(X)$. Tedy X je typu G_δ v βX . $\square$

Příklady 4.21

- Každý kompaktní Hausdorffův prostor je čechovsky úplný.
- Každý lokálně kompaktní Hausdorffův prostor je čechovsky úplný. (Je otevřený ve své jednobodové kompaktifikaci.)
- Prostor racionálních čísel není čechovsky úplný. (Jeho doplněk v kompaktifikaci $\mathbb{R}^*$ není F_σ , protože prostor iracionálních čísel je Baireův prostor.) $\square$

Poznámka 4.22

Na rozdíl od úplné metrizovatelnosti (absolutní G_δ) nelze v předchozí větě ekvivalentně říci G_δ v každém kompaktu. Například prostor $[0, 1]^{\omega_1}$ není G_δ v $[0, 2]^{\omega_1}$.

Podobně jako pro čechovskou úplnost získáme charakterizaci lokálně kompaktních prostorů.

V následujícím podáme *vnitřní* dříve zmíněnou charakterizaci čechovské úplnosti. Dokázali ji nezávisle Z.Frolík v r.1960 a A.V.Archangelskij v r.1961.

Věta 4.23. Vnitřní charakterizace čechovské úplnosti

Nechť X je Tichonovův topologický prostor. Pak jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) X je čechovsky úplný.
- (ii) Existuje posloupnost otevřených pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ prostoru X s vlastností, že pro každý centrovaný systém uzavřených množin $\mathcal{F}$ takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ a $U \in \mathcal{U}_n$, že $F \subset U$, je $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Identifikujeme X se svým obrazem v βX . Nechť $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, kde G_n jsou otevřené v βX . Pro každé $x \in X$ a $n \in \mathbb{N}$ existuje otevřená $U_{x,n} \subset \beta X$ taková, že

$$x \in U_{x,n} \subset \overline{U_{x,n}} \subset G_n.$$

Položme

$$V_{x,n} = X \cap U_{x,n} \quad \text{a} \quad \mathcal{U}_n = \{V_{x,n}; x \in X\}.$$

Nechť $\mathcal{F}$ je centrovaný systém uzavřených neprázdných množin takový, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $F \in \mathcal{F}$ a $U \in \mathcal{U}_n$ splňující $F \subset U$. Chceme ukázat, že $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Snadno vidíme, že systém $\mathcal{F}' = \{\overline{F}^{\beta X}; F \in \mathcal{F}\}$ je centrovaný v βX , a tedy má neprázdný průnik z charakterizace kompaktních prostorů. Ať $x \in \bigcap \mathcal{F}'$. Pak stačí ukázat, že $x \in X$.

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je pevné. Pak existuje $F \in \mathcal{F}$ a $U \in \mathcal{U}_n$ splňující $F \subset U$. Nechť $U = V_{y,n}$ pro nějaké $y \in X$. Pak

$$x \in \overline{F}^{\beta X} \subset \overline{U}^{\beta X} = \overline{V_{y,n}}^{\beta X} = \overline{X \cap U_{y,n}}^{\beta X} \subset \overline{U_{y,n}}^{\beta X} \subset G_n.$$

Tedy $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X$.

(ii) $\implies$ (i): Nechť $\{\mathcal{U}_n; n \in \mathbb{N}\}$ je posloupnost otevřených pokrytí splňující vlastnost v (ii). Pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $U \in \mathcal{U}_n$ nalezneme otevřenou množinu $V_{U,n} \subset \beta X$ takové, že $X \cap V_{U,n} = U$. Položme

$$G_n = \bigcup \{V_{U,n}; U \in \mathcal{U}_n\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ukážeme, že $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Inkluze $X \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ plyne okamžitě z faktu, že každé $\mathcal{U}_n$ je pokrytí.

Na druhou stranu ať $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Uvažujme systém

$$\mathcal{F} = \{X \cap \overline{W}^{\beta X}; W \in \mathcal{U}(x)\}.$$

Pak systém $\mathcal{F}$ je neprázdný ($X \cap W \neq \emptyset$ pro každou neprázdnou otevřenou množinu $W \subset \beta X$) a splňuje podmínku v (ii). Vskutku, pro pevné $n \in \mathbb{N}$ je $x \in G_n$, takže existuje $U \in \mathcal{U}_n$ takové, že $x \in V_{U,n}$. Nechť $H \subset \beta X$ je otevřená množina splňující $x \in H \subset \overline{H}^{\beta X} \subset V_{U,n}$. Pak $F = X \cap \overline{H}^{\beta X}$ je v $\mathcal{F}$ a splňuje

$$F = X \cap \overline{H}^{\beta X} \subset X \cap V_{U,n} = U.$$

Tedy $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Označme $y \in \bigcap \mathcal{F}$ libovolné. Pak $y \in X$. Ukážeme, že $y = x$. Kdyby toto totiž neplatilo, tj. x byl různý od y , pak existuje $V \in \mathcal{U}(x)$ takové, že $y \notin \overline{V}^{\beta X}$. Tedy $y \notin \bigcap \mathcal{F}$, což nelze. Tedy $x = y$ je prvkem X .

Tedy vskutku dostáváme $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, takže X je G_δ množinou v βX . □

Příklad 4.24. Sorgenfreyova přímka není čechovsky úplná, i když je Baireova

Z předchozí charakterizace nyní vyplývá, že Sorgenfreyova přímka není čechovsky úplná, i když to je Baireův prostor. □

Důkaz. Předpokládejme, že $\{\mathcal{U}_n\}$ je posloupnost pokrytí z charakterizace ve Větě 4.23. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že každé $\mathcal{U}_n$ sestává z bazových otevřených množin. Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $M_n = \bigcup \{(a, b);$

$[a, b) \in \mathcal{U}_n$. V Příkladu 3.6.5 jsem ukázali, že $|\mathbb{R} \setminus M_n| \leq \omega$. Tedy existuje $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ vybereme $[a_n, b_n) \in \mathcal{U}_n$ splňující $x \in (a_n, b_n)$. Nechť nyní c_n jsou reálná čísla splňující $a_n \leq c_n < x$ a $x - c_n < 2^{-n}$. Pak uzavřené množiny $[c_n, x)$ splňují $[c_n, x) \subset [a_n, b_n)$, ale jejich průnik $\bigcap_{n=1}^{\infty} [c_n, x) = \emptyset$. Tedy centrovaný systém uzavřených množin $\mathcal{F} = \{[c_n, x); n \in \mathbb{N}\}$ ukazuje, že posloupnost pokrytí $\{\mathcal{U}_n\}$ nespĺňuje požadované vlastnosti.

Abychom ukázali, že Sorgenfreyova přímka X je Baireova, uvažujme posloupnost $\{G_n\}$ otevřených hustých množin v X . Nechť interval $[a, b)$ libovolný je dán.

Induktivně zkonstruujeme intervaly $[a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$, tak, že platí:

- $[a_n, b_n) \subset [a, b) \cap G_n$, $n \in \mathbb{N}$,
- $[a_{n+1}, b_{n+1}) \subset [a_n, b_n)$, $n \in \mathbb{N}$,
- $b_n - a_n < 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$.

V prvním kroku konstrukce zvolíme $[a_1, b_1)$ tak, aby $[a_1, b_1) \subset [a, b) \cap G_1$ a $b_1 - a_1 < 2^{-1}$.

Máme-li intervaly již sestrojeny až do $n \in \mathbb{N}$, zvolíme $x_{n+1} \in [a_n, b_n) \cap G_{n+1}$. Nyní zvolíme interval $[a_{n+1}, b_{n+1})$ tak, že

$$x_{n+1} \in [a_{n+1}, b_{n+1}) \subset [a_n, b_n) \cap G_{n+1}$$

a $b_{n+1} - a_{n+1} < 2^{-n-1}$. Tím je konstrukce ukončena.

Nyní využijeme euklidovskou strukturu $\mathbb{R}$, která dává, že existuje

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \subset \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \right) \cap [a, b).$$

□

Čech ukázal, že jeho definice úplnosti je v souladu s požadavkem, že zobecňuje úplně metrizovatelné prostory.

Věta 4.25. Čechovsky úplně metrizovatelné prostory

Pro metrizovatelný prostor X jsou následující podmínky ekvivalentní.

- (i) X je úplně metrizovatelný.
- (ii) X je čechovsky úplný.

Důkaz. (i) $\implies$ (ii): Ať X je úplně metrizovatelný. Označme ρ úplnou kompatibilní metriku na X . Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nechť $\mathcal{V}_n$ je soubor všech otevřených koulí o poloměru 2^{-n} vzhledem k metrice ρ . Pak díky úplnosti (X, ρ) jsou splněny podle Cantorovy věty 4.12 předpoklady Frolíkovy věty 4.23, a tedy X je čechovsky úplný.

(ii) $\implies$ (i): Ať ρ je nějaká kompatibilní metrika na X a Y je zúplnění (X, ρ) . Prostor βY je kompaktifikace X , protože X je husté v Y a Y je husté v βY , tedy i X je husté v βY . Prostor X je čechovsky úplný, tedy X je G_δ -množina ve své kompaktifikaci βY . Proto je X G_δ -množinou ve svém zúplnění Y . Podle Alexandrovovy věty 4.16 je už X úplně metrizovatelný prostor. □

Čechovská úplnost přenáší do Tichonovových prostorů i další vlastnost úplně metrizovatelných prostorů, totiž že jsou Baireovy. I důkaz je podobný důkazu pro metrické prostory.

Věta 4.26. Baireova věta v čechovsky úplných prostorech

Každý čechovsky úplný prostor je Baireův.

Důkaz. Ať G_n , $n \in \mathbb{N}$ jsou husté otevřené množiny v X a $\mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřená pokrytí z charakterizace ve Větě 4.23. Nechť $G \subset X$ je neprázdná a otevřená.

Induktivně nalezneme uzavřené množiny $F_n \subset X$ takové, že

- $\text{Int } F_n \neq \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$,
- $F_{n+1} \subset F_n \subset G_n \cap G$, $n \in \mathbb{N}$,
- pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $U_n \in \mathcal{U}_n$ splňující $F_n \subset U_n$.

V prvním kroku nalezneme $x_1 \in G \cap G_1$. Necht $U_1 \in \mathcal{U}_1$ pokrývá x_1 . Z regularity existuje otevřená množina $W_1 \subset X$ splňující

$$x_1 \in W_1 \subset \overline{W_1} \subset G \cap G_1 \cap U_1.$$

Položíme $F_1 = \overline{W_1}$, pak jsou naše požadavky splněny.

Předpokládejme nyní, že máme zkonstruovány $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_n$ s požadovanými vlastnostmi. Ať x_{n+1} je bod v $\text{Int } F_n \cap G \cap G_{n+1}$ a $U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ obsahuje x_{n+1} . Opět zvolíme otevřené okolí W_{n+1} bodu x_{n+1} splňující

$$x_{n+1} \in W_{n+1} \subset \overline{W_{n+1}} \subset \text{Int } F_n \cap G \cap G_{n+1} \cap U_{n+1}.$$

Pak $F_{n+1} = \overline{W_{n+1}}$ splňuje požadované vlastnosti.

Jelikož je systém $\{F_n; n \in \mathbb{N}\}$ centrováný a splňuje předpoklady Frolíkovy charakterizace, je $\bigcap F_n \neq \emptyset$. Zjevně pak i $\bigcap G_n \cap G \neq \emptyset$. $\square$

Tvrzení 4.27. Zachovávání čechovské úplnosti operacemi

Čechovská úplnost se zachovává sumou, spočtetným součinem a uzavřeným nebo G_δ -podprostorem.

Důkaz. Jsou-li X_i , $i \in I$, čechovsky úplné, pak máme $X_i = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_{i,n}$, pro nějaké $G_{i,n} \subset \beta X_i$ otevřené. Jelikož βX_i je otevřenou podmnožinou $\prod_{j \in I} \beta X_j$, je množina $G_{i,n}$ otevřená v $\prod_{j \in I} \beta X_j$. Prostor $\prod_{j \in I} \beta X_j$ je však lokálně kompaktní, takže jde o otevřenou množinu v $\beta(\prod_{j \in I} \beta X_j)$. Tedy $G_n = \prod_{j \in I} G_{j,n}$ je otevřená podmnožina $\beta(\prod_{j \in I} \beta X_j)$ a $\prod_{j \in I} X_j = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Tedy $\prod_{j \in I} X_j$ je G_δ -podmnožina kompaktního prostoru $\beta(\prod_{j \in I} \beta X_j)$, takže se jedná o čechovsky úplný prostor.

Označme $X = \prod_{k \in \mathbb{N}} X_k$. Ať $X_k = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_{k,n}$, kde $G_{k,n}$, $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřené množiny v βX_k . Snadno se nahlédne, že $\prod \beta X_n$ je kompaktifikace X . Navíc $X = \bigcap_{k,n \in \mathbb{N}} \pi_k^{-1}(G_{k,n})$, tedy X je typu G_δ v $\prod \beta X_n$.

Je-li $F \subset X$ uzavřená a $G_n \subset \beta X$ otevřené v βX takové, že $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, pak $F = \overline{F}^{\beta X} \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$, tedy F je typu G_δ ve své kompaktifikaci $\overline{F}^{\beta X}$.

Necht $F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} H_n$, kde H_n , $n \in \mathbb{N}$, otevřené v X a $G_n \subset \beta X$, $n \in \mathbb{N}$, jsou otevřené, že $X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n$. Necht H'_n jsou otevřené množiny v βX takové, že $H'_n \cap X = H_n$. Pak

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} H'_n \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n.$$

Tedy F je G_δ v βX , tedy je G_δ i ve své kompaktifikaci $\overline{F}^{\beta X}$. Proto je F čechovsky úplný prostor. $\square$

Čechovsky úplné prostory se vzhledem k součinu chovají podobně jako úplně metrizovatelné prostory. Ukážeme, že součin nespočetně mnoha čechovsky úplných prostorů nemusí být čechovsky úplný.

Příklad 4.28. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ a čechovská úplnost

Prostor $\mathbb{N}^{\omega_1}$ není čechovsky úplný. $\square$

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbb{N}^{\omega_1}$ je čechovsky úplný a vezmeme posloupnost $\{\mathcal{U}_n\}$ z charakterizace ve Větě 4.23. Vezmeme libovolný bod $a \in \mathbb{N}^{\omega_1}$. Zkonstruujeme nerostoucí posloupnost obojetných bázových množin $\{F_n\}$ a posloupnost $\{U_n\}$ splňující $a \in F_n \subset U_n \in \mathcal{U}_n$, $n \in \mathbb{N}$.

V prvním kroku nalezneme $U_1 \in \mathcal{U}_1$ takové, že $a \in U_1$. Necht $K_1 \subset \omega_1$ je konečná, že obojetná množina $F_1 = \pi_{K_1}(a) \times \mathbb{N}^{\omega_1 \setminus K_1}$ splňuje $a \in F_1 \subset U_1$.

Mějme nyní naše množiny sestaveny až do $n \in \mathbb{N}$. Pak existuje $U_{n+1} \in \mathcal{U}_{n+1}$ takové, že $a \in U_{n+1}$. Nalezneme bázovou obojetnou množinu F splňující $a \in F \subset U_{n+1}$. Po dalším eventuálním zmenšení množiny F máme konečnou množinu $K_{n+1} \supset K_n$ takovou, že $F_{n+1} = \pi_{K_{n+1}}(a) \times \mathbb{N}^{\omega_1 \setminus K_{n+1}} \subset F_n \cap U_{n+1}$. Tím je konstrukce ukončena.

Nyní je průnik

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \pi_K(a) \times \mathbb{N}^{\omega_1 \setminus K}$$

uzavřená množina, kde $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ je spočtetná množina. Množina F však není spočtetně kompaktní, takže na ní existuje dle Věty 3.4(ii) spočtetný centrováný systém $\{H_n; n \in \mathbb{N}\}$ uzavřených množin s prázdným průnikem. Tento systém ale splňuje podmínky z Věty 4.23(ii), což je spor vlastnostmi našeho systému $\{\mathcal{U}_n\}$. $\square$

Součin spočetně mnoha čechovsky úplných prostorů je tedy Baireův. Ukážeme, že spočetnost lze v této formulaci vypustit. Poznamenejme, že součin $X \times X$, X Baireův, nemusí být Baireův prostor (příklady jsou obtížné).

Věta 4.29. Součin čechovsky úplných prostorů je Baireův

Součin libovolně mnoha čechovsky úplných prostorů je Baireův.

Důkaz. Krok 1. Necht X je čechovsky úplný prostor a $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost pokrytí z Frolíkovy charakterizace. Pak můžeme předpokládat, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ pokrytí $\mathcal{U}_{n+1}$ zjemňuje $\mathcal{U}_n$, tj. pro každé $U \in \mathcal{U}_{n+1}$ existuje $V \in \mathcal{U}_n$ splňující $U \subset V$.

Abychom tohoto dosáhli, induktivně definujeme nové systémy jako $\mathcal{V}_1 = \mathcal{U}_1$ a máme-li $\mathcal{V}_n$ definováno pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, položíme

$$\mathcal{V}_{n+1} = \{U \cap V; U \in \mathcal{U}_{n+1}, V \in \mathcal{V}_n\}.$$

Pak $\{\mathcal{V}_n\}$ je systém otevřených pokrytí, který též dosvědčuje čechovskou úplnost X .

Krok 2. Ať X_i jsou neprázdné čechovsky úplné prostory, G_n jsou husté otevřené podmnožiny v $X = \prod_{i \in I} X_i$ a G je neprázdňá otevřená množina v X . Máme dokázat, že $G \cap \bigcap G_n \neq \emptyset$. Pro každé $i \in I$ v X_i vezmeme posloupnost $\{\mathcal{V}_n(i)\}$ otevřených pokrytí popsanou ve Větě 4.23 s vlastností z Kroku 1.

Induktivně sestrojíme neprázdné bazové otevřené množiny U_n a konečné množiny $K_n \subset I$, $n \in \mathbb{N}$, takové, že

- $U_n = \prod_{i \in K_n} U_n(i) \times \prod_{i \in I \setminus K_n} X_i$,
- $K_n \subset K_{n+1}$,
- $U_{n+1} \subset \overline{U_{n+1}} \subset U_n \subset G \cap G_n$,
- pro $i \in K_n$ existuje $V_n(i) \in \mathcal{V}_n(i)$ splňující $U_n(i) \subset \overline{U_n(i)} \subset V_n(i)$.

Konstrukci zahájíme volbou $x_1 \in G \cap G_1$. Necht $W_1 \subset X$ je bazová množina splňující $x_1 \in W_1 \subset G \cap G_1$. Necht $K_1 \subset I$ je množina indexů $i \in I$, pro které platí $\pi_i(W_1) \neq X_i$. Pak K_1 je konečná. Pro každé $i \in K_1$ nalezneme $V_1(i) \in \mathcal{V}_1(i)$ takové, že $x_1(i) \in V_1(i)$. Necht $U_1(i) \subset X_i$ je otevřená množina splňující

$$x_1(i) \in U_1(i) \subset \overline{U_1(i)} \subset V_1(i) \cap \pi_i(W_1).$$

Pak množina $K_1 \subset I$ a otevřená bazová množina

$$U_1 = \prod_{i \in K_1} U_1(i) \times \prod_{i \in I \setminus K_1} X_i$$

splňují požadované vlastnosti.

Mějme nyní konstrukci provedenou až do $n \in \mathbb{N}$. Nalezneme $x_{n+1} \in U_n \cap G \cap G_{n+1}$ (to je neprázdňá množina, jelikož $U_n \subset G$ a G_{n+1} je hustá). Necht $W_{n+1} \subset X$ je bazová množina splňující $x_{n+1} \in W_{n+1} \subset U_n \cap G \cap G_{n+1}$. Necht $K' \subset I$ je množina indexů $i \in I$, pro které platí $\pi_i(W_{n+1}) \neq X_i$. Necht $K_{n+1} = K_n \cup K'$. Pro každé $i \in K_{n+1}$ nalezneme $V_{n+1}(i) \in \mathcal{V}_{n+1}(i)$ takové, že $x_{n+1}(i) \in V_{n+1}(i)$. Necht $U_{n+1}(i) \subset X_i$ je otevřená množina splňující

$$x_{n+1}(i) \in U_{n+1}(i) \subset \overline{U_{n+1}(i)} \subset V_{n+1}(i) \cap \pi_i(W_{n+1}).$$

Pak množina $K_{n+1} \subset I$ a otevřená bazová množina

$$U_{n+1} = \prod_{i \in K_{n+1}} U_{n+1}(i) \times \prod_{i \in I \setminus K_{n+1}} X_i$$

splňují požadované vlastnosti. Vskutku,

$$\overline{U_{n+1}} \subset \prod_{i \in K_{n+1}} \overline{U_{n+1}(i)} \times \prod_{i \in I \setminus K_{n+1}} X_i \subset W_{n+1} \subset U_n \cap G \cap G_{n+1}.$$

Necht nyní $i \in K = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$. Pak existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ splňující $i \in K_{n_0}$. Dle konstrukce máme množiny $\{V_n(i)\}_{n \geq n_0}$ takové, že $\overline{U_n(i)} \subset V_n(i)$, $n \geq n_0$. Pak posloupnost $\{\overline{U_n(i)}\}_{n \geq n_0}$ splňuje podmínku ve Větě 4.23(ii), takže existuje bod $x(i) \in \bigcap_{n \geq n_0} \overline{U_n(i)}$.

Pokud $i \in I \setminus K$, zvolíme libovolné $x(i) \in X_i$.

Pak bod $x = \{x(i)\}_{i \in I} \in X$ náleží do průniku $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (G \cap G_n)$. Vskutku, pro $n \in \mathbb{N}$ a $i \in K$ je

$$x(i) \in \overline{U_{n+1}(i)} \subset U_n(i).$$

Tedy

$$x \in \prod_{i \in K} U_n(i) \times \prod_{i \in I \setminus K} X_i = U_n \subset G \cap G_n.$$

Tím je důkaz dokončen. □

Je vidět z důkazu, že stačí předpokládat slabší vlastnosti posloupnosti otevřených soustav $\mathcal{U}_n$ než jsou uvedeny ve Větě 4.23 (např. Frolik v r.1960 použil tzv. π -báze místo pokrytí).

Uniformní prostory

Známé pojmy z matematické analýzy *stejněměrně spojitě funkce* a *stejněměrná konvergence funkcí* nemohou být popsány topologickými prostředky, protože ty jsou lokálního charakteru, kdežto ty předchozí mají globální charakter. Požadujeme u nich platnost stejné vlastnosti pro všechny prvky prostoru najednou. V metrických prostorech tato možnost je a až do 30.let minulého století to postačovalo. Potom se začala více rozvíjet teorie topologických grup, kde jsou stejnoměrné vlastnosti přirozené, ale v jistém smyslu skryté, jak uvidíme později. V té době nastal čas, kdy bylo nutné překonat určitá omezení, která metrické prostory dávají (např. jen spočetné součiny, spočetné lokální báze, apod.).

Prvním, kdo definoval nové abstraktní struktury, kde bylo možné uveste stejnoměrné vlastnosti zavést, byl D. Kurepa v r.1934. Zobecnil metrické prostory tím, že za obor hodnot metrik vzal vhodné uspořádané prostory místo intervalu $[0, \infty)$. Nicméně, tuto svou definici nerozvedl na další potřebné vlastnosti a tvrzení. Za tvůrce uniformních prostorů se proto považuje A. Weil, který zavedl uniformní prostory jiným způsobem v objemnější práci v r.1937, kde dokázal mnoho základních vlastností spolu s metrizovatelností i s potřebnými aplikacemi do teorie topologických grup.

5.1 Základní definice a vlastnosti

U hledání vhodné definice pro stejnoměrné pojmy šlo o podobný proces jako u vzniku topologických prostorů, tj. v tomto případě najít charakteristické rysy stejnoměrnosti v metrických prostorech bez použití reálných čísel. Definici stejnoměrně spojitých zobrazení $f : (X, \rho) \rightarrow (Y, \sigma)$ v metrických prostorech můžeme přepsat do tvaru

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : (f \times f)(\{(x, y) \in X \times X; \rho(x, y) < \delta\} \subset \{(u, v) \in Y \times Y; \sigma(u, v) < \varepsilon\}.$$

Základní roli tu hrají uvedená okolí diagonály. Ty se dají chápat jako relace na X , takže má smysl mluvit o reflexivitě, symetrii apod. Pro $E, F \subset X \times X$ značíme

$$E^{-1} = \{(x, y); (y, x) \in E\}, \\ E \circ F = \{(x, y); \exists z \in X : (x, z) \in E, (z, y) \in F\}.$$

Snadno se ověří asociativita skládání relací, tj. že platí $(E \circ F) \circ G = E \circ (F \circ G)$. Proto můžeme induktivně definovat

$$E_1 \circ \dots \circ E_{n+1} = (E_1 \circ \dots \circ E_n) \circ E_{n+1},$$

přičemž z asociativity operace skládání plyne, že na pořadí uzávorkování operace skládání ve výrazu $E_1 \circ \dots \circ E_n$ nezáleží.

Definice 5.1. Uniformní prostor a stejnoměrná spojitost

Uspořádaná dvojice (X, μ) se nazývá *uniformní prostor*, pokud X je množina, $\mu \subset \mathcal{P}(X \times X)$ a platí:

1. $E \in \mu \Rightarrow E \supset \Delta_X$,
2. $E_1, E_2 \in \mu \Rightarrow E_1 \cap E_2 \in \mu$,
3. $E_1 \in \mu, E_1 \subset E_2 \subset X \times X \Rightarrow E_2 \in \mu$,
4. $E \in \mu \Rightarrow E^{-1} \in \mu$,
5. $E_1 \in \mu \Rightarrow \exists E_2 \in \mu : E_2 \circ E_2 \subset E_1$.

Soustava μ se nazývá *uniformita* na X a prvky μ jsou *uniformní okolí diagonály*.

Zobrazení $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ se nazývá *stejněměrně spojitě*, jestliže $(f \times f)^{-1}(\nu) \subset \mu$, tj. pro každé $F \in \nu$ existuje $E \in \mu$, že $(f(x), f(y)) \in F$, jakmile $(x, y) \in E$. Množina všech stejněměrně spojitých zobrazení $X \rightarrow Y$ se značí $U(X, Y)$.

Bijekce $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ se nazývá *uniformní homeomorfismus*, jestliže f i f^{-1} jsou stejněměrně spojitě. $\square$

První tři axiomy říkají, že μ je filtr na $X \times X$, jehož průnik obsahuje diagonálu. Čtvrtý axiom říká, že filtr μ má bázi složenou ze symetrických relací ($E \cap E^{-1} \in \mu$ je symetrická relace). Poslední axiom je náhrada trojúhelníkové nerovnosti z metrických prostorů. Je to jakási slabá tranzitivita a snadno je vidět, že $\bigcap \mu$ je ekvivalence na X obsahující Δ_X .

(Vskutku, pokud $(x, y), (y, z) \in \bigcap \mu$ a $E \in \mu$, pak existuje $F \in \mu$ splňující $F \circ F \subset E$. Tedy $(x, y), (y, z) \in F$, což implikuje $(x, z) \in F \circ F \subset E$. Proto $(x, z) \in \bigcap \mu$.)

Podobně jako v topologických prostorech bývá vhodnější zavést topologii pomocí nějaké báze, tak i uniformity se zavádí pomocí báze.

Definice 5.2. Báze uniformního prostoru

Je-li (X, μ) uniformní prostor, pak $\mu' \subset \mathcal{P}(X \times X)$ je *báze* μ , pokud μ' je báze filtru μ a splňuje

1. $\bigcap \mu' \supset \Delta_X$,
4. $E_1 \in \mu' \Rightarrow \exists E_2 \in \mu' : E_2 \subset E_1^{-1}$,
5. $E_1 \in \mu' \Rightarrow \exists E_2 \in \mu' : E_2 \circ E_2 \subset E_1$.

$\square$

Snadno odvodíme následující fakt.

Fakt 5.3

Pokud $\mu' \subset \mathcal{P}(X \times X)$ je báze filtru na $X \times X$ a splňuje 1., 4. a 5. z Definice 5.2, pak filtr μ generovaný μ' je uniformita na X .

Podobně lze použít i subbázi uniformity; většinou se bere subbáze filtru symetrických a reflexivních relací na X splňující 5.

Příklady 5.4. Příklady uniformních prostorů

1. Nechť μ je filtr všech podmnožin $X \times X$ obsahujících diagonálu. Dostáváme tzv. *uniformně diskrétní* uniformní prostor. Uvidíme později, že se musí rozlišovat „uniformně diskrétní uniformní prostor“ a „diskrétní uniformní prostor“. Tato uniformita má jednoprvkovou bázi $\{\Delta_X\}$.
2. Nechť $\mu = \{X \times X\}$. Pak (X, μ) je *indiskrétní* uniformní prostor (v tomto případě není třeba přidávat adjektivum *uniformně* indiskrétní).
3. Pseudometrický prostor (X, ρ) určuje uniformní prostor (X, μ_ρ) mající bázi

$$E(r) = \{(x, y); \rho(x, y) < r\}, r > 0.$$

Jako v topologii stačí brát místo všech $r > 0$ jen posloupnost kladných čísel konvergující k 0. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne snadno $E(r) \circ E(r) \subset E(2r)$. Uniformní prostor budeme nazývat *uniformně pseudometrizovatelný*, pokud je určen pseudometrickým prostorem v právě uvedeném smyslu. Je zřejmé, že uniformně pseudometrizovatelný prostor je uniformně metrizovatelný, právě když $\bigcap_{r>0} E(r) = \Delta_X$.

Přesnější zápis uvedených uniformních okolí diagonály je $E_\rho(r)$. Tento zápis se používá, pokud není jasné, o jakou pseudometriku se jedná.

Pokud mluvíme o uniformitě pseudometrického prostoru, která nebude dále specifikována, máme na mysli právě zavedenou uniformitu.

4. Čtvrtá a pátá vlastnost je splněna automaticky, pokud μ má bázi složenou z ekvivalencí. Pokud tento případ nastane, nazývá se uniformní prostor *uniformně nuldimenzionální*. Sem patří např. uniformně diskrétní, indiskrétní uniformní prostory a ultrametrické prostory.
5. Je-li $\mathcal{F}$ filtr na X , pak $\{\Delta_X \cup (F \times F); F \in \mathcal{F}\}$ je báze uniformně nuldimenzionálního uniformního prostoru na X , jehož uniformitu označíme $\mu_{\mathcal{F}}$.

6. Ať $\mathcal{F}$ je filtr na X a $Y = X \times \{0, 1\}$. Pak množiny

$$E_F = \Delta_Y \cup \{(x, i), (x, 1 - i); x \in F\}, F \in \mathcal{F}$$

tvoří bázi uniformně nuldimenzionálního uniformního prostoru na Y , jehož uniformitu označíme $\mu(\mathcal{F})$. Uvidíme později (5.58.1), že každý Hausdorffův uniformní prostor je kvocientem nějakého právě uvedeného prostoru.

7. Ať X je množina a (Y, μ) je uniformní prostor. Na množině $F(X, Y)$ všech zobrazení $X \rightarrow Y$ definujeme pro $E \in \mu$

$$F_E = \{(f, g) \in F(X, Y) \times F(X, Y); \forall x \in X: (f(x), g(x)) \in E\}.$$

Velice snadno se ukáže (vizte následující příklad), že $\{F_E; E \in \mu\}$ je báze uniformity na $F(X, Y)$, která se nazývá *uniformita stejnoměrné konvergence*. Je to zobecnění případu, kdy μ je daná metrikou. Pokud chceme zdůraznit, že na $F(X, Y)$ (resp. $U(X, Y)$, pokud je X uniformní prostor) je uniformita stejnoměrné konvergence, píšeme $F_u(X, Y)$, resp. $U_u(X, Y)$.

8. Předchozí příklad lze zobecnit. Ať X je neprázdná množina, (Y, μ) je uniformní prostor a $\mathcal{S}$ je soustava podmnožin v X , která pokrývá X a je konečně aditivní, tj., $\bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{S}$ pro každou konečnou $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$. Pro $S \in \mathcal{S}$, $E \in \mu$ definujeme

$$F_{S,E} = \{(f, g); \forall x \in S: (f(x), g(x)) \in E\}.$$

Soustava všech $F_{S,E}$ je báze uniformity na $F(X, Y)$, která se nazývá *uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$* . Pokud nevyžadujeme konečnou aditivitu $\mathcal{S}$, je soustava všech $F_{S,E}$ subbáze uvedené uniformity.

Abychom ověřili předcházející tvrzení, je třeba ověřit vlastnosti z Definice 5.2. Pokud však máme $S_1, S_2 \in \mathcal{A}$ a $E_1, E_2 \in \mu$, platí

$$F_{S_1 \cup S_2, E_1 \cap E_2} \subset F_{S_1, E_1} \cap F_{S_2, E_2}.$$

Tedy naše množiny tvoří bázi filtru. Dále $(F_{S,E})^{-1} = F_{S,E^{-1}}$. A pokud $S \in \mathcal{A}$ a $E, E' \in \mu$ splňují $E' \circ E' \subset E$, pak

$$F_{S,E'} \circ F_{S,E'} \subset F_{S,E}.$$

Předchozí pak příklad dostaneme volbou $\mathcal{S} = \{X\}$. V jistém smyslu opačným extrémem je volba všech konečných podmnožin X za $\mathcal{S}$. Výsledná uniformita je uniformitou bodové konvergence, je shodná se součinem Y^X (vizte Sekci 5.2) a značí se $F_p(X, Y)$. Je možné vzít za $\mathcal{S}$ všechny spočetné podmnožiny X . Je-li X topologický prostor, častá volba je vzít za $\mathcal{S}$ všechny kompaktní podmnožiny v X . Je-li X uniformní prostor, místo kompaktních podmnožin se berou totálně omezené podmnožiny (viz 5.28 pro definici těchto množin). $\square$

Příklady 5.5. Příklady stejnoměrně spojitých zobrazení

1. Každé zobrazení na uniformně diskrétním prostoru nebo do indiskrétního prostoru je stejnoměrně spojitě.
2. Je-li (X, ρ) pseudometrický prostor a $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, je zobrazení $\{x \rightsquigarrow \rho(x, A)\} : (X, \rho_p) \rightarrow \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitě (protože $|\rho(x, A) - \rho(y, A)| \leq \rho(x, y)$).
3. ■■■ Je-li X uniformně diskrétní prostor, pak zobrazení $e = \{(x, f) \rightsquigarrow f(x)\} : X \times F_u(X, Y) \rightarrow Y$ je stejnoměrně spojitě. Toto zobrazení se nazývá *evaluace*. Evaluace není stejnoměrně spojitá, vezme-li se na $F(X, Y)$ uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$, pokud $\{X\} \notin \mathcal{S}$. $\square$

Nyní uvedeme jedno z nejdůležitějších tvrzení, které dokázal Weil ve své publikaci z r.1937. Uvidíme později, že je to modifikace metrizovatelnosti Aleksandrova a Urysohna z r.1923.

Věta 5.6. Metrizable uniformních prostorů

Uniformní prostor je pseudometrizable, právě když má spočetnou bázi.

Důkaz. Stačí dokázat, že (X, μ) se spočetnou bází $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ je pseudometrizable (opačná implikace plyne z definice uniformity na pseudometrických prostorech).

Indukcí zkonstruujeme novou, stejně označenou bázi $\{E_n\}_{n \in \omega}$ splňující $E_0 = X \times X$, $E_n = E_n^{-1}$ a

$E_n \circ E_n \circ E_n \subset E_{n-1}$ pro každé $n > 0$. Položme

$$f(x, y) = \begin{cases} 2^{-n}, & (x, y) \in E_n \setminus E_{n+1}, \\ 0, & (x, y) \in \bigcap E_n, \end{cases} \quad (x, y) \in X \times X.$$

Pak f je symetrická funkce díky symetrii E_n . Vezmeme největší pseudometriku ρ menší než f . Tu lze popsat formulí

$$\rho(x, y) = \inf \left\{ \sum_{i=0}^k f(p_i, p_{i+1}); p_0 = x, p_{k+1} = y, k \in \omega \right\}, \quad (x, y) \in X \times X.$$

Zjevně je ρ symetrická funkce na $X \times X$ splňující $\rho(x, x) = 0$. Ohledně trojúhelníkové nerovnosti uvažujme $x, y, z \in X$ a $\varepsilon > 0$. Nechť $x = p_0, \dots, p_{k+1} = y$ a $y = q_0, \dots, q_{l+1} = z$ jsou posloupnosti splňující

$$\sum_{i=0}^k f(p_i, p_{i+1}) \leq \rho(x, y) + \varepsilon \quad \text{a} \quad \sum_{j=0}^l f(q_j, q_{j+1}) \leq \rho(y, z) + \varepsilon.$$

Pak posloupnost

$$x = t_0 = p_0, \dots, t_{k+1} = p_{k+1} = y = q_0, t_{k+2} = q_1, \dots, t_{k+l+2} = z$$

spojuje x a z , takže

$$\begin{aligned} \rho(x, z) &\leq \sum_{n=0}^{k+l+1} f(t_n, t_{n+1}) = \sum_{n=0}^k f(t_n, t_{n+1}) + \sum_{n=k+1}^{k+l+1} f(t_n, t_{n+1}) \\ &= \sum_{n=0}^k f(p_n, p_{n+1}) + \sum_{n=0}^l f(q_n, q_{n+1}) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Tedy ρ je pseudometrika.

Nyní musíme ověřit, že pro každé $E \in \mu$ existuje $r > 0$ splňující $E_\rho(r) \subset E$ a že pro každé $r > 0$ existuje $E \in \mu$ splňující $E \subset E_\rho(r)$. Ověření druhé podmínky je snadné, pro $r > 0$ uvažujme $n \in \mathbb{N}$ splňující $2^{-n} < r$. Pak totiž

$$E_{n+1} \subset E_\rho(2^{-n}) \subset E_\rho(r).$$

Zbývá tak dokázat, že každé E_n obsahuje nějakou množinu $E_\rho(r)$. Ukážeme, že požadovaná inkluze platí pro $r = 2^{-n-1}$.

Chceme tak dokázat, že pokud existují $x = p_0, \dots, p_{k+1} = y$ splňující $\sum_{i=0}^k f(p_i, p_{i+1}) < 2^{-n-1}$, pak $(x, y) \in E_n$.

Důkaz provedeme indukcí podle $k \in \omega$. Pokud $k = 0$, máme $f(x, y) = f(p_0, p_1) < 2^{-n-1}$. Z definice funkce f nyní plyne, že $(x, y) \in E_n$.

Předpokládejme nyní, že naše tvrzení platí pro každé $k \in \omega$ menší jak nějaké $m \in \omega \setminus \{0\}$. Uvažujme posloupnost $x = p_0, \dots, p_{m+1} = y$ splňující

$$\sum_{i=0}^m f(p_i, p_{i+1}) < 2^{-n-1}.$$

Pak buďto $f(p_0, p_1) < 2^{-n-2}$ nebo $f(p_m, p_{m+1}) < 2^{-n-2}$.

Nechť nejprve $f(p_0, p_1) < 2^{-n-2}$. Nechť $k \in \omega$ je největší číslo menší nebo rovno než $m-1$ takové, že

$$\sum_{i=0}^k f(p_i, p_{i+1}) < 2^{-n-2}.$$

Pokud $k < m-1$, máme

$$\sum_{i=0}^{k+1} f(p_i, p_{i+1}) \geq 2^{-n-2},$$

takže

$$\sum_{i=k+2}^m f(p_i, p_{i+1}) < 2^{-n-2}.$$

Dle indukčního předpokladu platí $(p_0, p_{k+1}) \in E_{n+1}$ a $(p_{k+2}, p_{m+1}) \in E_{n+1}$. Jelikož $f(p_{k+1}, p_{k+2}) < 2^{-n-1}$, máme $(p_{k+1}, p_{k+2}) \in E_{n+1}$. Dohromady tak platí

$$(x, y) = (p_0, p_{m+1}) \in E_{n+1} \circ E_{n+1} \circ E_{n+1} \subset E_n.$$

Pokud $k = m - 1$, pak z indukčního předpokladu máme $(p_0, p_m) \in E_{n+1}$. Dále z $f(p_m, p_{m+1}) < 2^{-n-1}$ dostáváme $(p_m, p_{m+1}) \in E_{n+1}$. I v tomto případě tak máme

$$(x, y) = (p_0, p_{m+1}) \in E_{n+1} \circ E_{n+1} \subset E_n.$$

Pokud by nastal případ $f(p_0, p_1) \geq 2^{-n-2}$, pak nutně platí $f(p_m, p_{m+1}) < 2^{-n-2}$. Obdobně jako výše bychom našli nejmenší $k \in \{1, \dots, m\}$ splňující $\sum_{i=k}^m f(p_i, p_{i+1}) < 2^{-n-2}$. Dostali bychom tak buďto řetízky spojující

$$(p_0, p_{k-1}), (p_{k-1}, p_k), (p_k, p_{m+1}),$$

nebo řetízky spojující (p_0, p_1) a (p_1, p_{m+1}) . V obou případech pak jako výše obdržíme $(x, y) = (p_0, p_{m+1}) \in E_n$. $\square$

Pokud ρ je pseudometrika na X , jejíž uniformita μ_ρ je menší než μ , tj. $\text{Id}_X : (X, \mu) \rightarrow (X, \mu_\rho)$ je stejnoměrně spojitě zobrazení, budeme v tomto případě říkat, že ρ je *stejněměrně spojitá pseudometrika na (X, μ)* . Protože jsme začali s libovolnou symetrickou množinou μ , je uniformita μ sjednocením pseudometrizovatelných uniformit.

Důsledek 5.7. Uniformita je vytvořena systémem pseudometrik

1. Každá uniformita je sjednocením pseudometrizovatelných uniformit.

2. Pro každou uniformitu μ a každé $E \in \mu$ existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika ρ , že $E_\rho(1) \subset E$.

Důkaz. 1. Je-li (X, μ) uniformní prostor, vezmeme libovolné symetrické $E_1 \in \mu$. Indukcí sestrojíme posloupnost symetrických množin $\{E_n\}_{n \in \omega} \subset \mu$ tak, že $E_0 = X \times X$, $E_n \circ E_n \circ E_n \subset E_{n-1}$ pro každé $n > 0$. Podle důkazu předchozí věty je tato posloupnost bází pseudometrizovatelné uniformity μ_ρ , která splňuje $E_\rho(2^{-n-1}) \subset E_n \subset E_\rho(2^{-n})$. Pak je ρ stejnoměrně spojitá pseudometrika na (X, μ) a z uvedených inkluzí plyne $E_1 \in \mu_\rho$. Tedy μ je sjednocením pseudometrizovatelných uniformit.

2. Pro dané $E \in \mu$ zvolme symetrické E_1 splňující $E_1 \subset E$. Necht $\{E_n\}_{n \in \omega}$ je posloupnost v μ jako výše a σ je pseudometrika generovaná touto posloupností jako v důkazu Věty 5.6. Pak σ je stejnoměrně spojitá pseudometrika na X splňující

$$E_\sigma(2^{-2}) \subset E_1 \subset E.$$

Pak je pseudometrika $\rho = 2^2\sigma$ stejnoměrně spojitá na (X, μ) a platí $E_\rho(1) = E_\sigma(2^{-2}) \subset E_1 \subset E$. Tedy ρ je požadovaná pseudometrika. $\square$

Uvedeme si ještě jeden důsledek, který je velmi důležitý pro další použití. V jistém smyslu nahrazuje normalitu v uniformním prostoru. Dvě podmnožiny A, B uniformního prostoru (X, μ) budeme nazývat *vzdálenými*, jestliže existuje $E \in \mu$, že $E(A) \cap B = \emptyset$. Množiny $E(A)$, $E \in \mu$, kde

$$E(A) = \{y \in X; \exists x \in A: (x, y) \in E\}$$

se nazývají *stejněměrná okolí množiny A v (X, μ)* .

Fakt 5.8. Stejněměrná okolí v pseudometrickém prostoru

1. V pseudometrickém prostoru (X, ρ) jsou množiny A, B vzdálené, právě když $\rho(A, B) > 0$.

2. Dále je U je stejnoměrné okolí množiny A , právě když existuje $r > 0$ takové, že $U \supset B_\rho(A, r)$.

Důkaz. 1. Pokud jsou množiny A, B vzdálené, existuje $r > 0$ takové, že

$$\emptyset = B \cap E_\rho(r)(A) = B \cap \{y \in X; \exists x \in A: \rho(x, y) < r\} = B \cap B_\rho(A, r).$$

Tedy $\rho(A, B) \geq r > 0$

Obráceně, pokud $\rho(A, B) = r > 0$, pak

$$B \cap E_\rho\left(\frac{r}{2}\right)(A) = \emptyset.$$

2. Z rovnosti

$$B_\rho(A, r) = \{y \in X; \exists x \in A: \rho(x, y) < r\} = E_\rho(r)(A)$$

plyne, že pokud $U \supset B_\rho(A, r)$, pak pro $E = (A \times U) \cup E_\rho(r)$ platí $E \in \mu_\rho$ a $U = E(A)$. Obráceně, pokud $U = E(A)$ pro nějaké $E \supset E_\rho(r)$, pak $U \supset E_\rho(r)(A) = B_\rho(A, r)$. $\square$

Tvrzení 5.9. Oddělování vzdálených množin

Množiny A, B v uniformním prostoru X jsou vzdálené, právě když existuje stejnoměrně spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$ s hodnotami 0 na A a 1 na B .

Důkaz. Necht $E(A) \cap B = \emptyset$ pro nějaké $E \in \mu$. Podle Důsledku 5.7 existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika ρ na X taková, že $E_\rho(1) \subset E$. Pak $E_\rho(1)(A) = B_\rho(A, 1) \subset E(A)$ neprotíná B , takže $f(x) = \min\{\rho(x, A), 1\}$, $x \in X$, je hledaná funkce.

Vskutku, $f(x) = 0$ pro $x \in A$, $\rho(x, A) \geq 1$ pro $x \in B$, a tedy $f(x) = 1$ pro tato x . Navíc je f stejnoměrně spojitá na (X, μ) . To plyne z odhadu pro $r > 0$, který říká, že pokud $\rho(x, y) < r$, pak $|f(x) - f(y)| \leq \rho(x, y) < r$. Jelikož je ρ stejnoměrně spojitá pseudometrika, je $E_\rho(r) \in \mu$.

Pokud existuje stejnoměrně spojitá funkce $f: X \rightarrow [0, 1]$ oddělující A a B , pak množina

$$E = \{(x, y) \in X \times X; |f(x) - f(y)| < \frac{1}{4}\}$$

leží v μ a platí $E(A) \cap B = \emptyset$. $\square$

5.1.1 Topologie na uniformních prostorech

Pro relaci E na X , $x \in X$, značí $E(x)$ obraz bodu x relací E , tj. $E(x) = \{y \in X; (x, y) \in E\}$.

Věta 5.10. Uniformní prostor generuje topologii

Každý uniformní prostor (X, μ) určuje topologii na X . Podrobněji, topologie τ na X má pro každé $x \in X$ za filtry $\mathcal{U}_\tau(x)$ okolí bodu x systémy $\{E(x); E \in \mu\}$.

Důkaz. Snadno vidíme, že systémy $\{E(x); E \in \mu\}$ splňují vlastnosti (U1), (U2) a (U3) z Tvrzení 1.9. Je-li $U = E(x)$ pro nějaké $x \in X$ a $E \in \mu$, zvolíme $F \in \mu$ splňující $F \circ F \subset E$. Pak pro $V = F(x)$ platí, že pro $y \in V$ je $U \in \mathcal{U}_\tau(y)$.

Vskutku, pro každé $y \in V = F(x)$ totiž platí

$$F(y) \subset E(x).$$

(Je-li totiž $z \in F(y)$, je $(y, z) \in F$ a $(x, y) \in F$, tedy $(x, z) \in F \circ F \subset E$. Proto $z \in E(x)$.) Tím je ověřena poslední podmínka (U4) v Tvrzení 1.9. Proto je τ dobře definovaná topologie, která má za systémy okolí pro $x \in X$ famílie $\{E(x); E \in \mu\}$. $\square$

Můžeme tedy uvést následující definici.

Definice 5.11. Topologie vytvořená uniformitou

Je-li (X, μ) uniformní prostor, říkáme, že topologický prostor (X, τ) je vytvořen prostorem (X, μ) , jestliže pro každé $x \in X$ jsou filtry $\{E(x); E \in \mu\}$ právě filtry okolí bodu x v (X, τ) . Topologie τ se nazývá *topologie uniformity* μ .

Je-li $\mathcal{P}$ topologická vlastnost, říkáme, že uniformní prostor má vlastnost $\mathcal{P}$, jestliže jím určený topologický prostor má $\mathcal{P}$. $\square$

Můžeme tedy mluvit o uzávěru, okolí bodu, apod. v uniformním prostoru, o kompaktním nebo diskrétním nebo Hausdorffově uniformním prostoru.

Budeme také říkat, že τ je vytvořena uniformitou μ nebo, že τ má uniformitu μ .

Přiřazení topologického prostoru uniformnímu je zobrazení třídy všech uniformních prostorů Unif do třídy Top topologických prostorů a toto zobrazení budeme značit $t: \text{Unif} \rightarrow \text{Top}$. Použijeme ho i pro uniformity, takže $t\mu$ značí topologii vytvořenou uniformitou μ . Toto značení výhodně použijeme v konstrukcích.

Příklady 5.12. Topologie na uniformních prostorech

1. Na $X = \mathbb{N}$ vezmeme volný filtr $\mathcal{F}$. Uniformita $\mu_{\mathcal{F}}$ (Příklad 5.4.5) vytváří na $\mathbb{N}$ diskretní topologii, tedy stejnou jako uniformně diskretní uniformní prostor μ_d na $\mathbb{N}$. (Vskutku, je-li $x \in \mathbb{N}$ dáno, nalezneme $F \in \mathcal{F}$ splňující $x \notin F$. Pak pro $E = \Delta_{\mathbb{N}} \cup (F \times F)$ platí $E(x) = \{x\}$.)

Uniformita $\mu_{\mathcal{F}}$ však není uniformně homeomorfní s μ_d . (Opravdu, je-li $f: (\mathbb{N}, \mu_{\mathcal{F}}) \rightarrow (\mathbb{N}, \mu_d)$ stejnoměrně spojitá bijekce, je

$$\Delta_{\mathbb{N}} = (f \times f)^{-1}(\Delta_{\mathbb{N}}) \in \mu_{\mathcal{F}},$$

což však není pravda.) Odtud je vidět, že topologický prostor může být vytvořen více uniformitami. Každý uniformně diskretní prostor je diskretní, opak neplatí.

2. Indiskretní uniformita je jedinou uniformitou vytvářející indiskretní topologii.

3. Topologie pseudometrického uniformního prostoru μ_{ρ} je obvyklá topologie příslušného pseudometrického prostoru. (Vskutku, pro bázi uniformity μ_{ρ} máme vztah $E_{\rho}(r)(x) = B_{\rho}(x, r)$.)

4. Topologie uniformně nuldimenzionálního prostoru je nuldimenzionální.

Vskutku, nechť uniformní prostor (X, μ) má bázi μ' složenou z ekvivalencí. Je-li nyní $E \in \mu'$, je E symetrická a $E \circ E \circ E = E$. Dle Faktu 5.13.2 tak máme $E \subset \overline{E} \subset E \subset \text{Int } E \subset E$. Tedy pro $x \in X$ je $E(x)$ obojetná množina v $t\mu$, takže $t\mu$ je nuldimenzionální.

Opak neplatí, např. prostor $\mathbb{Q}$ racionálních čísel s obvyklou metrikou je nuldimenzionální, ale není uniformně nuldimenzionální jako uniformní prostor.

Vskutku, předpokládejme, že uniformita $\mu = \mu_{\rho}$ na $\mathbb{Q}$ tvořená standardní metrikou ρ má bázi z ekvivalencí. Nechť tedy E je ekvivalence v μ splňující $E \subset E_{\rho}(1)$. Jelikož systém $\{E_{\rho}(r); r > 0\}$ tvoří bázi μ , existuje $r > 0$ takové, že $E_{\rho}(r) \subset E$. Zvolme $x \in \mathbb{Q}$. Pak $E(x) \subset E_{\rho}(1)(x) = (x-1, x+1) \cap \mathbb{Q}$ je omezená množina, takže $p = \inf E(x) \in \mathbb{R}$. Nechť $y \in E(x)$ je vybráno tak že $y < p + \frac{r}{8}$. Jelikož E je ekvivalence a $(x, y) \in E$, platí $E(x) = E(y)$. Pak ovšem inkluze

$$E(x) = E(y) \supset E_{\rho}(r)(y) = (y-r, y+r) \cap \mathbb{Q}$$

znamená, že $p \in (y - \frac{r}{8}, y + \frac{r}{8})$ není infimum $E(x)$. To je ovšem spor, takže takové E neexistuje.

5. Topologie na $F(X, Y)$ vytvořená uniformitou stejnoměrné konvergence se nazývá *topologií stejnoměrné konvergence na $F(X, Y)$* . $\square$

Fakt 5.13. Jednoduché vlastnosti $t\mu$

1. $\overline{A} = \bigcap \{E(A); E \in \mu\}$.

2. Je-li E symetrická a $E \circ E \circ E \subset E'$, je $\overline{E} \subset E'$ a $\text{Int } E' \supset E$ (operace v součinu $X \times X$). Takže množina všech otevřených (nebo uzavřených) množin z μ v $X \times X$ tvoří bázi uniformity μ .

3. Každé stejnoměrně spojitě zobrazení uniformních prostorů je spojitě na vytvořených topologických prostorech.

4. Je-li ρ stejnoměrně spojitá pseudometrika na (X, μ) , je zobrazení $\text{Id}_X: (X, t\mu) \rightarrow (X, \rho)$ spojitě.

Důkaz. 1. Platí $x \in \overline{A}$, právě když pro každé symetrické $E \in \mu$ je $E(x) \cap A \neq \emptyset$, tj. $x \in E(A)$.

2. Je-li $(x, y) \in \overline{E}$, pak existuje $(a, b) \in (E(x) \times E(y)) \cap E$. Pak $(a, b) \in E$, $(x, a) \in E$ a $(y, b) \in E$, takže dohromady máme

$$(x, y) \in E \circ E \circ E \subset E'.$$

Dále uvažujme $(x, y) \in E$ a $(a, b) \in E(x) \times E(y)$. Pak $(a, x), (x, y), (y, b) \in E$, takže $(a, b) \in E \circ E \circ E \subset E'$. Tedy $E' \supset E(x) \times E(y)$, tj. $(x, y) \in \text{Int } E'$.

3. Nechť $f: (X, \mu_1) \rightarrow (Y, \mu_2)$ je stejnoměrně spojitě zobrazení. Nechť $x \in X$ je dáno a $F(f(x))$ je okolí $f(x)$ daného $F \in \mu_2$. Nalezneme $E \in \mu_1$ takové, že $(f \times f)(E) \subset F$. Pak pro $y \in E(x)$ platí $(x, y) \in E$, tj. $(f(x), f(y)) \in F$, a tedy $f(y) \in F(f(x))$. Zobrazení f je tak spojitě v x .

4. Tvzení plyne z 3. a z stejnoměrné spojitosti $\text{Id}_X: (X, \mu) \rightarrow (X, \mu_{\rho})$. $\square$

Základní otázkou je, které topologie jsou vytvořeny uniformitou. Určitě to nejsou všechny topologické prostory, např. Sierpiňského prostor nemůže být vytvořen uniformitou, protože topologie uniformit jsou

symetrické ($x \in \overline{\{y\}} \Rightarrow y \in \overline{\{x\}}$).

Fakt 5.14. Uniformní T_1 -prostor je Hausdorffův

Je-li $t\mu$ topologie na X generovaná uniformitou μ taková, že $t\mu$ je T_1 , je $t\mu$ T_2 .

Důkaz. Necht $x, y \in X$ jsou různé body. Protože jsou oba uzavřené, existuje $E_1, E_2 \in \mu$ symetrické, že $x \notin E_2(y)$ a $y \notin E_1(x)$. Necht $E_3 \in \mu$ je symetrické takové, že $E_3 \circ E_3 \subset E_1 \cap E_2$. Pak $E_3(x)$ a $E_3(y)$ jsou okolí x a y , která jsou disjunktní. Vskutku, je-li $z \in E_3(x) \cap E_3(y)$, je $(x, z), (y, z) \in E_3$, takže $(x, y) \in E_3 \circ E_3 \subset E_1$. Pak tedy $y \in E_1(x)$, což je spor s volbou E_1 . Tedy $(X, t\mu)$ je Hausdorffův. $\square$

Je proto vhodná následující definice.

Definice 5.15. Uniformizovatelné prostory

Topologický prostor je *uniformizovatelný*, jestliže jeho topologie je vytvořena nějakou uniformitou. $\square$

Příklady 5.16. Uniformizovatelnost

1. Pseudometrizable topologické prostory jsou uniformizovatelné.

2. Nuldimenzionální topologické prostory jsou uniformizovatelné. Všechny otevřené ekvivalence (otevřené ve smyslu podmnožiny součinu) nuldimenzionálního topologického prostoru X totiž tvoří bázi uniformity, která vytváří topologii X . Tato uniformita je uniformně nuldimenzionální. Ne všechny uniformity vytvářející nuldimenzionální topologii jsou uniformně nuldimenzionální (Příklad 5.12.4).

Vskutku, je-li (X, τ) nuldimenzionální prostor, pak je systém μ' všech otevřených ekvivalencí na $X \times X$ báze filtru na $X \times X$. Dále splňuje požadavky 1., 4. a 5. z Definice 5.2, neboť se jedná o relace ekvivalence. Generuje tak uniformitu μ , která je uniformně nuldimenzionální. Zbývá dokázat, že $t\mu = \tau$. Je-li však $x \in X$ a $U \in \tau$ množina obsahující x , můžeme předpokládat, že U je obojetná. Pak $E = (U \times U) \cup (X \setminus U \times X \setminus U)$ je otevřená podmnožina $X \times X$, která vytváří relaci ekvivalence. Navíc $E(x) = U$, takže $t\mu$ je jemnější než τ . Obrácené inkluze však plyne z toho, že μ má uniformitu tvořenou otevřenými podmnožinami součinu, takže $E(x) \in \tau$ pro každou otevřenou $E \in \mu$.

3. Nekonečně hrubé T_1 -prostory nejsou uniformizovatelné, i když jsou symetrické. (Stačí použít Fakt 5.14.) $\square$

Pomocí Důsledku 5.7 dokážeme následující charakterizaci uniformizovatelných prostorů. Tato charakterizace bude i jednoduchým důsledkem vztahu mezi konstrukcemi uniformních a topologických prostorů.

Věta 5.17. Charakterizace uniformizovatelných prostorů

Topologický prostor je uniformizovatelný, právě když je úplně regulární.

Důkaz. Ať (X, μ) je uniformní prostor. Ukážeme, že $t\mu$ je úplně regulární. Vezmeme $x \in X$ a jeho okolí U_x . Tedy existuje $E \in \mu$, že $E(x) \subset U_x$. Podle Důsledku 5.7.2 existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika ρ na (X, μ) , že $E_\rho(1) \subset E$, takže $x \in B_\rho(x, 1) \subset E(x) \subset U_x$. Potom spojitá funkce $f(y) = \rho(x, y)$, $y \in X$, je hledaná funkce z definice úplné regularity, protože $f(x) = 0, f(y) \geq 1$ pro $y \in X \setminus U_x$.

Ať (X, τ) je úplně regulární topologický prostor. Pro každou dvojici (x, U_x) , kde U_x je okolí x , najdeme spojitou $f : X \rightarrow [0, 1]$, že $f(x) = 0, f(y) = 1$ pro $y \in X \setminus U_x$ a označíme ji f_{x, U_x} . Pro každou spojitou $f : X \rightarrow [0, 1]$ a $r > 0$ položíme

$$E_f(r) = \{(u, v) \in X \times X; |f(u) - f(v)| < r\}.$$

Potom $(E_f(r))(y)$ je τ -okolím y pro každé $y \in X$ a $E_{x, U_x}(1)(x)$ je částí U_x . Ukážeme nyní, že

$$\{E_f(r); f \in C(X, [0, 1]), r > 0\}$$

je subbází nějaké uniformity μ .

Uvažujme tedy ty množiny $E \subset X \times X$, pro které existuje $f_1, \dots, f_n \in C(X, [0, 1])$ a $r_1, \dots, r_n > 0$ tak, že

$$E \supset \bigcap_{i=1}^n E_{f_i}(r_i).$$

Tyto množiny splňují axiomy 1.-5. Definice 5.1. Vskutku, zjevně platí $E \supset \Delta_X$ (tj. 1.), dále 3. a 4. (množiny $\bigcap_{i=1}^n E_{f_i}(r_i)$ jsou symetrické). Pokud $E_1 \supset \bigcap_{i=1}^n E_{f_i}(r_i)$ a $E_2 \supset \bigcap_{j=1}^m E_{g_j}(s_j)$, pak

$$E_1 \cap E_2 \supset \bigcap_{i=1}^n E_{f_i}(r_i) \cap \bigcap_{j=1}^m E_{g_j}(s_j),$$

takže μ splňuje 3. Konečně, pokud $E \supset \bigcap_{i=1}^n E_{f_i}(r_i)$, pak

$$F = \bigcap_{i=1}^n E_{f_i}\left(\frac{r_i}{2}\right)$$

splňuje

$$F \circ F \subset \bigcap_{i=1}^n E_{f_i}(r_i) \subset E.$$

Tedy i podmínka 5. je splněna. $\square$

5.1.2 Uniformity pomocí pokrytí

Naše definice uniformit je jednoduchá, ale je to definice částečně vnější, používá součin $X \times X$, nikoli jen X . Snadno dostaneme vnitřní popis uniformit, když si uvědomíme, že pro každé $E \in \mu$ je soustava $\mathcal{U}_E = \{E(x); x \in X\}$ pokrytí X a navíc je otevřené, pokud je E otevřená. Jde o to, jaké vlastnosti musí tyto soustavy pokrytí mít, aby zpětně určovaly uniformitu (každé pokrytí $\mathcal{A}$ množiny X určuje symetrickou reflexivní relaci $E_{\mathcal{A}} = \bigcup\{A \times A; A \in \mathcal{A}\}$).

Základní pojmy týkající se pokrytí jsou definovány v 1.77. Budeme psát $\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$ pokud pokrytí $\mathcal{U}$ zjemňuje pokrytí $\mathcal{V}$. Pokud $\mathcal{U}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{V}$, píšeme $\mathcal{U} \prec_{\text{star}} \mathcal{V}$.

Věta 5.18. Uniformity pomocí pokrytí

1. Pro uniformitu μ na X označme u_μ všechna pokrytí X , která jsou zjemňována pokrytím $\mathcal{U}_E = \{E(x); x \in X\}$ pro nějaké $E \in \mu$. Je-li μ uniformita na X , má systém pokrytí $u = u_\mu$ následující vlastnosti:

- (a) Každé dvě pokrytí z u mají společné zjemnění v u .
- (b) Každé pokrytí X zjemňované pokrytím z u náleží do u .
- (c) Každé pokrytí z u má v u hvězdovité zjemnění.

Prvky u_μ se nazývají uniformní pokrytí prostoru (X, μ) .

2. Obráceně, pokud u je systém pokrytí X splňující (a)-(c), pak existuje právě jedna uniformita μ na X taková, že $u_\mu = u$. Tato uniformita má za bázi systém $\{E_u; U \in u\}$.

Vztah $\mu \rightarrow u_\mu$ je tak bijektivní zobrazení mezi všemi uniformitami na množině X a soustavami u pokrytí X mající vlastnosti (a)-(c).

3. Zobrazení $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ je stejnoměrně spojitě, právě když vzor uniformního pokrytí na Y je uniformním pokrytím na X .
4. Topologie t_μ má za bázi okolí bodu $x \in X$ hvězdy $\text{star}_U(x)$, kde U jsou uniformní pokrytí prostoru (X, μ) .

Důkaz. 1. Je-li $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in u$, $\{E_1(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}_1$ a $\{E_2(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}_2$ pro nějaká $E_1, E_2 \in \mu$, pak $E_3 = E_1 \cap E_2 \in \mu$ a $\{E_3(x); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$, neboť $E_3(x) = E_1(x) \cap E_2(x)$, $x \in X$. Tedy (a) platí.

Vlastnost (b) ihned plyne z definice u .

Pro ověření vlastnosti (c) uvažujme $\mathcal{U} \in u$ zjemňované $\mathcal{U}_E$ pro nějaké $E \in \mu$. Necht' symetrické $F \in \mu$ splňuje $F \circ F \subset E$. Pak pro $x \in X$ platí, že $\text{star}_{\mathcal{U}_F}(x) \subset E(x)$, takže $\mathcal{U}_F \prec_{\text{star}} \mathcal{U}$.

Abychom ověřili inkluzi $\text{star}_{\mathcal{U}_F}(x) \subset E(x)$, zvolme $y \in \text{star}_{\mathcal{U}_F}(x)$. Pak existuje $z \in X$ takové, že $x \in F(z)$ a $y \in F(z)$. Pak ale $(x, z), (z, y) \in F$, takže $(x, y) \in E$. Proto $y \in E(x)$.

2. Je-li u systém pokrytí splňující (a)-(c), pak famílie $\mu' = \{E_u; U \in u\}$, kde $E_u = \bigcup\{U \times U; U \in \mathcal{U}\}$, sestává ze symetrických reflexivních relací na X . Zřejmě $\bigcap \mu' \supset \Delta_X$. Dále je vidět, že se jedná o bázi filtru, neboť $E_{\mathcal{U}_1} \cap E_{\mathcal{U}_2} \supset E_{\mathcal{U}_3}$, kde $\mathcal{U}_3 \prec \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$. (Vskutku, je-li $(x, y) \in E_{\mathcal{U}_3}$, pak existuje $U_3 \in \mathcal{U}_3$ takové, že $x, y \in U_3$. Pak existuje $U_1 \in \mathcal{U}_1$ splňující $U_3 \subset U_1$. Tedy $(x, y) \in E_{\mathcal{U}_1}$. Podobně platí $(x, y) \in E_{\mathcal{U}_2}$).

Ohledně vlastnosti 5. definice uniformity uvažujme $E_{\mathcal{U}} \in \mu'$. Necht $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ jsou pokrytí v u splňující $\mathcal{V} \prec_{\text{star}} \mathcal{U}$ a $\mathcal{W} \prec_{\text{star}} \mathcal{V}$. Pak z Faktu 1.78(a) plyne, že $\mathcal{W}$ je silně hvězdovité zjemnění $\mathcal{U}$. Chceme nyní ověřit, že $E_{\mathcal{W}} \circ E_{\mathcal{W}} \subset E_{\mathcal{U}}$. Necht tedy $(x, y), (y, z) \in E_{\mathcal{W}}$. Pak existují $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ takové, že $x, y \in W_1$ a $y, z \in W_2$. Pak existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $\text{star}_{\mathcal{W}}(W_1) \subset U$. Jelikož $x, z \in \text{star}_{\mathcal{W}}(W_1)$, platí $(x, z) \in U \times U \subset E_{\mathcal{U}}$.

Systém μ' tak jednoznačně určuje uniformitu μ na X . Potřebujeme ukázat, že $u_{\mu} = u$.

Necht tedy $\mathcal{U} \in u$ je dáno. Nalezneme $\mathcal{V} \in u$, které hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$. Pak $E_{\mathcal{V}} \in \mu'$ a $\{E_{\mathcal{V}}(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}$. Vskutku, je-li $x \in X$ a $\text{star}_{\mathcal{V}}(x) \subset U$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$, pak

$$E_{\mathcal{V}}(x) = \{y \in X; (x, y) \in E_{\mathcal{V}}\} = \{y \in X; \exists V \in \mathcal{V}: x, y \in V\} = \text{star}_{\mathcal{V}}(x) \subset U.$$

Tedy $\mathcal{U}$ je zjemňováno pokrytím $\mathcal{U}_E$, kde $E = E_{\mathcal{V}} \in \mu$. Proto $\mathcal{U} \in u_{\mu}$.

Obráceně, je-li $\mathcal{U} \in u_{\mu}$, je $\mathcal{U}$ zjemňováno nějakým $\mathcal{U}_E$ pro $E \in \mu$. Pak $E \supset E_{\mathcal{V}}$ pro $\mathcal{V} \in u$. Tedy

$$\mathcal{U} \succ \{E(x); x \in X\} \succ \{E_{\mathcal{V}}(x); x \in X\} = \{\text{star}_{\mathcal{V}}(x); x \in X\} \succ \mathcal{V}.$$

Pokrytí $\mathcal{U}$ je tak zjemňováno pokrytím z u , takže samo patří do u .

Dokázali jsme zatím, že $\mu \mapsto u_{\mu}$ je surjektivní zobrazení a že máme-li systém pokrytí u splňující (a)-(c), splňuje uniformita μ vytvořená v Kroku 2 vztah $u = u_{\mu}$.

Necht nyní u je systém pokrytí splňující (a)-(c) a μ je uniformita taková, že $u = u_{\mu}$. Necht ν je uniformita vyrobená v Kroku 2. Chceme dokázat, že $\mu = \nu$.

Necht tedy $E \in \mu$ je dáno. Nalezneme symetrické $F \in \mu$ splňující $F \circ F \subset E$. Pak $\{F(x); x \in X\} \in u$, takže $H = \bigcup \{F(x) \times F(x); x \in X\} \in \nu$. Pak ale

$$H \subset F \circ F \subset E,$$

takže $\mu \subset \nu$.

Obráceně, pokud $H \in \nu$, pak existuje $\mathcal{U} \in u$ splňující $\bigcup \{U \times U; U \in \mathcal{U}\} \subset H$. Z definice u_{μ} existuje $F \in \mu$ splňující $\{F(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}$. Pak $F \subset H$. Vskutku, je-li $(x, y) \in F$, je $y \in F(x)$, což je obsaženo v nějaké $U \in \mathcal{U}$. Tedy $x, y \in U$, což znamená

$$(x, y) \in U \times U \subset H.$$

Tedy i $\nu \subset \mu$ a zobrazení $\mu \mapsto u_{\mu}$ je vskutku bijekce.

3. Je-li $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ stejnoměrně spojitě, necht $\mathcal{V}$ je uniformní pokrytí Y . Pak existuje $F \in \nu$ splňující $\{F(y); y \in Y\} \prec \mathcal{V}$. Necht $E \in \mu$ splňuje $(f \times f)(E) \subset F$. Pak ovšem platí $f(E(x)) \subset F(f(x))$, takže

$$\{f^{-1}(V); V \in \mathcal{V}\} \succ \{f^{-1}(F(y)); y \in Y\} \succ \{E(x); x \in X\}.$$

Tedy $f^{-1}(\mathcal{V})$ je uniformní pokrytí X .

Necht opačně, vzor uniformního pokrytí $\mathcal{V}$ z ν je uniformní pokrytí z μ . Pak

$$(f \times f)(\bigcup \{f^{-1}(V) \times f^{-1}(V); V \in \mathcal{V}\}) \subset \bigcup \{V \times V; V \in \mathcal{V}\},$$

takže f je stejnoměrně spojitě.

4. Je-li $x \in X$, je $\{E(x); E \in \mu\}$ systém všech okolí bodu x v topologii $t\mu$. Necht $E \in \mu$ je dáno a $F \in \mu$ symetrické splňuje $F \circ F \subset E$. Pak $\mathcal{U} = \{F(y); y \in X\}$ je uniformní pokrytí X a platí $\text{star}_{\mathcal{U}}(x) \subset E(x)$. Vskutku, necht $z \in \text{star}_{\mathcal{U}}(x)$. Pak existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $x, z \in U$, tj. máme $y \in X$ takové, že $z, x \in F(y)$. Pak ovšem $(x, y), (y, z) \in F$, takže $(x, z) \in F \circ F \subset E$. Proto $z \in E(x)$.

Dále necht $\mathcal{U}$ je uniformní pokrytí X a $x \in X$ je dáno. Pak $E_{\mathcal{U}} = \bigcup \{U \times U; U \in \mathcal{U}\} \in \mu$. Pak ovšem $\text{star}_{\mathcal{U}}(x) = E_{\mathcal{U}}(x)$ je $t\mu$ -okolí x . $\square$

Předchozí vlastnosti pokrytí se dají vyjádřit výrazem, že u je filtr pokrytí vzhledem k hvězdovitému zjemnění. Protože hvězdovité zjemnění hvězdovitého zjemnění je silné hvězdovité zjemnění, lze v podmínce (c) požadovat ekvivalentně silné hvězdovité zjemnění. Protože μ má bázi otevřených množin, jsou otevřená uniformní pokrytí bází všech uniformních pokrytí uniformity μ . Ukážeme nyní, že lze použít funkcionálně otevřená pokrytí. Budeme potřebovat nový termín: soustava $\{S_i\}_{i \in I}$ podmnožin topologického prostoru X se nazývá *interiérové pokrytí* (zkráceně int-pokrytí), jestliže $\{\text{Int}(S_i)\}_{i \in I}$ je pokrytí X .

Tvrzení 5.19. Funkcionálně otevřená pokrytí

Necht (X, μ) je uniformní prostor.

1. Funkcionálně otevřená uniformní pokrytí tvoří bázi uniformních pokrytí prostoru (X, μ) (tj. každé uni-

formní pokrytí má zjemnění dané funkcionalně otevřeným uniformním pokrytím).

2. Funkcionalně uzavřená uniformní interiérova pokrytí tvoří bázi uniformních pokrytí prostoru (X, u) .

Důkaz. 1. Ať $\mathcal{U}$ je uniformní pokrytí X . Pak existuje $E \in \mu$ takové, že $\{E(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}$. Podle Důsledku 5.7 existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika ρ na (X, u) taková, že $E_\rho(1) \subset E$. Pak ovšem pokrytí $\{B_\rho(x, 1); x \in X\}$ zjemňuje $\mathcal{U}$. Otevřené množiny v (X, ρ) jsou funkcionalně otevřené v (X, ρ) , a tedy i v $(X, t\mu)$, což dává tvrzení v 1.

2. Pro důkaz druhého tvrzení stačí vzít pro uvedené ρ funkcionalně uzavřené interiérova pokrytí $\{\overline{B_\rho(x, \frac{1}{2})}^\rho; x \in X\}$. $\square$

Příklady 5.20. Uniformní pokrytí

1. Báze uniformních pokrytí uniformně diskretního prostoru je pokrytí jednobodovými množinami. Indiskretní uniformní prostor X má jediné uniformní pokrytí tvořené množinou X .

2. Báze uniformních pokrytí pseudometrického prostoru (X, ρ) je tvořena pokrytími $\{B_\rho(x, r); x \in X, r > 0\}$.

3. Ať (X, τ) je normální regulární prostor. Uvažujme systém

$$u = \{\mathcal{U} \text{ pokrytí } X; \text{ existuje konečné otevřené pokrytí } \mathcal{V}: \mathcal{V} \prec \mathcal{U}\}.$$

Pak u splňuje vlastnosti (a)-(c) z Věty 5.18.1. Vskutku, (b) platí zjevně a (c) díky Věte 1.79(b). Co se týče (a), pokud $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in u$ jsou zjemňována konečnými otevřenými pokrytími $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, je

$$\mathcal{V} = \{V_1 \cap V_2; V_1 \in \mathcal{V}_1, V_2 \in \mathcal{V}_2\}$$

konečné otevřené pokrytí X , které zjemňuje $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$. Tedy existuje uniformita μ na X určená systémem u .

Ukážeme, že $t\mu = \tau$. Topologie $t\mu$ má za bázi bodu $x \in X$ množiny $\text{star}_\mathcal{U}(x)$, kde $\mathcal{U}$ je μ -uniformní pokrytí X . Nechť tedy $E \in \mu$ je dáno. Pak můžeme předpokládat, že $E = E_\mathcal{U} = \bigcup \{U \times U; U \in \mathcal{U}\}$ pro nějaké $\mathcal{U} \in u$. Z definice u můžeme předpokládat, že $\mathcal{U}$ je konečné τ -otevřené pokrytí X . Pak $\text{star}_\mathcal{U}(x)$ je sjednocení τ -otevřených množin, tedy $\mathcal{U}_t(x) \subset \mathcal{U}_\tau(x)$. Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme τ -otevřené okolí U bodu x . Z regularity existuje τ -otevřená $V \in \mathcal{U}_\tau(x)$ splňující $x \in V \subset \bar{V} \subset U$. Pak je pokrytí $\mathcal{U} = \{U, X \setminus \bar{V}\}$ otevřené a konečné, tedy spadá do u . Proto je $U = \text{star}_\mathcal{U}(x)$ $t\mu$ -otevřené okolí x . Tedy $\mathcal{U}_\tau(x) \subset \mathcal{U}_t(x)$. Proto je $\tau = t\mu$ a μ generuje topologii τ .

Dále si uvědomme, že je-li topologický prostor (X, τ) normální regulární prostor, pak konečná otevřená pokrytí tvoří bázi uniformity μ ve výše uvedeném smyslu (speciálně $t\mu = \tau$). Obráceně, pokud systém u definovaný výše splňuje vlastnosti (a)-(c) z Věty 5.18.1. a indukovaná uniformita μ splňuje $t\mu = \tau$, pak je (X, τ) normální a regulární. Vskutku, normalita plyne z Věty 1.79(b). Je-li totiž $\mathcal{U}$ otevřené konečné pokrytí X , existuje dle (c) pokrytí $\mathcal{V} \in u$, které hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$. Dle definice u existuje konečné otevřené pokrytí $\mathcal{W}$, které zjemňuje $\mathcal{V}$. Pak $\mathcal{W}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$. Tedy Věta 1.79(b) dává normalitu (X, τ) . Ohledně regularity X stačí použít Větu 5.17, která říká, že uniformizovatelné prostory jsou úplně regulární.

Konečně si uvědomme, že pro $(X, \tau) = (\mathbb{R}, \rho)$ s obvyklou topologií generovanou euklidovskou metrikou ρ je uniformita μ vytvořená konečnými otevřenými pokrytími $\mathbb{R}$ jiná než uniformita μ_ρ daná metrikou ρ . Vskutku, tyto dvě uniformity nejsou uniformně ekvivalentní. Abychom to ověřili, uvažme $f: (\mathbb{R}, \mu) \rightarrow (\mathbb{R}, \mu_\rho)$ uniformní bijekci. Pak $\mathcal{U} = \{B_\rho(x, r); x \in \mathbb{R}\}$ je μ_ρ -uniformní pokrytí $\mathbb{R}$, takže i $f^{-1}(\mathcal{U})$ je μ -uniformní pokrytí $\mathbb{R}$. Tedy existuje konečné otevřené pokrytí $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_n\}$ prostoru $\mathbb{R}$, které zjemňuje $f^{-1}(\mathcal{U})$. Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ tedy nalezneme $x_i \in \mathbb{R}$ takové, že $V_i \subset f^{-1}(B_\rho(x_i, r))$. Pak ovšem dostáváme z inkluzí

$$\mathbb{R} = f(\mathbb{R}) = f\left(\bigcup_{i=1}^n V_i\right) \subset \bigcup_{i=1}^n f(V_i) \subset \bigcup_{i=1}^n B_\rho(x_i, r) \subsetneq \mathbb{R}$$

spor. Tedy μ není uniformně homeomorfní s μ_ρ . $\square$

Budeme používat oba popisy uniformit, tj. jak uniformní okolí diagonály tak uniformní pokrytí, podle toho, co bude výhodnější. V následujícím důkazu je vhodnější použít pokrytí.

Tvrzení 5.21. Uniformita na kompaktním prostoru

Na kompaktním regulárním prostoru existuje jediná uniformita, která určuje jeho topologii. Má za bázi uniformních pokrytí všechna otevřená pokrytí.

Důkaz. Nechť (X, τ) je kompaktní regulární prostor a nechť u je systém všech pokrytí X , které jsou zjemňovány nějakým otevřeným pokrytím. Ověřujeme nyní podmínky (a)-(c) z Věty 5.18 pro systém pokrytí u .

Pokud $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ jsou pokrytí X zjemňována otevřenými pokrytími $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, pak $\mathcal{U} = \{U_1 \cap U_2; U_1 \in \mathcal{U}_1, U_2 \in \mathcal{U}_2\}$ je pokrytí X , které zjemňuje $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$ a náleží do u . Vskutku, $\mathcal{W} = \{V_1 \cap V_2; V_1 \in \mathcal{V}_1, V_2 \in \mathcal{V}_2\}$ je otevřené pokrytí zjemňující $\mathcal{U}$. Tedy (a) platí.

Vlastnost (b) plyne ihned z definice u .

Ohledně vlastnosti (c), nechť $\mathcal{U} \in u$ je dáno. Hledáme $\mathcal{V} \in u$ takové, že $\mathcal{V} \prec_{\text{star}} \mathcal{U}$. Ať $\mathcal{W}$ je otevřené pokrytí zjemňující $\mathcal{U}$, pak díky kompaktnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{W}$ je konečné otevřené pokrytí. Protože kompaktní regulární prostor je normální, plyne z Věty 1.79(b) existence konečného otevřeného pokrytí $\mathcal{V}$, které hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{W}$. Pak $\mathcal{V} \prec_{\text{star}} \mathcal{W} \prec \mathcal{U}$, tedy $\mathcal{V} \prec_{\text{star}} \mathcal{U}$.

Označme μ uniformitu na X generovanou systémem u , tj. μ má za bázi množiny $E_{\mathcal{U}} = \bigcup \{U \times U; U \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{U} \in u$. Dle Věty 5.18 jsou báze okolí bodu $x \in X$ v topologii $t\mu$ množiny $\text{star}_{\mathcal{U}}(x)$, kde $\mathcal{U} \in u$. Pokud $\mathcal{U} \in u$ je zjemňováno otevřeným pokrytím $\mathcal{V}$, pak $\text{star}_{\mathcal{V}}(x) \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(x)$, a tedy do každého $t\mu$ -okolí bodu x vepíšeme τ -otevřené okolí x .

Mějme nyní τ -otevřené okolí U bodu x . Protože je X regulární prostor, existuje τ -otevřené okolí V bodu x , že $\bar{V} \subset U$. Potom $\mathcal{U} = \{U, X \setminus \bar{V}\}$ je otevřené pokrytí X , tj. $\mathcal{U} \in u$, a $\text{star}_{\mathcal{U}}(x) = U$. Tedy U je $t\mu$ -otevřené okolí bodu x . Proto $t\mu = \tau$.

Zbývá ukázat, že jiná uniformita určující topologii na X není. Ať ν je uniformita určující topologii na X a nechť u_{ν} je systém uniformních pokrytí prostoru (X, ν) . Chceme ukázat, že $u_{\nu} = u$.

Nechť tedy $\mathcal{H} \in u_{\nu}$ je zjemňováno konečným otevřeným pokrytím $\mathcal{U}$. Ukážeme, že $\mathcal{U}$ náleží do u_{ν} (pak také $\mathcal{H} \in u_{\nu}$).

Vezmeme $x \in X$. Ať $U_x \in \mathcal{U}$ obsahuje x . Existuje $\mathcal{W}_x \in u_{\nu}$ takové, že $\text{star}_{\mathcal{W}_x}(x) \subset U_x$ (to lze, neboť $t\nu = \tau$). Ať $\mathcal{V}_x$ je takové pokrytí z u_{ν} , že silně hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{W}_x$. Jelikož ν generuje τ , lze bez újmy na obecnosti předpokládat, že $\mathcal{V}_x$ sestává z otevřených množin. (Vskutku, existuje $F \in \nu$ τ -otevřená, že $\mathcal{A} = \{F(t); t \in X\} \prec \mathcal{V}_x$. Pak $\mathcal{A} \in u_{\nu}$ sestává z otevřených množin a silně hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{W}_x$.)

Nechť $V_x \in \mathcal{V}_x$ obsahuje x . Pak platí

$$\text{star}_{\mathcal{V}_x}(V_x) = \bigcup \{V \in \mathcal{V}_x; V \cap V_x \neq \emptyset\} \subset W$$

pro nějaké $W \in \mathcal{W}_x$. Pak ovšem $x \in V_x \subset W$, takže

$$\text{star}_{\mathcal{V}_x}(V_x) \subset W \subset \text{star}_{\mathcal{W}_x}(x) \subset U_x.$$

Najdeme konečné podpokrytí $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ z $\{V_x; x \in X\}$. Nyní vezmeme společné zjemnění $\mathcal{V} \in u_{\nu}$ všech pokrytí $\mathcal{V}_{x_1}, \dots, \mathcal{V}_{x_n}$. Ať $V \in \mathcal{V}$ je libovolné neprázdné. Existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ takové, že $V \cap V_{x_i} \neq \emptyset$. Potom $V \subset \text{star}_{\mathcal{V}_{x_i}}(V_{x_i}) \subset U_{x_i}$, takže $\mathcal{V}$ zjemňuje $\mathcal{U}$. Proto $\mathcal{U} \in u_{\nu}$, takže i $\mathcal{H} \in u_{\nu}$.

Obráceně, nechť $\mathcal{H} \in u_{\nu}$ je dáno. Víme z popisu u_{ν} , že existuje $E \in \nu$ takové, že $\{E(x); x \in X\} \prec \mathcal{H}$. Protože ν generuje topologii τ , existuje $F \in \nu$ τ -otevřená v $X \times X$ taková, že $F \subset E$. Pak ovšem $\mathcal{U} = \{F(x); x \in X\} \prec \mathcal{H}$ a $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí X . Tedy $\mathcal{H} \in u$ dle definice u . $\square$

Poznámka 5.22. Restrikce uniformity na kompaktní podprostor

Pokud má úplně regulární prostor X kompaktní podprostor Y a μ je uniformita na X , musí být zúžení μ na Y jediná uniformita na Y s bázi všech konečných otevřených pokrytí. To znamená, že pro každé konečné otevřené pokrytí $\mathcal{G}$ prostoru Y existuje uniformní pokrytí $\mathcal{U} \in \mu$ že $\{U \cap Y; U \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje $\mathcal{G}$.

Vskutku, je-li $\mathcal{G}$ konečné otevřené pokrytí prostoru Y , jde o $\mu|_Y$ -uniformní pokrytí. Tedy existuje $E \in \mu$ takové, že pro $E' = E \cap (Y \times Y)$ platí $\{E'(y); y \in Y\} \prec \mathcal{G}$. Nalezneme $F \in \mu$ symetrické splňující $F \circ F \subset E$. Bez újmy na obecnosti můžeme požadovat, aby F bylo otevřené okolí diagonály. Pak

$$\{F(x) \cap Y; x \in X\} \prec \{E'(y); y \in Y\}.$$

Je-li totiž $x \in X$ a $F(x) \cap Y \neq \emptyset$, vezmeme $y \in F(x) \cap Y$. Pak pro $z \in F(x) \cap Y$ platí $(x, z) \in F$ a $(x, y) \in F$, takže $(y, z) \in F \circ F \subset E$. Proto $(y, z) \in E' \cap (Y \times Y) = E'$, tedy $z \in E'(y)$. Máme tak $F(x) \cap Y \subset E'(y)$. Tedy $\mathcal{U} = \{F(x); x \in X\}$ je hledané otevřené μ -uniformní pokrytí.

Pro kompaktní regulární prostor můžeme používat uniformní vlastnosti, chápané jako vlastnosti jeho jediné uniformity.

Protože v topologických prostorech je při spojitém zobrazení vzor otevřeného pokrytí zase otevřené pokrytí, dostáváme důsledek charakterizace uniformních pokrytí kompaktního Hausdorffova prostoru, známého z metrických prostorů.

Důsledek 5.23. Stejněměrná spojitost na kompaktech

Ať X je kompaktní regulární prostor a Y uniformní prostor. Každé spojitě zobrazení $X \rightarrow Y$ je stejněměrně spojitě.

Příklady 5.24. Speciální uniformní pokrytí

1. Největší uniformita na pseudometrizovatelném prostoru. Pseudometrický prostor (X, ρ) s topologií τ_ρ určenou pseudometrikou ρ je normální prostor, a tedy všechna jeho konečná otevřená pokrytí tvoří bázi uniformity určující jeho topologii τ_ρ (vizte Příklad 5.20.3). Ukážeme, že slovo „konečná“ můžeme vynechat. Konkrétněji, nechť

$$u = \{\mathcal{U} \text{ pokrytí } X; \exists \mathcal{V} \text{ otevřené pokrytí: } \mathcal{V} \prec \mathcal{U}\}.$$

Pak u splňuje vlastnosti (a)-(c) Věty 5.18.1.

Vskutku, (b) plyne ihned z definice. Ohledně (a), jsou-li $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ dvě pokrytí zjemňována otevřenými pokrytími $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$, je

$$\mathcal{V} = \{V_1 \cap V_2; V_1 \in \mathcal{V}_1, V_2 \in \mathcal{V}_2\}$$

otevřené pokrytí v u zjemňující $\mathcal{U}_1$ i $\mathcal{U}_2$. Ověříme (c). Mějme tedy otevřené pokrytí $\mathcal{U}$, přičemž bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{U} = \{B(x, a_x); x \in X\}$ a že $\sup\{a_x; x \in X\} \leq 1$. Ukážeme, že pokrytí $\mathcal{V} = \{B(x, a_x/4); x \in X\}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$. Vezmeme $x \in X$ a $r = \sup\{a_z; x \in B(z, a_z/4)\}$. Pak $r \in (0, 1]$. Existuje takové $z \in X$, že $a_z > \frac{4r}{5}$ a $x \in B(z, \frac{a_z}{4})$. Potom $\text{star}_{\mathcal{V}}(x) \subset B(z, a_z)$. Opravdu, pro $y \in \text{star}_{\mathcal{V}}(x)$ existuje $V = B(u, a_u/4) \in \mathcal{V}$, že $x, y \in V$, tj. $\rho(x, u) < a_u/4$ (takže $a_u \leq r$) a $\rho(y, u) < a_u/4$ (takže $\rho(x, y) \leq a_u/2 \leq r/2$). Potom $\rho(y, z) \leq \rho(y, x) + \rho(x, z) \leq r/2 + r/4 < 4r/5 < a_z$, takže $y \in B(z, a_z)$.

Tedy u generuje uniformitu μ na X . Dále platí $t\mu = \tau_\rho$. Zjevně totiž $t\mu$ má bázi bodu $x \in X$ danou jako $\text{star}_{\mathcal{U}}(x)$, kde $\mathcal{U} \in u$. Stačí uvažovat otevřená pokrytí z u , takže $t\mu$ má bázi okolí bodů tvořenou τ_ρ -otevřenými množinami. Proto $t\mu \subset \tau_\rho$. Na druhou stranu, již konečná otevřená pokrytí generují uniformitu $\mu' \subset \mu$, pro kterou platí $t\mu' = \tau_\rho$. Tedy $\tau_\rho = t\mu' \subset t\mu \subset \tau_\rho$.

2. Uniformita na uspořádaném prostoru ω_1 . Nechť τ značí topologii na ω_1 . Ukážeme, že ω_1 má jedinou uniformitu generující τ .

První důkaz:

Krok 1. Je-li $\mathcal{U}$ libovolné otevřené pokrytí ω_1 , které má hvězdovité otevřené zjemnění, pak existuje $\beta \in \omega_1$ a $U \in \mathcal{U}$, že $(\beta, \omega_1) \subset U$.

Vskutku, pro každé limitní ordinální číslo $\alpha \in \omega_1$ existuje $\beta_\alpha < \alpha$, že $(\beta_\alpha, \alpha] \subset U_\alpha$ pro nějaké $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Podle Fodorovy věty existuje nespočetná množina $S \subset \omega_1$, že pro všechna $\alpha \in S$ jsou všechna β_α stejná, řekněme rovná β .

Pro každé $\alpha \in S$ je pak $\text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha) \supset (\beta, \omega_1)$. Abychom to ověřili pro $\alpha \in S$, povšimneme si nejprve, že $(\beta, \alpha] = (\beta_\alpha, \alpha] \subset U_\alpha$, takže

$$(\beta, \alpha] \subset U_\alpha \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha).$$

Nechť nyní libovolné $\alpha' > \alpha$ je dáno. Pak existuje $\alpha'' \in S$ splňující $\alpha' < \alpha''$. Pak ovšem $\alpha \in (\beta, \alpha''] \subset U_{\alpha''}$, takže $U_{\alpha''} \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha)$, z čehož plyne

$$\alpha' \in (\beta, \alpha''] \subset U_{\alpha''} \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha).$$

Tedy $(\beta, \omega_1) \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha)$ pro každé $\alpha \in S$.

Má-li tedy $\mathcal{U}$ hvězdovité otevřené zjemnění, musí $\mathcal{U}$ obsahovat nějaké $U \in \mathcal{U}$ splňující $(\beta, \omega_1) \subset U$ pro nějaké $\beta \in \omega_1$.

Krok 2. Je-li ν uniformita na ω_1 generující τ a $\mathcal{U}$ je ν -uniformní pokrytí, má otevřené hvězdovité zjemnění, takže dle Kroku 1 existuje $\beta \in \omega_1$ a $U \in \mathcal{U}$ splňující $(\beta, \omega_1) \subset U$.

Krok 3. Nechť ν je uniformita na ω_1 generující τ . Pro $\mathcal{U} \in \nu$ definujeme

$$\tilde{\mathcal{U}} = \{U \in \mathcal{U}; \forall \beta < \omega_1: (\beta, \omega_1) \not\subset U\} \cup \{U \cup \{\omega_1\}; U \in \mathcal{U}: \exists (\beta, \omega_1) \subset U\}.$$

Dokážeme, že $\tilde{\nu} = \{\tilde{\mathcal{U}}; \mathcal{U} \in \nu\}$ je uniformita na $\omega_1 + 1$. Z axiomů pro uniformní pokrytí je třeba ověřit axiom o existenci hvězdovitého zjemnění.

Ať $\tilde{\mathcal{U}} \in \tilde{\nu}$ je dáno. Ať $\mathcal{V} \in \nu$ silně hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$. Pak $\tilde{\mathcal{V}}$ hvězdovitě zjemňuje $\tilde{\mathcal{U}}$.

Vskutku, je-li $\gamma < \omega_1$, existuje $U \in \mathcal{U}$, že $\text{star}_{\mathcal{V}}(\gamma) \subset U$. Pokud $\text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\gamma) = \text{star}_{\mathcal{V}}(\gamma)$, leží $\text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\gamma)$ v nějaké množině z $\tilde{\mathcal{U}}$.

V druhém případě platí $\text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\gamma) = \text{star}_{\mathcal{V}}(\gamma) \cup \{\omega_1\}$. Pak existuje $V \in \mathcal{V}$ a β , že $\gamma \in V, (\beta, \omega_1) \subset V$. Potom $(\beta, \omega_1) \subset V \subset U$ a $U \cup \{\omega_1\} \in \tilde{\mathcal{U}}$, takže $\text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\gamma) \subset U \cup \{\omega_1\} \in \tilde{\mathcal{U}}$.

Nechť nyní $\gamma = \omega_1$. Pak

$$\text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\{\omega_1\}) = \bigcup \{V \cup \{\omega_1\}; V \in \mathcal{V}, \exists \beta < \omega_1: (\beta, \omega_1) \subset V\}.$$

Vezmeme libovolné V_0 z předchozího sjednocení a najdeme $U \in \mathcal{U}$, že $\text{star}_{\mathcal{V}}(V_0) \subset U$. Pak pro β dané množinou V platí $(\beta, \omega_1) \subset V_0 \subset U$, takže $U \cup \{\omega_1\} \in \tilde{\mathcal{U}}$. Pak $\text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\{\omega_1\}) \subset U \cup \{\omega_1\}$. Vskutku, je-li $V \in \mathcal{V}$ množina splňující $(\delta, \omega_1) \subset V$ pro nějaké $\delta < \omega_1$, pak $V \cap V_0 \neq \emptyset$, takže $V \subset \text{star}_{\mathcal{V}}(V_0) \subset U$. Proto $V \cup \{\omega_1\} \subset U \cup \{\omega_1\}$.

Systém $\tilde{\nu} = \{\tilde{\mathcal{U}}; \mathcal{U} \in \nu\}$ je proto uniformita na $[0, \omega_1]$.

Krok 4. Uniformita $\tilde{\nu}$ generuje topologii $\tilde{\tau}$ prostoru $[0, \omega_1]$.

Vskutku, z popisu $\tilde{\nu}$ plyne, že topologie generovaná $\tilde{\nu}$ je slabší než $\tilde{\tau}$. Na druhou stranu, je-li $\gamma \in \omega_1$ a W jeho otevřené okolí, předpokládejme, že $\sup W < \omega_1$. Pak existuje $\mathcal{U} \in \nu$ takové, že $\text{star}_{\mathcal{U}}(\gamma) \subset W$. Pak ovšem $\text{star}_{\tilde{\mathcal{U}}}(\gamma) \subset W$.

Je-li $\gamma = \omega_1$ a $(\beta, \omega_1]$ je otevřené okolí ω_1 , hledáme $\mathcal{U} \in \nu$ takové, že $\text{star}_{\mathcal{U}}(\omega_1) \subset (\beta, \omega_1]$. Předpokládejme, že žádné takové $\mathcal{U}$ neexistuje. Pak je systém

$$\mathcal{F} = \{[0, \beta] \cap \text{star}_{\mathcal{U}}(\omega_1); \mathcal{U} \in \nu\}$$

báze filtru množin v $[0, \beta]$. Nechť $\alpha \in [0, \beta]$ je hromadný bod $\mathcal{F}$. Vezmeme $\mathcal{U} \in \nu$ takové, že $\text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha) \subset [0, \beta]$. Nechť $\mathcal{V} \in \nu$ je silně hvězdovitě zjemnění $\mathcal{U}$. Pak $\alpha \in \text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\omega_1)$. Vezmeme $V \in \mathcal{V}$ obsahující α . Pak $V \cap \text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(\omega_1) \neq \emptyset$, takže existuje $W \in \mathcal{V}$ protínající V a obsahující (δ, ω_1) pro nějaké $\delta \in \omega_1$. Pak ovšem

$$\text{star}_{\mathcal{V}}(V) \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha).$$

(Vskutku, existuje $U' \in \mathcal{U}$ splňující $\text{star}_{\mathcal{V}}(V) \subset U'$. Pak ovšem

$$\alpha \in V \subset \text{star}_{\mathcal{V}}(V) \subset U',$$

takže $U' \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha)$.)

Tím dostáváme

$$W \subset \text{star}_{\mathcal{V}}(V) \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha) \subset [0, \beta].$$

To je ovšem spor s faktem $(\delta, \omega_1) \subset W$.

Náš výchozí předpoklad je tak mylný a $\tilde{\nu}$ proto generuje topologii $\tilde{\nu}$ na ω_1 .

Krok 4. Uniformita $\tilde{\nu}$ je tak ona jediná uniformita σ na $[0, \omega_1]$. Je-li nyní μ uniformita na $[0, \omega_1)$ generující topologii τ , je $\tilde{\mu} = \sigma$. Proto

$$\mu = \tilde{\mu} \upharpoonright_{[0, \omega_1)} = \sigma \upharpoonright_{[0, \omega_1)}.$$

Krok 5. Uniformita μ je tak restrikcí uniformity na $[0, \omega_1]$, a proto je jednoznačně určena.

Druhý důkaz: *Krok 1.* Ať $\mathcal{U}$ je libovolné otevřené pokrytí ω_1 . Pro každé limitní ordinální číslo $\alpha \in \omega_1$ existuje $\beta_\alpha < \alpha$, že $(\beta_\alpha, \alpha] \subset U_\alpha$ pro nějaké $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Podle Fodorovy věty existuje nespočetná množina $S \subset \omega_1$, že pro všechna $\alpha \in S$ jsou všechna β_α stejná, řekněme rovná β . Pro každé $\alpha \in S$ je pak (stejně jako v prvním důkazu) $\text{star}_{\mathcal{U}}(\alpha) = (\beta, \omega_1)$. Má-li tedy $\mathcal{U}$ hvězdovitě otevřené zjemnění, musí v $\mathcal{U}$ existovat U , že $(\beta, \omega_1) \subset U$ pro nějaké $\beta \in \omega_1$. To tedy musí platit pro libovolné uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ z libovolné uniformity na ω_1 .

Krok 2. Protože ω_1 je normální, množina všech jeho konečných otevřených pokrytí tvoří bázi uniformity, která generuje topologii. Označme ji μ . Každé pokrytí z μ je zjemňováno pokrytím skládajícím se pro nějaké $\beta < \omega_1$ z $[\beta + 1, \omega_1)$ a otevřeným konečným pokrytím kompaktního prostoru $[0, \beta]$. Tato pokrytí tvoří bázi

μ a každá uniformita ν na ω_1 (generující topologii ω_1) je hrubší než μ , protože každé ν -uniformní pokrytí má zjemnění uvedeného konečného typu.

Krok 3. Ať ν je uniformita na ω_1 generující topologii. Víme, že $\nu \subset \mu$. Chceme ukázat $\nu = \mu$. Uvažujme libovolné μ -uniformní pokrytí $\mathcal{U}$, tj. $\mathcal{U}$ lze uvažovat ve tvaru $\mathcal{U} = \mathcal{G} \cup \{(\beta, \omega_1)\}$ pro nějaké $\beta < \omega_1$, kde $\mathcal{G}$ je končené otevřené pokrytí $[0, \beta]$.

Potřebujeme najít $\mathcal{W} \in \nu$, že každé $W \in \mathcal{W}$ protínající $[0, \beta]$ je už částí této množiny. Pro každé $\alpha \leq \beta$ existuje otevřené pokrytí $\mathcal{V}_\alpha \in \nu$, že $\text{star}_{\mathcal{V}_\alpha}(\alpha) \subset [0, \beta]$. Vezmeme otevřená silně hvězdovitá zjemnění $\mathcal{W}_\alpha \in \nu$ pokrytí $\mathcal{V}_\alpha$ a vybereme konečně mnoho $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \in [0, \beta]$, že $\bigcup \text{star}_{\mathcal{W}_{\alpha_i}}(\alpha_i) = [0, \beta]$. Hledané pokrytí $\mathcal{W}$ je společné zjemnění pokrytí $\{\mathcal{W}_{\alpha_1}, \dots, \mathcal{W}_{\alpha_n}\}$.

Opravdu, ať $W \in \mathcal{W}$ a $W \cap [0, \beta] \neq \emptyset$. Existuje $i \in \{1, \dots, n\}$ tak, že $W \cap W_i \neq \emptyset$ pro nějaké $W_i \in \mathcal{W}_{\alpha_i}$ a $\alpha_i \in W_i$. Potom $\text{star}_{\mathcal{W}_{\alpha_i}}(W_i) \subset V_{\alpha_i} \in \mathcal{V}_{\alpha_i}$. Množina V_{α_i} obsahuje α_i , takže je částí $[0, \beta]$, což dokazuje i $W \subset [0, \beta]$.

3. Uniformní pokrytí na uspořádaném prostoru. Topologie na LOTS má bázi složenou z konvexních množin. Má uniformita na LOTS bázi z pokrytí složených z konvexních množin? Obecně nikoli, například uniformita na $\mathbb{R}$ mající za bázi všechna konečná otevřená pokrytí nemůže mít bázi pokrytí složenou z intervalů. Jeden interval by totiž musel být neomezený, což například pokrytí $\mathcal{U} = \{U, V\}$, kde

$$U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (2n - 1/3, 2n + 1 + 1/3) \quad \text{a} \quad V = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (2n + 1 - 1/3, 2n + 1/3\},$$

nesplňuje.

Ale každá uniformita na LOTS X má jemnější uniformitu na X , která má bázi uniformních pokrytí složenou z otevřených konvexních množin. Jinými slovy, jemná uniformita na LOTS má bázi složenou z konvexních množin (vizte Definici 5.47 pro definici jemné uniformity).

Ať X je uspořádaný prostor, μ je uniformita na X vytvářející topologii X a $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí z μ . Pro otevřenou množinu $G \subset X$ označíme

$$\tilde{G} = \{C; C \text{ je maximální konvexní množina obsažená v } G\}.$$

Potom $\tilde{\mathcal{U}} = \{C \in \tilde{\mathcal{U}}; U \in \mathcal{U}\}$ je otevřené pokrytí X složené z konvexních množin a zjemňující $\mathcal{U}$. Ukážeme, že $\nu = \{\tilde{\mathcal{U}}; \mathcal{U} \in \mu\}$ je báze uniformity. Jediný axiom uniformních pokrytí vyžadující ověření je existence hvězdovitých zjemnění. Ať $\tilde{\mathcal{U}} \in \nu$. Pokrytí $\mathcal{U} \in \mu$ má hvězdovité zjemnění $\mathcal{V} \in \mu$. Potom $\tilde{\mathcal{V}}$ hvězdovitě zjemňuje $\tilde{\mathcal{U}}$. Opravdu, pro $x \in X$ je $\text{star}_{\mathcal{V}}(x) \subset U$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$. Potom $\text{star}_{\tilde{\mathcal{V}}}(x) \subset \text{star}_{\mathcal{V}}(x) \subset U$ a je to otevřená konvexní množina, takže je částí nějaké množiny $C \in \tilde{\mathcal{U}}$. Důkaz je hotov. Zřejmě ν vytváří topologii na X . $\square$

Na kompaktních Hausdorffových prostorech a pseudometrizable topologických prostorech podle předchozího tvrzení a příkladu existuje uniformita, která má za bázi uniformních pokrytí všechna otevřená pokrytí. Tyto prostory mají v topologii zvláštní postavení, jak uvidíme v dalších kapitolách.

Definice 5.25. Parakompaktní prostory

Uniformizovatelný topologický prostor se nazývá *parakompaktní*, jestliže všechna jeho otevřená pokrytí tvoří bázi uniformity vytvářející topologii daného prostoru. $\square$

Kompaktní regulární a pseudometrizable prostory jsou parakompaktní, prostor ω_1 není parakompaktní. Je snadné ukázat, že Hausdorffovy prostory (obecněji symetrické prostory) s jedním hromadným bodem jsou parakompaktní.

5.1.3 Vlastnosti uniformních prostorů

V topologických prostorech jsou hodně používány kardinální funkce. V uniformních prostorech je tomu podobně, i když méně. Zatím můžeme popsat dvě důležité kardinální funkce.

Definice 5.26. Kardinální funkce

1. Nejmenší mohutnost báze uniformních okolí uniformního prostoru X se značí $\chi_u(X)$ a nazývá se *uniformní charakter prostoru X* .

2. Pokrývací charakter $\text{cov}(X)$ uniformního prostoru X je nejmenší nekonečná mohutnost, že uniformní pokrytí mohutnosti menší než κ tvoří bázi X , tj. zjemňují libovolné uniformní pokrytí. $\square$

Uniformní charakter uniformně diskrétního i indiskrétního prostoru je 1. Uniformní prostor je pseudometrizovatelný, právě když jeho uniformní charakter je nejvýše spočetný.

Pokrývací charakter nekonečného uniformně diskrétního prostoru mohutnosti κ je κ^+ , indiskrétního prostoru, kompaktního Hausdorffova prostoru nebo ω_1 je ω , separabilního metrického prostoru je ω nebo ω_1 .

Tvrzení 5.27. Pokrývací charakter a uniformně diskrétní podmnožiny

Pro uniformní prostor X je ekvivalentní:

1. Platí $\text{cov}(X) \leq \kappa$.
2. Pro každé uniformní okolí diagonály E existuje $A \subset X, |A| < \kappa$, že $E(A) = X$.
3. Každé uniformní pokrytí X má podpokrytí mohutnosti menší než κ .
4. Každý uniformně diskrétní podprostor v X má mohutnost menší než κ . ($A \subset X$ je uniformně diskrétní podprostor X , pokud existuje $E \in \mu$ takové, že systém $\{E(a); a \in A\}$ je disjunktní.)

Důkaz. 1. $\implies$ 2.: Necht $E \in \mu$ je uniformní okolí diagonály. Nalezneme symetrické $F \in \mu$ splňující $F \circ F \subset E$. Pak $\mathcal{U}_F = \{F(x); x \in X\}$ je uniformní pokrytí X , takže z definice existuje uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ zjemňující $\mathcal{U}_F$ takové, že má mohutnost menší než κ . Pro každé $U \in \mathcal{U}$ vybereme $a_U \in U$ a položíme $A = \{a_U; U \in \mathcal{U}\}$. Pak $|A| < \kappa$ a $E(A) = X$.

Vskutku, je-li $x \in X$ libovolné, pak existuje $U \in \mathcal{U}$ takové, že $x \in U$. Necht dále $z \in X$ splňuje $U \subset F(z)$. Pak $x, a_U \in F(z)$, tj. $(a_U, z), (z, x) \in F$, a tedy $(a_U, x) \in F \circ F \subset E$. Tedy $x \in E(A)$.

2. $\implies$ 3.: Necht $\mathcal{U}$ je uniformní pokrytí X . Pak existuje $E \in \mu$ takové, že pokrytí $\{E(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}$. Necht $A = \{a_\alpha; \alpha < \eta\}$, kde $\eta < \kappa$, je množina mohutnosti menší než κ taková, že $E(A) = X$. Pak $\mathcal{V} = \{E(a_\alpha); \alpha < \eta\}$ je systém množin splňující

$$X = E(A) = \bigcup_{\alpha < \eta} E(a_\alpha),$$

tj. jde o pokrytí, přičemž zjemňuje $\mathcal{U}$. Tedy $\mathcal{U}$ má podpokrytí mohutnosti menší než κ .

3. $\implies$ 4.: Necht $A \subset X$ je množina, pro kterou existuje $E \in \mu$ splňující, že systém $\{E(a); a \in A\}$ je disjunktní. Necht symetrické $F \in \mu$ splňuje $F \circ F \subset E$. Pak uniformní pokrytí $\{F(x); x \in X\}$ má podpokrytí $\{F(b); b \in B\}$, kde $|B| < \kappa$. Pro každé $a \in A$ vybereme $b \in B$ tak, aby $a \in F(b)$. Toto zobrazení je pak prosté.

Vskutku, pokud $a_1, a_2 \in A$ různé a $b \in B$ splňují $a_1, a_2 \in F(b)$, pak $(a_1, b) \in F, (b, a_2) \in F$, takže $(a_1, a_2) \in E$. Tedy $a_2 \in E(a_1)$, co je spor.

Tedy A je prostě zobrazeno do B , takže $|A| \leq |B| < \kappa$.

4 $\implies$ 1.: Necht $\mathcal{U}$ je uniformní pokrytí prostoru X . Pak existuje $E \in \mu$ splňující $\{E(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}$. Dále existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika ρ taková, že $E_\rho(1) \subset E$. Pak

$$\mathcal{U} \succ \{E(x); x \in X\} \succ \{E_\rho(1)(x); x \in X\} = \{B_\rho(x, 1); x \in X\}.$$

Pro každé $r > 0$ je r -sít A v prostoru (X, ρ) uniformně diskrétní v X . Vskutku, je-li $\{B_\rho(a, r); a \in A\}$ disjunktní, je i $\{E_\rho(r)(a); a \in A\}$ disjunktní a $E_\rho(r) \in \mu$. Necht A je maximální $\frac{1}{4}$ -sít v (X, ρ) , pak má tedy mohutnost menší než κ . Pak ovšem systém

$$\{B_\rho(a, 1); a \in A\}$$

je pokrytí X (z maximality A) mohutnosti menší než κ a je to podpokrytí $\{B_\rho(x, 1); x \in X\}$. Ukážeme, že $\{B_\rho(a, 1); a \in A\}$ je uniformní pokrytí X . K tomuto účelu si stačí rozmyslet, že

$$\{E_\rho(\frac{1}{8})(x); x \in X\} = \{B_\rho(x, \frac{1}{8}); x \in X\} \prec \{B_\rho(a, 1); a \in A\}.$$

Je-li však $x \in X$, nalezneme $a \in A$ splňující $\rho(x, a) < \frac{1}{4}$. Pak $B_\rho(x, \frac{1}{8}) \subset B_\rho(a, 1)$. Proto je pokrytí $\{B_\rho(a, 1); a \in A\}$ uniformní, má mohutnost menší než κ a zjemňuje $\mathcal{U}$. Tedy 1. platí. $\square$

Uniformní prostory se spočetným pokrývacím charakterem se ukáží být velmi důležité a mají svůj název:

Definice 5.28. Totálně omezené prostory

Uniformní prostor (X, μ) je *totálně omezený* (nebo *prekompaktní*), jestliže $\text{cov } X = \omega$, tj. platí ekvivalentní vlastnosti:

1. Každé uniformní pokrytí má konečné uniformní zjemnění.
2. Každé uniformní pokrytí má konečné podpokrytí.
3. Pro každé uniformní okolí E diagonály existuje konečná množina A , že $E(A) = X$.
4. Každý uniformně diskretní podprostor v X je konečný.

□

Příklady 5.29. Příklady totálně omezených prostorů

1. Indiskretní prostory a konečné prostory jsou totálně omezené.
2. Každý kompaktní regulární prostor je totálně omezený.
3. Prostor ω_1 je totálně omezený.
4. Každý pseudometrický prostor totálně omezený ve smyslu pseudometrik je totálně omezený v právě definovaném smyslu uniformit.

□

Fakt 5.30. Stejnoměrná spojitost a totální omezenost

Stejnoměrně spojitý obraz totálně omezeného prostoru je totálně omezený.

Důkaz. Je-li $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ stejnoměrně spojitě zobrazení a $\mathcal{U}$ je ν -uniformní pokrytí Y , je $f^{-1}(\mathcal{U})$ μ -uniformní pokrytí X . Má tedy konečné podpokrytí $\mathcal{V}$. Pak ovšem $f(\mathcal{V})$ je konečné podpokrytí $\mathcal{U}$, takže Y je totálně omezený. □

Spojitost zobrazení lze ověřit pomocí zachovávání konvergence. To nelze převést na stejnoměrnou spojitost, protože konvergence je lokálního charakteru. Existuje ale jistá obdoba, kterou nyní popíšeme.

Ať (X, μ) je uniformní prostor. Dva stejně indexované usměrněné soubory $\{x_i\}_I, \{y_i\}_I$ nazveme *blízké*, jestliže pro každé $U \in \mu$ existuje $i_0 \in I$, že $(x_i, y_i) \in U$ pro každé $i \geq i_0$. Dá se stručně říci, že usměrněný soubor $\{(x_i, y_i)\}$ konverguje k diagonále. Je-li μ vytvořena pseudometrikou ρ , jsou posloupnosti $\{x_n\}, \{y_n\}$ blízké, právě když $\rho(x_n, y_n) \rightarrow 0$. Pokud je soubor $\{y_i\}$ konstantní s hodnotou y , znamená blízkost, že $x_i \rightarrow y$ v topologii prostoru X .

Tvrzení 5.31. Stejnoměrná spojitost a blízkost usměrněných souborů

Zobrazení $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ uniformních prostorů je stejnoměrně spojitě, právě když zachovává blízké usměrněné soubory. Tj. jsou-li $\{x_i\}_{i \in I}, \{y_i\}_{i \in I}$ blízké v X , jsou $\{f(x_i)\}_{i \in I}, \{f(y_i)\}_{i \in I}$ blízké v Y .

Důkaz. Je-li f stejnoměrně spojitě a usměrněný soubor $\{(x_i, y_i)\}_{i \in I}$ konverguje k diagonále, pak pro dané $F \in \nu$ nalezneme $E \in \mu$ takové, že $(f \times f)(E) \subset F$. Necht $i_0 \in I$ je vybráno tak, aby $(x_i, y_i) \in E$ pro $i \geq i_0$. Pak ovšem $(f(x_i), f(y_i)) \in F$ pro $i \geq i_0$, takže $\{(f(x_i), f(y_i))\}$ konverguje k diagonále v $Y \times Y$.

Pokud f není stejnoměrně spojitě, existuje $F \in \nu$ takové, že pro každé $E \in \mu$ nalezneme $(x_E, y_E) \in E$ takové, že $(f(x_E), f(y_E)) \notin F$. Pak usměrněný soubor $\{(x_E, y_E)\}_{E \in \mu}$ konverguje k diagonále, ale jeho obraz $\{(f(x_E), f(y_E))\}_{E \in \mu}$ nikoliv. □

Uvedený popis někdy usnadňuje ověření stejnoměrné spojitosti, podobně jako použití konvergence při spojitosti.

Fakt 5.32. Několik jednoduchých tvrzení

1. Pro uniformní prostor (X, μ) jsou následující tvrzení ekvivalentní.
 - (a) $(X, t\mu)$ je Hausdorffův.
 - (b) $\bigcap \{E; E \in \mu\} = \Delta_X$.
 - (c) Pro každé $x, y \in X, x \neq y$ existuje uniformní pokrytí $\mathcal{U}$, že $y \notin \text{star}_{\mathcal{U}}(x)$.
2. Je-li uniformní prostor T_0 , je T_2 .

3. Ať X, Y jsou uniformní prostory. Spojité zobrazení $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$, které je stejnoměrně spojitě na husté části X , je stejnoměrně spojitě na X .

Důkaz. 1. (a) $\implies$ (c): Jsou-li $x \neq y$ různé body v X , nalezneme otevřenou množinu U v $t\mu$ splňující $x \in U$ a $y \notin U$. Dle Věty 5.18.4. existuje uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ takové, že $\text{star}_{\mathcal{U}}(x) \subset U$. Tedy $y \notin \text{star}_{\mathcal{U}}(x)$.

(c) $\implies$ (b): Necht $x \neq y$ jsou různé body v X . Necht $\mathcal{U}$ je uniformní pokrytí splňující $y \notin \text{star}_{\mathcal{U}}(x)$. Ať $E \in \mu$ splňuje $\{E(z); z \in E\} \prec \mathcal{U}$. Pak $(x, y) \notin E$. (Vskutku, kdyby bylo $(x, y) \in E$, pak $y \in E(x)$, přičemž $E(x) \subset U$ pro nějaké $U \in \mathcal{U}$. Pak ovšem

$$y \in E(x) \subset U \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(x),$$

což by byl spor.) Tedy $(x, y) \notin \bigcap \mu$.

(b) $\implies$ (a): Necht $x \neq y$ jsou různé body X . Ať $E \in \mu$ je vybráno tak, že $(x, y) \notin E$. Necht symetrické $F \in \mu$ splňuje $F \circ F \subset E$. Pak $F(x) \cap F(y) = \emptyset$. Vskutku, pokud $z \in F(x) \cap F(y)$, pak $(x, z), (z, y) \in F$, takže $(x, y) \in F \circ F \subset E$. Tedy $F(x)$ a $F(y)$ jsou dvě disjunktní okolí bodů x a y . Tedy $(X, t\mu)$ je Hausdorffův.

2. Necht $x \neq y$ jsou různé body X . Z předpokladu existuje $U \in t\mu$ splňující $|U \cap \{x, y\}| = 1$. Předpokládejme, že $U \cap \{x, y\} = \{x\}$. Necht $E \in \mu$ splňuje $x \in E(x) \subset U$. Pak $y \notin E(x)$, tedy $(x, y) \notin E$. Proto $\bigcap \mu = \Delta_X$ a $(X, t\mu)$ je Hausdorffův.

3. Necht $Z \subset X$ je hustý podprostor, kde je f stejnoměrně spojitě. Necht $F \in \nu$ je dáno. Zvolíme $F' \in \nu$ symetrické splňující $F' \circ F' \circ F' \subset F$. Necht $E \in \mu$ je vybráno tak, že

$$(f \upharpoonright_Z \times f \upharpoonright_Z)(E \cap (Z \times Z)) \subset F'.$$

Zvolíme symetrické $E' \in \mu$ takové, že $E' \circ E' \circ E' \subset E$. Necht $(x, y) \in E'$ je dáno. Ze spojitosti f existuje symetrické $E_1 \subset E'$ splňující $f(E_1(x)) \subset F'(f(x))$. Podobně existuje symetrické $E_2 \subset E'$ splňující $f(E_2(y)) \subset F'(f(y))$. Necht symetrické $E_3 \in \mu$ splňuje $E_3 \subset E_1 \cap E_2$. Zvolíme $z_1 \in Z \cap E_3(x)$ a $z_2 \in Z \cap E_3(y)$. Pak $(z_1, x) \in E_3 \subset E'$, $(x, y) \in E'$, $(y, z_2) \in E_3 \subset E'$, takže $(z_1, z_2) \in (Z \times Z) \cap E$. Tedy $(f(z_1), f(z_2)) \in F'$. Dále $(f(z_1), f(x)) \in F'$, $(f(y), f(z_2)) \in F'$, takže dohromady platí

$$(f(x), f(y)) \in F' \circ F' \circ F' \subset F.$$

tedy $(f \times f)(E') \subset F$, takže f je stejnoměrně spojitě. $\square$

5.2 Konstrukce

Velice stručně bez větších podrobností zopakujeme obecné postupy z kapitoly 2 o konstrukcích topologických prostorů.

Říkáme, že uniformita μ na X je *větší* (jemnější, silnější) než uniformita ν na X , jestliže $\mu \supset \nu$, tj. identické zobrazení $\text{Id}_X: (X, \mu) \rightarrow (X, \nu)$ je stejnoměrně spojitě. Opakem jsou termíny *menší* (hrubší, slabší).

Je-li X množina, pak systém uniformit na $X \times X$ vytváří uspořádání dané inkluzí, tedy $\tau \leq \sigma$, pokud $\tau \subset \sigma$. Tento uspořádaný prostor má pak následující vlastnosti.

Tvrzení 5.33. Svaz uniformit

Necht X je množina a $(U, \leq)$ je systém všech uniformit na X uspořádaný inkluzí.

1. Pak $(U, \leq)$ je úplný svaz, kde diskrétní uniformita tvoří největší prvek a indiskrétní nejmenší. Je-li $\{\mu_i; i \in I\} \subset U$, pak $\sup_{i \in I} \mu_i$ je uniformita, jejíž subbázi je systém $\bigcup_{i \in I} \mu_i$ a $\inf_{i \in I} \mu_i$ je uniformita mající za bázi ty množiny $E \in \bigcap_{i \in I} \mu_i$, pro něž existuje posloupnost $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \in \bigcap_{i \in I} \mu_i$ splňující $E_{n+1} \circ E_{n+1} \subset E_n$, $n \in \mathbb{N}$, $E_1 \subset E$. (Budeme pak říkat, že $\bigcap \mu_i$ je slabá báze uniformity.)
2. Uniformita μ je větší než ν , právě když identické zobrazení $\text{Id}: (X, \mu) \rightarrow (X, \nu)$ je stejnoměrně spojitě.
3. Ať $\{\mu_i; i \in I\}$ (resp. $\{\nu_i; i \in I\}$) je soubor uniformit na množině X (respektive Y) a $f: X \rightarrow Y$ je zobrazení. Je-li $f: (X, \mu_i) \rightarrow (Y, \nu_i)$ stejnoměrně spojitě pro každé $i \in I$, pak i zobrazení $f: (X, \sup_I \mu_i) \rightarrow (Y, \sup_I \nu_i)$ a $f: (X, \inf_I \mu_i) \rightarrow (Y, \inf_I \nu_i)$ jsou stejnoměrně spojitá.

Důkaz. 1. Systém $(U, \leq)$ je zjevně částečně uspořádaná množina, kde diskrétní uniformita je největší a indiskrétní uniformita nejmenší prvek. Mějme systém uniformit $\{\mu_i; i \in I\}$ v T . Pak uvažujme systém

množin

$$\mu' = \left\{ \bigcap_{j=1}^n E_j; E_1, \dots, E_n \in \bigcup_{i \in I} \mu_i, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Tento systém splňuje požadavky Definice 5.2. Vskutku, jedná se o bázi filtru a splňuje Definici 5.2.4. , Pokud $E = \bigcap_{j=1}^n E_j \in \mu'$, kde $E_1 \in \mu_{i_1}, \dots, E_n \in \mu_{i_n}$, zvolíme nejdříve $F_1 \in \mu_{i_1}$ splňující $F_1 \circ F_1 \subset E_1$ až $F_n \in \mu_{i_n}$ splňující $F_n \circ F_n \subset E_n$. Pak $F = \bigcap_{j=1}^n F_j$ leží v μ' a splňuje $F \circ F \subset E$. Tedy μ' generuje uniformitu μ na X .

Ta splňuje $\mu \supset \mu_i$ pro každé $i \in I$, takže μ je horní závora $\{\mu_i; i \in I\}$. Pokud ν je horní závora $\{\mu_i; i \in I\}$ a $E \in \mu$ je dáno, nechť $E' \in \mu'$ splňuje $E' \subset E$. Pak $E' = \bigcap_{j=1}^n E_j$, kde $E_j \in \mu_{i_j} \subset \nu$. Tedy $E' \in \nu$, takže i $E \in \nu$. Proto $\mu \leq \nu$ je supremum našeho systému.

Hledáme-li nyní infimum $\{\mu_i; i \in I\}$, položme

$$\mu' = \left\{ E \in \bigcap_{i \in I} \mu_i; \exists \{E_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \bigcap_{i \in I} \mu_i: E_{n+1} \circ E_{n+1} \subset E_n, n \in \mathbb{N}, E_1 \subset E \right\}.$$

Pak μ' splňuje požadavky Definice 5.2. Vskutku, je-li $E, F \in \mu'$ a $\{E_n\}, \{F_n\}$ jsou příslušné posloupnosti, pak $\{E_n \cap F_n\}$ je posloupnost svědčící o tom, že $E \cap F \in \mu'$. Tedy μ' je báze filtru. Pokud $E \in \mu'$ je dáno a $\{E_n\}$ je příslušná posloupnost, pak $\{E_n^{-1}\}$ dokládá fakt $E^{-1} \in \mu'$. Konečně, máme-li $E \in \mu'$ a $\{E_n\}$ je příslušná posloupnost, pak $F = E_2$ a $F_n = E_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, máme F i $\{F_n\}$ v $\bigcap_{i \in I} \mu_i$ a přitom platí $F_{n+1} \circ F_{n+1} \subset F_n$, $n \in \mathbb{N}$, a $F_1 = E_2 \subset F$.

Systém μ' tak generuje uniformitu μ na X . Ta je zjevně slabší než všechny μ_i , $i \in I$. Tedy μ je dolní závora našeho systému. Je-li uniformita ν dolní závora $\{\mu_i; i \in I\}$ a $E \in \nu$, existuje posloupnost $\{E_n\} \subset \nu$ splňující $E_{n+1} \circ E_{n+1} \subset E_n \subset E$, $n \in \mathbb{N}$. Pak ovšem $\{E_n\} \subset \bigcap_{i \in I} \mu_i$, a tedy $E \in \mu'$. Proto $E \leq \mu$. Tedy $\nu \leq \mu$ a μ je infimum našeho systému.

2. Je-li $\mu \supset \nu$, je zjevně identické zobrazení stejnoměrně spojitě. Obráceně, pokud $\text{Id}: (X, \mu) \rightarrow (X, \nu)$ je stejnoměrně spojitě a $F \in \nu$, pak $F = \text{Id}^{-1}(F) \in \mu$. Tedy $\mu \supset \nu$.

3. Nechť $f: (X, \mu_i) \rightarrow (Y, \nu_i)$ je stejnoměrně spojitě a $F \in \sup_{i \in I} \nu_i$ je dáno. Pak existuje $F' \in \bigcup_{i \in I} \nu_i$ splňující $F' \subset F$. Pak

$$(f \times f)^{-1}(F) \supset (f \times f)^{-1}(F'),$$

což je množina ležící v μ_i . Tedy $(f \times f)^{-1}(F) \in \sup_{i \in I} \mu_i$, takže f je stejnoměrně spojitě vzhledem k supremům.

Pro důkaz stejnoměrně spojitosti f vzhledem k infimum, nechť $F \in \inf_{i \in I} \nu_i$ je dáno. Pak existuje posloupnost $\{F_n\} \in \bigcap_{i \in I} \nu_i$ svědčící o faktu $F \in \inf_{i \in I} \nu_i$. Pak $E_n = (f \times f)^{-1}(F_n) \in \bigcap_{i \in I} \mu_i$ a $\{E_n\}$ je posloupnost svědčící o faktu $E = (f \times f)^{-1}(F) \in \inf_{i \in I} \mu_i$. Tedy f je stejnoměrně spojitě vůči infimum. $\square$

Důležitým příkladem je jiná formulace tvrzení 5.7.1: *Každá uniformita je supremem pseudometrizovatelných uniformit.*

Tvrzení 5.33.3 je základem pro definici projektivního a induktivního vytváření v uniformních prostorech. Definici z topologických prostorů zopakujeme.

Definice 5.34. Projektivní a induktivní vytváření

Ať X je množina a X_i , $i \in I$ soubor uniformních prostorů.

1. Uniformita μ na množině X se nazývá *projektivně vytvořená* souborem $f_i: X \rightarrow X_i, i \in I$, pokud μ je nejmenší uniformita při níž jsou všechna zobrazení $f_i: (X, \mu) \rightarrow X_i$ stejnoměrně spojitá.

2. Uniformita μ na množině X se nazývá *induktivně vytvořená* souborem $f_i: X_i \rightarrow X, i \in I$, pokud μ je největší uniformita při níž jsou všechna zobrazení $f_i: X_i \rightarrow (X, \mu)$ stejnoměrně spojitá. $\square$

Tvrzení 5.35. Existence projektivně a induktivně vytvořené uniformity

Nechť je X množina a (X_i, μ_i) , $i \in I$, je soubor uniformních prostorů.

1. Je-li $\{f_i: X \rightarrow X_i; i \in I\}$ soubor zobrazení, pak existuje právě jedna uniformita μ na X projektivně vytvořená tímto souborem.
2. Je-li $\{f_i: X_i \rightarrow X; i \in I\}$ soubor zobrazení, pak existuje právě jedna uniformita μ na X induktivně vytvořená tímto souborem.

Důkaz. (a) Nechť $(U, \leq)$ značí systém všech uniformit na X s uspořádáním. Nechť

$$F = \{\mu \in U; f_i: (X, \mu) \rightarrow (X_i, \mu_i) \text{ stejnoměrně spojitě pro každé } i \in I\}.$$

Uvažujeme-li na X diskrétní uniformitu μ_d , jsou všechna zobrazení f_i stejnoměrně spojitá, tedy $\mu_d \in F$ a F je neprázdná. Necht $\mu = \inf F \in U$. Pak dle Tvzení 5.33.3 je $\mu \in F$. Proto $\mu \in F$ je ona projektivně vytvořená uniformita.

(b) Necht

$$F = \{\mu \in U; f_i: (X_i, \mu_i) \rightarrow (X, \mu) \text{ stejnoměrně spojitě pro každé } i \in I\}.$$

Uvažujeme-li na X indiskrétní uniformitu μ_{ind} , jsou všechna zobrazení f_i stejnoměrně spojitá, tedy $\mu_{ind} \in F$ a F je neprázdná. Necht $\mu = \sup F \in U$. Pak dle Tvzení 5.33.3 je $\mu \in F$. Proto $\mu \in F$ je hledaná induktivně vytvořená uniformita. $\square$

Příklady 5.36. Příklady

1. Konstantní zobrazení projektivně vytvářejí indiskrétní prostory a induktivně uniformně diskretní prostory.
2. Supremum prostorů $(X, \mu_i), i \in I$, je induktivně vytvořená soustavou $\{Id_X: (X, \mu_i) \rightarrow X\}_I$. Jejich infimum je projektivně vytvořená soustavou $\{Id_X: X \rightarrow (X, \mu_i)\}_I$.
3. Kanonické zobrazení pseudometricky na její metrickou modifikaci je projektivně i induktivně vytvářející. Odtud plyne jiná verze výše uvedeného tvrzení o supremu pseudometrik: *Každá uniformita je projektivně vytvořená zobrazeními do metrizabletných prostorů.*
4. Každý uniformně nuldimenzionální prostor je projektivně vytvořen zobrazeními do uniformně diskretních prostorů.
5. Na $F(X, Y)$, je uniformita stejnoměrné konvergence na množinách z $\mathcal{S}$ (5.4) projektivně vytvořena zobrazeními $\varphi_S: F(X, Y) \rightarrow F_u(S, Y)$, $S \in \mathcal{S}$, kde $\varphi_S(f) = f \upharpoonright S$. $\square$

Uvedeme explicitně popis vytváření (jsou to charakterizace vytváření).

Tvrzení 5.37. Popis projektivně a induktivně vytvořených uniformit

1. Ať uniformní prostor (X, μ) je projektivně vytvořený souborem $f_i: X \rightarrow (X_i, \mu_i), i \in I$. Pak soustava $\{(f_i \times f_i)^{-1}(E); i \in I, E \in \mu_i\}$ je subbáze μ .
2. Ať prostor (X, μ) je induktivně vytvořený souborem $f_i: (X_i, \mu_i) \rightarrow X, i \in I$. Pak je $\{E \subset X \times X; (f_i \times f_i)^{-1}(E) \in \mu_i \text{ pro každé } i \in I\}$ je slabá báze μ .

Důkaz. 1. Necht μ je uniformita projektivně vytvořená naším souborem,

$$\nu' = \{(f_i \times f_i)^{-1}(E); i \in I, E \in \mu_i\}.$$

a

$$\nu = \{F \subset X \times F; \exists n \in \mathbb{N} \exists F_1, \dots, F_n \in \nu': E \supset F_1 \cap \dots \cap F_n\}.$$

Pak snadno ověříme, že ν je uniformita. Vskutku, vlastnosti 1., 2. a 3. Definice 5.1 jsou ihned vidět. Vlastnost 4. plyne z toho, že pro množiny $(f_i \times f_i)^{-1}(E)$ uvažujeme množiny $(f_i \times f_i)^{-1}(E^{-1})$. Konečně vlastnost pátá plyne z pozorování, že máme-li množinu

$$E = \bigcap_{k=1}^n (f_{i_k} \times f_{i_k})^{-1}(E_{i_k}),$$

kde $E_{i_k} \in \mu_{i_k}$, nalezneme množiny $F_{i_k} \in \mu_{i_k}$ splňující $F_{i_k} \circ F_{i_k} \subset E_{i_k}$. Pak množina

$$F = \bigcap_{k=1}^n (f_{i_k} \times f_{i_k})^{-1}(F_{i_k})$$

splňuje $F \circ F \subset E$.

Tedy ν je uniformita na X . Potřebujeme ověřit, že $\mu = \nu$. Jelikož každé $f_i: (E, \nu) \rightarrow (X_i, \mu_i)$ je stejnoměrně spojitě, platí $\mu \subset \nu$. Obráceně, necht $E \in \nu$. Pak existuje

$$F = \bigcap_{k=1}^n (f_{i_k} \times f_{i_k})^{-1}(F_{i_k}),$$

kde $F_{i_k} \in \mu_{i_k}$, takové, že $E \supset F$. Jelikož jsou zobrazení $f_{i_k}: (X, \mu) \rightarrow (X_{i_k}, \mu_{i_k})$ stejnoměrně spojitá, je $F \in \mu$. Tedy i $E \in \mu$. Tím je důkaz první části dokončen.

2. Nechť μ je uniformita na X induktivně vytvořená naším souborem a systémem

$$\nu' = \{E \subset X \times X; (f_i \times f_i)^{-1}(E) \in \mu_i \text{ pro každé } i \in I\}.$$

generuje jako slabá báze uniformitu ν . Tedy ν sestává z těch množin $E \subset X \times X$, pro které existuje posloupnost $\{E_n\} \subset \nu'$ splňující $E_{n+1} \circ E_{n+1} \subset E_n \subset E_1 \subset E$, $n \in \mathbb{N}$.

Chceme ověřit, že $\mu = \nu$. Zjevně jsou všechna zobrazení $f_i: (X_i, \mu_i) \rightarrow (X, \nu)$ stejnoměrně spojitá, takže $\nu \subset \mu$. Obráceně, je-li $E \in \mu$ a $i \in I$ dány, je $f_i: (X_i, \mu_i) \rightarrow (X, \mu)$ stejnoměrně spojitá. Tedy $(f_i \times f_i)^{-1}(E) \in \mu_i$. Tedy $E \in \nu$. Proto $\mu = \nu$, co bylo dokázat. $\square$

Definice 5.38. Podprostor a součin uniformních prostorů

1. Ať (X, μ) je uniformní prostor a $A \subset X$. Prostor (A, ν) se nazývá *podprostorem* prostoru (X, μ) , pokud uniformita ν na A je projektivně vytvořená zobrazením inkluze $j: A \rightarrow (X, \mu)$ (tj. identickým zobrazením A do X). Uniformita ν se nazývá zúžení (restrikce) uniformity μ na A a značí se $\nu = \mu \upharpoonright_A$ nebo $\nu = \mu_A$.
2. Jsou-li (X_i, μ_i) , $i \in I$, uniformní prostory, pak jejich *součin* je uniformní prostor (X, μ) , kde $X = \prod_{i \in I} X_i$ a uniformita μ je projektivně vytvořená projekcemi $\pi_i: X \rightarrow (X_i, \mu_i)$. Značí se $\prod_{i \in I} (X_i, \mu_i)$.
3. Zobrazení $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ se nazývá *uniformní vnoření*, pokud f je prosté a uniformita μ je projektivně vytvořená zobrazením f . $\square$

Fakt 5.39

1. Ať $A \subset (X, \mu)$. Množina $F \subset A \times A$ je v $\mu \upharpoonright_A$, právě když $F = E \cap (A \times A)$ pro nějaké $E \in \mu$.
2. $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ je uniformní vnoření, právě když zúžení $f: X \rightarrow f(X)$ je uniformní homeomorfismus prostoru X na podprostor $f(X) \subset Y$.
3. Je-li X podprostorem Y a Y podprostorem Z , je X podprostorem Z .
4. Zobrazení $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ je stejnoměrně spojitá, právě když je stejnoměrně spojitá jako zobrazení do podprostoru $f(X)$ prostoru Y .

Důkaz. 1. Dle Tvzení 5.37.1 má uniformita $\mu \upharpoonright_A$ za subbázi systém

$$\{(j \times j)^{-1}(E); E \in \mu\} = \{E \cap (A \times A); E \in \mu\}.$$

Snadno vidíme, že tento systém splňuje axiomy uniformity, a tedy $\mu \upharpoonright_A$ je rovno tomuto systému.

2. $\implies$: Je-li f uniformní vnoření, je speciálně f prosté a μ je generováno báží

$$\{(f \times f)^{-1}(F); F \in \nu\} = \{(f \times f)^{-1}(F'); F' \in \nu \upharpoonright_{f(X)}\}$$

. Tedy $f: (X, \mu) \rightarrow (f(X), \nu \upharpoonright_{f(X)})$ je stejnoměrně spojitá. Je-li nyní $E \in \mu$, existuje $F' \in \nu \upharpoonright_{f(X)}$ takové, že $E \supset (f \times f)^{-1}(F')$. Pak ovšem $(f \times f)(E) \supset F'$, takže $f^{-1}: f(X) \rightarrow X$ je stejnoměrně spojitá. Tedy f je uniformní homeomorfismus X a $f(X)$.

$\Leftarrow$: Nechť $f: X \rightarrow f(X)$ je uniformní homeomorfismus a σ je uniformita projektivně vytvořená f . Pak σ má za subbázi množiny

$$\{(f \times f)^{-1}(F); F \in \nu\}.$$

Dále pro $F \in \nu$ platí

$$(f \times f)^{-1}(F) = (f \times f)^{-1}(F \cap (f(X) \times f(X))) \in \mu.$$

Tedy $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ je stejnoměrně spojitá, a tedy $\sigma \subset \mu$. Nechť nyní $E \in \mu$ je dáno. Pak $(f \times f)(E) = F \cap (f(X) \times f(X))$ pro nějaké $F \in \nu$, takže

$$E = (f \times f)^{-1}(f \times f)(E) = (f \times f)^{-1}(F),$$

což je množina ze subbáze σ . Tedy $E \in \sigma$ a $\mu = \sigma$ je projektivně generována f .

3. a 4. Tvzení plynou z popisu restrikce uniformity. $\square$

Tvrzení 5.40. Vlastnosti součinu vyplývající z vlastností projektivního vytváření

1. Zobrazení $f: Z \rightarrow X = \prod_{i \in I} X_i$ je stejnoměrně spojitě, právě když jsou stejnoměrně spojitá všechna složení f s projekcemi $\pi_i: X \rightarrow X_i$.
2. Je-li každý prostor X_i součinem prostorů $X_{i,j}, j \in J_i$, je zobrazení $p: \prod_I X_i \rightarrow \prod \{X_{i,j}; i \in I, j \in J_i\}$ definované jako

$$p(\{x_i\}_{i \in I}) = p(\{\{x_{i,j}\}_{j \in J_i}\}_{i \in I}) = \{x_{i,j}\}_{i \in I, j \in J_i}$$

uniformní homeomorfismus těchto prostorů.

3. Jsou-li $f_i: Y_i \rightarrow X_i$ stejnoměrně spojitá zobrazení, je i jejich součin $\prod_I f_i: \prod_I Y_i \rightarrow \prod_I X_i$ stejnoměrně spojitý.
4. Je-li v předchozí položce $Y_i = Y$ pro každé $i \in I$, je diagonální součin $\Delta_I f_i: Y \rightarrow \prod_I X_i$ stejnoměrně spojitý.
5. Je-li X_i podprostor (Y_i, ν_i) , $i \in I$, je $\prod_{i \in I} X_i$ podprostor $\prod_{i \in I} Y_i$.

Důkaz. 1. Vzhledem k tomu, že projekce $\pi_i: \prod_{j \in I} X_j \rightarrow X_i$ jsou stejnoměrně spojitě, je složené zobrazení $\pi_i \circ f$ stejnoměrně spojitě, pokud f je stejnoměrně spojitě.

Pokud jsou všechna zobrazení $\pi_i \circ f, i \in I$, stejnoměrně spojitá a F je prvek uniformity na X , dle popisu součinu existují $i_1, \dots, i_n \in I$ a $E_1 \in \mu_{i_1}, \dots, E_n \in \mu_{i_n}$ tak, že

$$F \supset \bigcap_{k=1}^n (\pi_{i_k} \times \pi_{i_k})^{-1}(E_k).$$

Pak ovšem

$$(f \times f)^{-1}(F) \supset \bigcap_{k=1}^n (\pi_{i_k} \circ f \times \pi_{i_k} \circ f)^{-1}(E_k),$$

kde na pravé straně je množina náležející do uniformity na Z . Tedy f je stejnoměrně spojitě.

2. Důkaz je obdobný jako v Tvrzení 2.16.

3. Použijeme 1. Pro každé $i \in I$ nechť π_i^X a π_i^Y jsou kanonické projekce na příslušných součinech. Pak $\pi_i^X \circ \prod_{j \in I} f_j = f_i \circ \pi_i^Y$, což je stejnoměrně spojitě zobrazení. Dle 1. je i $\prod_{i \in I} f_i$ spojitě zobrazení.

4. Je-li pro $i \in I$ zobrazení π_i^X projekce $\prod_{j \in I} X_j$ na X_i , pak $\pi_i \circ \Delta_{j \in I} f_j = f_i$. Tedy $\Delta_{i \in I} f_i$ je stejnoměrně spojitě zobrazení dle 1.

5. Tvrzení plyne z definice příslušných uniformit. Vskutku, je-li $X = \prod_{i \in I} X_i$ a $Y = \prod_{i \in I} Y_i$, pak pro $j \in I$ a $E \in \nu_j$ platí

$$((\pi_j \times \pi_j)^{-1}(E)) \cap (X \times X) = (\pi_j \upharpoonright_X \times \pi_j \upharpoonright_X)^{-1}(E \cap (X_j \times X_j)).$$

Z tohoto vztahu a Tvrzení 5.37.1 je nyní požadované tvrzení vidět. $\square$

Platí i ostatní tvrzení a poznámky z části z 2.1, jen se místo topologie píší uniformity a místo spojitosti stejnoměrná spojitost.

Z části 2.2 lze automaticky převzít uniformní podprostory a součiny, i uniformní vnoření. Podprostor Y uniformního prostoru X má za uniformní okolí diagonály průniky uniformních okolí diagonály v X s množinou $Y \times Y$, uniformní pokrytí Y jsou zúžení uniformních pokrytí X na Y . Součin uniformních prostorů X_i , např. popsany pokrytími, má za subbázi vzory pokrytí projekcemi na jednotlivých souřadnicových prostorech. Platí Fakt 2.16 ale Důsledek 2.17 platí částečně, protože některé použité algebraické operace jsou stejnoměrně spojitě jen na omezených intervalech, např. $x \sin x$ není stejnoměrně spojitá funkce na $\mathbb{R}$, přestože funkce x i $\sin x$ jsou stejnoměrně spojitě.

Tvrzení 5.41. Stejnoměrná spojitost aritmetických operací

Jsou-li $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitá zobrazení, pak $f + g, f - g, \max\{f, g\}, \min\{f, g\}, |f|$ jsou stejnoměrně spojitá. Součin $f \cdot g$ je stejnoměrně spojitý, pokud f i g jsou omezené.

Důkaz. Nechť μ značí uniformitu na X . Je-li $\varepsilon > 0$, nechť $E \in \mu$ je takové, že $|f(x) - f(y)|, |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro každé $(x, y) \in E$. Pak

$$|f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| < \varepsilon, \quad (x, y) \in E.$$

Tedy $f + g$ je stejnoměrně spojitá funkce. Podobně se ověří stejnoměrná spojitost $f - g$.

Dále plyne z nerovnosti

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|, x, y \in X,$$

že $|f|$ je též stejnoměrně spojitá funkce. Proto jsou funkce

$$\max\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|) \quad \text{a} \quad \min\{f, g\} = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

též stejnoměrně spojité.

Jsou-li f, g omezené, řekněme konstantou $M > 0$, pak stejnoměrná spojitost $f \cdot g$ plyne z nerovnosti

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - f(y)g(y)| &\leq |f(x)g(x) - f(x)g(y)| + |f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\ &\leq M(|g(x) - g(y)| + |f(x) - f(y)|), \quad x, y \in X. \end{aligned}$$

□

Platí příslušná modifikace Věty 2.19. Její důsledek o vnoření do součinu však nelze bez větší změny přenést. Při vnoření do součinu musí být příslušný diagonální součin zobrazení prostý, a tedy použitý soubor zobrazení musí oddělovat body. Druhá podmínka pro topologické vnoření (oddělování bodu a uzavřené množiny) však použitelná není. Použijeme mírné zjednodušení projektivního vytváření.

Tvrzení 5.42. Vnoření do součinu

Ať $\mathcal{A}$ je nějaká třída uniformních prostorů. Existuje uniformní vnoření prostoru (X, μ) do součinu prostorů z $\mathcal{A}$, pokud třída zobrazení $\bigcup_{Y \in \mathcal{A}} U(X, Y)$ odděluje body a každé uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ X je zjemňováno pokrytím $f^{-1}(\mathcal{V})$ pro nějaké $f \in \bigcup_{Y \in \mathcal{A}} U(X, Y)$, $f : X \rightarrow Y$, a nějaké uniformní pokrytí $\mathcal{V}$ na Y .

Důkaz. Vezmeme množinu $\mathcal{B}$ prostorů z $\mathcal{A}$, která splňuje požadavky tvrzení. Necht $I = \bigcup_{Y \in \mathcal{B}} U(X, Y)$ a pro $i \in I$ necht f_i značí zobrazení i . Oddělování bodů znamená, že diagonální součin $g = \Delta_{i \in I} f_i$ je prostý. Vskutku, jsou-li $x, y \in X$ různé body, existuje $Y \in \mathcal{B}$ a $f \in U(X, Y)$ splňující $f(x) \neq f(y)$. Pak ovšem $g(x) \neq g(y)$, neboť na souřadnici i odpovídající f máme $\pi_i(g(x)) = f(x) \neq f(y) = \pi_i(g(y))$.

Nyní zbývá ověřit, že g je uniformní vnoření X do součinu prostorů z $\mathcal{B}$. Dle Tvrzení 5.40.4 je zobrazení g stejnoměrně spojité.

Potřebujeme ověřit, že g^{-1} je stejnoměrně spojité. Necht tedy $E \in \mu$ je dáno. Nalezneme symetrické $E' \in \mu$ splňující $E' \circ E' \subset E$. Pak $\mathcal{U} = \{E'(x); x \in X\}$ je uniformní pokrytí X . Necht $(Y, \nu) \in \mathcal{B}$, uniformní pokrytí $\mathcal{V}$ prostoru Y a $f \in U(X, Y)$ splňují $f^{-1}(\mathcal{V}) \prec \mathcal{U}$. Necht $F \in \nu$ splňuje $\{F(y); y \in Y\} \prec \mathcal{V}$. Pak

$$\{f^{-1}(F(y)); y \in Y\} \prec \mathcal{U}.$$

Zvolme $x_1, x_2 \in X$ takové, že $(f(x_1), f(x_2)) \in F$. Pak $f(x_2) \in F(f(x_1))$, přičemž $f^{-1}(F(f(x_1))) \subset E'(x)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $x_1, x_2 \in E'(x)$, takže $(x, x_1), (x, x_2) \in E'$, což implikuje $(x_1, x_2) \in E' \circ E' \subset E$. Tedy pokud $x_1, x_2 \in X$ splňují $(f(x_1), f(x_2)) \in F$, pak $(x_1, x_2) \in E$. Tedy

$$(g \times g)(E) \supset (\pi_f \times \pi_f)^{-1}(F) \cap (g(X) \times g(X)).$$

Vzhledem k tomu, že množina $(\pi_f \times \pi_f)^{-1}(F)$ tvoří subbázi uniformity σ součinu, je $(g \times g)(E)$ též obsaženo v uniformitě $\sigma|_{g(X)}$. Zobrazení g je tak uniformní homeomorfizmus. □

Důsledek 5.43. Vnoření do součinu metrizovatelných nebo diskretních prostorů

1. Každý uniformní (Hausdorffův) prostor lze vnořit do součinu pseudometrizovatelných (resp. metrizovatelných) prostorů.
2. Každý uniformně nuldimenzionální Hausdorffův prostor lze vnořit do součinu uniformně diskretních prostorů.

Důkaz. 1. Necht pro $E \in \mu$ je ρ_E stejnoměrně spojitá pseudometrika na X splňující $E_{\rho_E}(1) \subset E$. Necht $f_E : (X, \mu) \rightarrow (X, \rho_E)$ je identické zobrazení. Pak systém $\{f_E; E \in \mu\}$ odděluje body a splňuje požadavky Tvrzení 5.42.

Vskutku, je-li $\mathcal{U} = \{E(x); x \in X\}$ uniformní pokrytí X dané $E \in \mu$, je

$$\mathcal{V} = \{B_{\rho_E}(x, 1); x \in X\} = \{E_{\rho_E}(1)(x); x \in X\}$$

uniformní pokrytí (X, ρ_E) , které zjemňuje $\mathcal{U}$ (neboť $E_{\rho_E}(1)(x) \subset E(x)$). Tedy (X, μ) lze vskutku vnořit do součinu pseudometrizovatelných prostorů.

Pokud je (X, μ) Hausdorffův, uvažujeme jako výše pro každé $E \in \mu$ zobrazení $f_E: (X, \mu) \rightarrow (X_E, \overline{\rho_E})$. Zde ρ_E je pseudometrika na X jako výše a $\overline{\rho_E}$ je metrika na X vzniklá faktorizací ρ_E . (Přesněji, uvažujeme relaci ekvivalence $x \sim y$, pokud $\rho_E(x, y) = 0$. Pak $X_E = X/\sim$ s metrikou $\overline{\rho_E}([x], [y]) = \rho(x, y)$.) Zobrazení f_E je pak definováno jako $f_E(x) = [x]$, $x \in X$, kde $[x] = \{y \in X; x \sim y\}$.

Pak systém $\{f_E; E \in \mu\}$ sestává ze stejnoměrně spojitých zobrazení a odděluje body X . Vskutku, je-li $x \neq y$ v X , existuje symetrické $E \in \mu$ splňující $(x, y) \notin E$. Pak pseudometrika ρ_E splňuje $\rho(x, y) > 0$, takže $f_E(x) \neq f_E(y)$.

A stejně jako výše platí, že náš systém zobrazení splňuje požadavky Tvrzení 5.42. Tedy X lze vnořit do součinu metrizovatelných prostorů

2. Ať (X, μ) je uniformně nuldimenzionální. Je-li $E \in \mu$ ekvivalence, příslušné zobrazení $(X, \mu) \rightarrow (X/E, \nu)$, kde ν je uniformně diskretní, je stejnoměrně spojitý. Takže tato zobrazení projektivně vytváří (X, μ) a oddělují body, pokud je X Hausdorffův. $\square$

Uvidíme později v Důsledku 5.74, že totálně omezené prostory lze vnořit do Tichonovova kvádru. Bylo by možné to ukázat už nyní, ale důkaz by byl složitější.

Pokud uniformně nuldimenzionální prostor není Hausdorffův, musíme pro oddělování bodů přidat prosté zobrazení do indiskretního prostoru, takže každý uniformně nuldimenzionální prostor lze vnořit do součinu indiskretního prostoru a součinu uniformně diskretních prostorů.

Je vhodné si uvědomit, že nějaká třída $\mathcal{C}$ uniformních prostorů je součinná a dědičná, právě když je uzavřená na projektivní vytváření, tj. je-li X projektivně vytvořený zobrazeními do prostorů z $\mathcal{C}$, náleží také do $\mathcal{C}$.

Dokážeme nyní velmi důležité tvrzení o vztahu součinu a podprostorů topologických a uniformních prostorů.

Věta 5.44. Zachovávání konstrukcí přechodem k topologii

Zobrazení $t: \text{Unif} \rightarrow \text{Top}$ zachovává projektivní vytváření. Je-li uniformita μ na X projektivně vytvořena souborem $\{f_i: X \rightarrow (X_i, \mu_i)\}$, je topologie $t\mu$ projektivně vytvořena souborem $\{f_i: X \rightarrow (X_i, t\mu_i)\}$.

Důkaz. Nechť τ je topologie na X projektivně vytvořena souborem $\{f_i: X \rightarrow (X_i, t\mu_i)\}$. Chceme ověřit rovnost $t\mu = \tau$. K tomuto účelu uvažujme $x \in X$ a $U \in \mathcal{U}_\tau(x)$. Z definice projektivní topologie existuje $i_1, \dots, i_n \in I$ a $U_{i_k} \in \mathcal{U}_{t\mu_{i_k}}(f_{i_k}(x))$, $k \in \{1, \dots, n\}$, takové, že

$$x \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U.$$

Nechť $E_{i_k} \in \mu_{i_k}$ splňují $f_{i_k}(x) \in E_{i_k}(f_{i_k}(x)) \subset U_{i_k}$. Pak

$$E = \bigcap_{k=1}^n (f_{i_k} \times f_{i_k})^{-1}(E_{i_k})$$

leží v μ a platí $x \in E(x) \subset U$.

Vskutku, je-li $y \in E(x)$, pak $(f_{i_k}(x), f_{i_k}(y)) \in E_{i_k}$, a tedy $f_{i_k}(y) \in E_{i_k}(f_{i_k}(x)) \subset U_{i_k}$. Tedy

$$y \in \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_{i_k}) \subset U.$$

Proto je $t\mu \supset \tau$.

Pro důkaz obrácené inkluze uvažujme $t\mu$ -okolí U bodu x . Pak existuje $E \in \mu$ splňující $x \in E(x) \subset U$. Nechť $i_1, \dots, i_n \in I$ a $E_{i_k} \in \mu_{i_k}$ splňují

$$E \supset F = \bigcap_{k=1}^n (f_{i_k} \times f_{i_k})^{-1}(E_{i_k}).$$

Pak $U_{i_k} = E_{i_k}(f_{i_k}(x))$ jsou $t\mu_{i_k}$ -okolí $f_{i_k}(x)$ a množina

$$V = \bigcap_{k=1}^n f_{i_k}^{-1}(U_{i_k})$$

je τ -okolí x splňující $V \subset U$. Vskutku, je-li $y \in V$, je $f_{i_k}(y) \in E_{i_k}(f_{i_k}(x))$, tj. $(f_{i_k}(x), f_{i_k}(y)) \in E_{i_k}$. Tedy

$$(x, y) \in \bigcap_{k=1}^n (f_{i_k} \times f_{i_k})^{-1}(E_{i_k}) = F,$$

což znamená $y \in F(x) \subset E(x) \subset U$. Tím je ověřeno, že $\tau = t\mu$. $\square$

Nejvíce se používají speciální případy projektivního vytváření: součiny, podprostory a suprema.

Důsledek 5.45. Zachovávání součinu a podprostoru topologiemi

1. *Topologie uniformního podprostoru je topologický podprostor topologie dané uniformitou na větším prostoru.*
2. *Topologie součinu uniformních prostorů je součin topologií souřadnicových uniformních prostorů.*
3. *Je-li $(X, \mu) = \sup(X, \mu_i)$, je $(X, t\mu) = \sup(X, t\mu_i)$.*

Důkaz. Tvrzení 1. a 2. plynou z Věty 5.44.

3. Uniformita μ má za subbázi systém $\bigcup_{i \in I} \mu_i$ a $\tau = \sup_{i \in I} t\mu_i$ má za subbázi $\bigcup_{i \in I} t\mu_i$. Do každého $t\mu$ -okolí x tak lze vepsat množinu

$$\left(\bigcap_{k=1}^n E_{i_k} \right) (x),$$

kde $E_{i_k} \in \mu_{i_k}$. Do každého τ -okolí x pak lze vepsat množinu

$$\bigcap_{k=1}^n E_{i_k}(x),$$

kde $E_{i_k} \in \mu_{i_k}$. Jelikož

$$\left(\bigcap_{k=1}^n E_{i_k} \right) (x) = \bigcap_{k=1}^n E_{i_k}(x),$$

plyne z těchto úvah požadovaná rovnost $t\mu = \tau$. $\square$

Tento důsledek má řadu aplikací. Uvedeme tři nejdůležitější. Druhé tvrzení je opakování Věty 5.17 s jiným důkazem. Tvrzení o metrízovatelnosti dokázali Aleksandrov a Urysohn v r. 1923, samozřejmě bez použití uniformit.

Věta 5.46. Uniformizovatelnost a metrízovatelnost topologických prostorů

1. *Pro každý uniformizovatelný topologický prostor existuje největší uniformita vytvářející jeho topologii.*
2. *Topologický prostor je uniformizovatelný, právě když je úplně regulární.*
3. *Topologický prostor X je pseudometrízovatelný, právě když existuje posloupnost $\{\mathcal{G}_n\}$ otevřených pokrytí X , že $\mathcal{G}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{G}_n$, $n \in \mathbb{N}$ a $\{\text{star}_{\mathcal{G}_n}(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ je báze okolí $x \in X$.*

Důkaz. 1. Ať M je množina všech uniformit vytvářející topologii daného topologického prostoru. Podle třetího tvrzení předchozího Důsledku 5.45 i $\sup M$ vytváří tuto topologii.

2. Každý uniformní prostor je projektivně vytvořen pseudometrízovatelnými prostory, takže i jeho topologie je projektivně vytvořena pseudometrízovatelnými prostory, a je tedy úplně regulární. Naopak, každý úplně regulární prostor je projektivně vytvořen zobrazeními do intervalu $[0, 1]$. Uniformita projektivně vytvořená stejnými zobrazeními určuje tedy topologii původního úplně regulárního prostoru, což znamená, že ten je uniformizovatelný.

3. $\implies$: Je-li X pseudometrízovatelný pseudometrikou d , pak uvažujme pokrytí

$$\mathcal{G}_n = \{B(x, \frac{1}{4^n}); x \in X\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Pak $\mathcal{G}_n$ jsou otevřená pokrytí X taková, že $\mathcal{G}_{n+1}$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{G}_n$ (vizte výpočet v Příkladu 5.24.1). Jelikož z důkazu plyne pro $n \in \mathbb{N}$ a $x \in X$ existence $z \in X$ splňující

$$\text{star}_{\mathcal{G}_{n+1}}(x) \subset B(z, \frac{1}{4^n}) \subset B(x, \frac{2}{4^n}),$$

tvoří systém $\{\text{star}_{\mathcal{G}_n}(x)\}$ bázi okolí v topologii τ_d generované pseudometrikou d .

$\Leftarrow$: Pokud na (X, τ) existuje uvedená posloupnost $\{\mathcal{G}_n\}$, položíme

$$u = \{\mathcal{U} \text{ pokrytí}; \exists n \in \mathbb{N}: \mathcal{G}_n \prec \mathcal{U}\}.$$

Pak u splňuje vlastnosti (a)-(c) Věty 5.18.1. Systém pokrytí u tak vytváří uniformitu μ , která splňuje $t\mu = \tau$ díky našemu předpokladu. Navíc je μ pseudometrizovatelná uniformita, neboť $E_{\mathcal{G}_n} = \bigcup \{G \times G; G \in \mathcal{G}_n\}$ tvoří bázi uniformity μ (Věta 5.6). $\square$

Definice 5.47. Jemná uniformita

Největší uniformita vytvářející daný úplně regulární prostor se nazývá *jemná uniformita*. Je-li μ uniformita, pak jemná uniformita vytvářející stejnou topologii jako μ se často značí $f\mu$ (od *fine*) a nazývá se *jemná modifikace* (nebo jemná koreflexe) uniformity μ . $\square$

Například jediná uniformita na ω_1 musí být jemná. Na parakompaktních prostorech má jemná uniformita bázi složenou ze všech otevřených pokrytí. Pro jemnou uniformitu lze zobecnit Tvzení 5.23:

Tvrzení 5.48. Stejnoměrná spojitost na jemných uniformitách

Každé spojitě zobrazení uniformního prostoru s jemnou uniformitou do uniformního prostoru je stejnoměrně spojitě. Touto vlastností jsou jemné uniformity charakterizovány.

Důkaz. Ať $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ je spojitě a μ je jemná uniformita. Uniformita μ' na X projektivně vytvořená zobrazením f určuje topologii menší než je topologie $t\mu$ (víme totiž, že $t\mu'$ je projektivně vytvořena $f: X \rightarrow (X, t\nu)$, vizte Větu 5.44). Chceme ověřit, že $\mu' \subset \mu$. Uvažujme na X uniformitu $\sigma = \sup\{\mu', \mu\}$. Pak dle Důsledku 5.55.3 platí $t\sigma = \sup\{t\mu', t\mu\} = t\mu$. Tedy uniformita σ generuje stejnou topologii jako μ . Proto $\sigma \subset \mu$. Tedy dostáváme $\mu' \subset \sigma \subset \mu$ a f je stejnoměrně spojitě z (X, μ) do (Y, ν) .

Předpokládejme nyní, že μ není jemná. Pak zobrazení $\text{Id}_X: (X, \mu) \rightarrow (X, f\mu)$ je spojitě, ale není stejnoměrně spojitě. $\square$

Důsledek 5.49. Jemná modifikace

1. Uniformita $f\mu$ je nejmenší jemná uniformita větší než μ .

2. Je-li μ jemná uniformita na X a $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ stejnoměrně spojitě zobrazení, je i zobrazení $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, f\nu)$ stejnoměrně spojitě.

Důkaz. 1. Necht M značí množinu všech jemných uniformit, které jsou větší než μ . Tvrdíme, že $f\mu = \inf M$. Zjevně je $f\mu$ jemná uniformita větší než μ . Pro jemnou uniformitu $\nu \supset \mu$ pak platí, že zobrazení $\text{Id}_X: (X, \nu) \rightarrow (X, f\mu)$ je spojitě. Vskutku, $t f\mu = t\mu \subset t\nu = t f\nu$, z čehož spojitost identity plyne. Tedy dle Tvzení 5.48 je $\text{Id}_X: (X, \nu) \rightarrow (X, f\mu)$ stejnoměrně spojitá. Proto je $f\mu \subset \nu$, takže $f\mu = \inf M$.

2. Zobrazení $f: (X, t\mu) \rightarrow (Y, t\nu) = (Y, t f\nu)$ je spojitě, takže je podle Tvzení 5.48 stejnoměrně spojitě z (X, μ) do $(Y, f\nu)$. $\square$

Jemná uniformita na topologickém prostoru X je projektivně vytvořena všemi spojitými zobrazeními na X do metrických prostorů. Zůžeme-li zobrazení $t: \text{Unif} \rightarrow \text{Top}$ na jemné uniformní prostory do úplně regulárních prostorů, dostaneme v jistém smyslu isomorfismus mezi prostory i zobrazeními (stejnoměrně spojitými a spojitými).

Jako další důsledky Věty 5.44 můžeme uvést některé poznatky o parakompaktních prostorech. K tomu potřebujeme následující obecné tvrzení.

Tvrzení 5.50. Konečná uniformní pokrytí tvoří uniformitu

Každé konečné uniformní pokrytí prostoru X má konečné uniformní hvězdovité zjemnění.

Důkaz. Důkaz původní. Necht $\mathcal{G}$ je konečné uniformní pokrytí X . Pak má uniformní silně hvězdovité zjemnění $\mathcal{H}$. Hledáme konečné uniformní pokrytí X , které zjemňuje pokrytí $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$. Uvažujme ekvivalenci na $\mathcal{H}$ definovanou takto: $H_1 \sim H_2$ pokud

$$\{G \in \mathcal{G}; H_1 \subset G\} = \{G \in \mathcal{G}; H_2 \subset G\} \quad \text{a} \quad \{G \in \mathcal{G}; \text{star}_{\mathcal{H}}(H_1) \subset G\} = \{G \in \mathcal{G}; \text{star}_{\mathcal{H}}(H_2) \subset G\}.$$

Pak $\sim$ je vskutku relace ekvivalence na $\mathcal{H}$. Uvažujme systém množin

$$\mathcal{H}' = \{\bigcup \{H' \in \mathcal{H}; H' \sim H\}; H \in \mathcal{H}\}.$$

Pak $\mathcal{H}'$ je pokrytí X , které je konečné (neboť $\mathcal{G}$ je konečné pokrytí) a je zjemňováno pokrytím $\mathcal{H}$. Tedy je $\mathcal{H}'$ uniformní. Navíc $\mathcal{H}'$ hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{G}$.

Opravdu, mějme $x \in X$ a uvažujme množinu $\text{star}_{\mathcal{H}'}(x)$. Necht $H \in \mathcal{H}$ splňuje $x \in H$ a necht $G \in \mathcal{G}$ splňuje $\text{star}_{\mathcal{H}}(H) \subset G$. Ukážeme, že $\text{star}_{\mathcal{H}'}(x) \subset G$. K tomuto účelu uvažujme $y \in \text{star}_{\mathcal{H}'}(x)$. Pak existuje $F \in \mathcal{H}'$ splňující $y, x \in F$. Ať $H' \in \mathcal{H}$ splňuje $F = \bigcup \{H'' \in \mathcal{H}'; H'' \sim H'\}$. Pak existují množiny $H_1, H_2 \in \{H'' \in \mathcal{H}'; H'' \sim H'\}$ takové, že $x \in H_1$ a $y \in H_2$. Jelikož máme $H_1 \sim H_2$ a $H_1 \subset \text{star}_{\mathcal{H}}(H) \subset G$, platí též $H_2 \subset G$. Tedy $y \in H_2 \subset G$. Proto $\mathcal{H}'$ je konečné uniformní pokrytí hvězdovitě zjemňující $\mathcal{G}$.

Důkaz nový. Konečné uniformní pokrytí $\mathcal{G} = \{G_1, \dots, G_n\}$ má uniformní silně hvězdovité zjemnění $\mathcal{H}$. Hledáme konečné uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X , které zjemňuje pokrytí $\mathcal{G}$. Pro $H \in \mathcal{H}$ označíme $\varphi(H)$ nejmenší k , že $\text{star}_{\mathcal{H}}(H) \subset G_k$. Na $\{H \in \mathcal{H}; \varphi(H) = k\}$ vezmeme ekvivalenci $H \sim H'$, jestliže $H \subset G_i \Leftrightarrow H' \subset G_i, i \leq n$ a položíme $U_H = \bigcup \{H'; \varphi(H') = \varphi(H), H' \sim H\}$ a $\mathcal{U} = \{U_H; H \in \mathcal{H}\}$. Pak $\mathcal{U}$ je konečné pokrytí (mohutnosti nejvýše 2^n) a je uniformní (je zjemňováno pokrytím $\mathcal{H}$).

Dokážeme, že $\mathcal{U}$ je hvězdovitým zjemněním pokrytí $\mathcal{G}$. Pro $x \in X$ vezmeme nějaké $H_0 \in \mathcal{H}$ obsahující x a ukážeme, že $\text{star}_{\mathcal{U}}(x) \subset G_k$, kde $k = \varphi(H_0)$. Ať $x \in U_H$. Můžeme předpokládat, že $x \in H$. Protože $H \cap H_0 \neq \emptyset$, je $H \subset \text{star}_{\mathcal{H}}(H_0) \subset G_k$. Podle definice ekvivalence $\sim$ je každé H' ekvivalentní s H také částí G_k a tedy jejich sjednocení $U_H \subset G_k$. $\square$

Důsledek 5.51. Totálně omezená modifikace

1. Pro každou uniformitu μ na X existuje největší totálně omezená uniformita, která je menší než μ , označíme ji $p\mu$ (pX označuje $(X, p\mu)$) a nazveme totálně omezenou modifikací uniformity μ .
2. Uniformity μ a $p\mu$ vytváří stejnou topologii.
3. Je-li X uniformní podprostor Y , je pX uniformní podprostor pY .
4. Každé stejnoměrně spojitě zobrazení (X, μ) do totálně omezeného prostoru (Y, ν) je stejnoměrně spojitě na $(X, p\mu)$, speciálně, $U(X, [0, 1]) = U(pX, [0, 1])$.

Důkaz. 1. Označme

$$M = \{\nu \text{ uniformita na } X; \nu \subset \mu, \nu \text{ totálně omezená}\}.$$

Ukážeme, že M je neprázdná množina mající největší prvek $p\mu$, přičemž uniformitu $p\mu$ popíšeme pomocí pokrytí. Necht tedy

$$u = \{\mathcal{U} \text{ pokrytí}; \exists \mathcal{V} \text{ konečné } \mu\text{-uniformní pokrytí: } \mathcal{V} \prec \mathcal{U}\}.$$

Pak u splňuje (a)-(c) z Věty 5.18. Vskutku, (b) plyne z definice u . Vlastnost (c) plyne z Tvzení 5.50 a (a) plyne z toho, že pro dvě konečná μ -uniformní pokrytí $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ je $\mathcal{U}_1 \wedge \mathcal{U}_2$ konečné μ -uniformní pokrytí.

Necht $p\mu$ značí uniformitu generovanou systémem pokrytí u . Jelikož je systém u_μ všech μ -uniformních pokrytí větší než u , platí $p\mu \subset \mu$. Dále je $p\mu$ totálně omezená, neboť splňuje podmínku 3. v Tvzení 5.27. Necht nyní $\nu \subset \mu$ je totálně omezená uniformita. Pak pro ν -uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ existuje konečné ν -uniformní zjemnění $\mathcal{V}$. Pak $\mathcal{V}$ je μ -uniformní, takže $\mathcal{U} \in u$. Tedy $\nu \subset p\mu$ a $p\mu = \sup M$.

2. Protože $p\mu$ je hrubší než μ , platí $tp\mu \subset t\mu$. Pro důkaz obrácené inkluze stačí dokázat, že každé okolí x v $t\mu$ je okolím x v $tp\mu$. To však vyplývá z toho, že je-li $\mathcal{U}$ uniformní pokrytí, vezmeme pokrytí $\mathcal{V}$ definované jako $\mathcal{V} = \{V_1, V_2\}$, přičemž

$$V_1 = \bigcup \{U \in \mathcal{U}; x \in U\} \quad \text{a} \quad V_2 = \bigcup \{U \in \mathcal{U}; x \notin U\}.$$

Pak $\mathcal{V}$ je konečné μ -uniformní pokrytí ($\mathcal{U} \prec \mathcal{V}$), takže $\mathcal{V} \in u$. Navíc $\text{star}_{\mathcal{U}}(x) = \text{star}_{\mathcal{V}}(x)$, takže $tp\mu$ -okolí x dané množinou $\text{star}_{\mathcal{V}}(x)$ je v $t\mu$ -okolí x dané množinou $\text{star}_{\mathcal{U}}(x)$.

3. Máme ukázat, že pro každé konečné uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ na X existuje konečné uniformní pokrytí $\mathcal{V}$ na Y , že $\{V \cap X; V \in \mathcal{V}\} = \mathcal{U}$. Existuje uniformní pokrytí $\mathcal{W}$ prostoru Y , že $\{W \cap X; W \in \mathcal{W}\} = \mathcal{U}$. Stačí vzít $\mathcal{V} = \{W_U; U \in \mathcal{U}\} \cup \{W_0\}$, kde $W_U = \bigcup \{W \in \mathcal{W}; W \cap X = U\}$, $W_0 = \bigcup \{W \in \mathcal{W}; W \cap X = \emptyset\}$.

4. Tvzení plyne z toho, že vzor konečného pokrytí je konečné pokrytí. Tedy pokud $\mathcal{V}$ je konečné ν -uniformní pokrytí Y , je $f^{-1}(\mathcal{V})$ konečné μ -uniformní pokrytí X , takže leží v systému u . Ten však generuje uniformitu $p\mu$, takže $f^{-1}(\mathcal{V}) \in p\mu$. $\square$

Definice 5.52. Čechova uniformita

Pro uniformní prostor (X, μ) je Čechova uniformita totálně omezená modifikace jemné uniformity. $\square$

Zůjme-li dříve uvedené zobrazení $t : \text{Unif} \rightarrow \text{Top}$ na Čechovy uniformity, dostáváme také isomorfismus na úplně regulární prostory. Máme tedy dvě různá vnoření úplně regulárních prostorů do Unif : na jemné uniformní prostory a na jejich totálně omezené modifikace.

Množina uniformit vytvářející danou úplně regulární topologii má největší prvek, a to jemnou uniformitu. Otázka je, zda má také nejmenší prvek. Pokud ano, musí být totálně omezený, protože jeho totálně omezená modifikace určuje stejnou topologii. Známe zatím jen případy, kdy uvedená množina uniformit je jednobodová (kompaktní prostory a ω_1). Na konci kapitoly ukážeme, že takový nejmenší prvek existuje právě pro lokálně kompaktní prostory.

Můžeme nyní popsat některé vlastnosti parakompaktních prostorů. Mnoho dalších vlastností bude uvedeno v kapitole jim věnované.

Tvrzení 5.53. Vlastnosti parakompaktních prostorů

1. Parakompaktní prostory jsou normální a úplně regulární,
2. Úplně regulární prostor je parakompaktní právě když každé jeho otevřené pokrytí má hvězdovité otevřené zjemnění.

Důkaz. 2. $\implies$: Je-li (X, τ) parakompaktní, dle Definice 5.25 tvoří systém u všech otevřených pokrytí prostoru X bázi uniformity μ , která splňuje $t\mu = \tau$. Tedy u splňuje (a)-(c) Věty 5.18.1, speciálně pak každé otevřené pokrytí $\mathcal{U}$ má hvězdovité zjemnění $\mathcal{V} \in u$. Jelikož otevřená pokrytí tvoří bázi u , existuje otevřené pokrytí $\mathcal{W} \in u$, které zjemňuje $\mathcal{V}$, takže hvězdovité zjemňuje $\mathcal{U}$.

$\Leftarrow$: Uvažujme systém

$$u = \{\mathcal{U} \text{ pokrytí; } \exists \mathcal{V} \text{ otevřené pokrytí : } \mathcal{V} \prec \mathcal{U}\}.$$

Pak u splňuje (a)-(c) Věty 5.18.1, takže u generuje uniformitu μ na X . Ta splňuje $t\mu \subset \tau$, neboť μ má bázi z τ -otevřených pokrytí. Je-li však $x \in U$ pro $x \in X$ a $U \in \tau$ dané, najdeme $V \in \tau$ splňující $x \in V \subset \bar{V} \subset U$. Pak $\mathcal{U} = \{U, X \setminus \bar{V}\} \in u$, takže $U = \text{star}_{\mathcal{U}}(x)$ je $t\mu$ -okolí x . Proto $\tau = t\mu$.

1. Parakompaktní prostor X je uniformizovatelný, protože soustava všech jeho otevřených pokrytí tvoří podle Definice 5.25 uniformitu, která zřejmě vytváří topologii prostoru X . K vytváření topologie nemusíme brát všechna otevřená pokrytí, stačí vzít všechna konečná otevřená pokrytí. Z Důsledku 5.51 vyplývá, že soustava v všech konečných otevřených pokrytí na parakompaktním prostoru tvoří bázi uniformity $p\mu$. Potom Věta 1.79.2 říká, že prostor X je normální. Vskutku, nechť $\mathcal{U}$ je konečné otevřené pokrytí X . Pak $\mathcal{U}$ je $p\mu$ -uniformní pokrytí X , takže má z Věty 5.18 hvězdovité zjemnění, které je dále zjemněno nějakým pokrytím $\mathcal{V}$ z v . Tedy $\mathcal{U}$ má otevřené konečné hvězdovité zjemnění, tedy je X normální dle Věty 1.79.2. $\square$

Prostor ω_1 je normální regulární a není parakompaktní. Jeho Čechova uniformita má za bázi všechna konečná otevřená pokrytí, ale ne každé otevřené pokrytí ω_1 je prvkem uniformity na ω_1 .

Podíváme se na vlastnosti zachovávané podprostory a součiny.

Věta 5.54. Zachovávání vlastností podprostory

1. Pseudometrizovatelnost a uniformní nuldimenzionalita jsou dědičné vlastnosti.
2. Vlastnost být jemnou uniformitou není uzavřeně dědičná vlastnost.
3. Je-li X uniformní podprostor (Y, μ) , je $\chi_u(X) \leq \chi_u(Y)$, $\text{cov } X \leq \text{cov } Y$.
4. Totální omezenost je dědičná vlastnost. Navíc, pokud je X totálně omezený podprostor uniformního prostoru Y , pak $\overline{X}^Y$ je totálně omezený.

Důkaz. Tvrzení 1 a první část tvrzení 3 plynou hned z definic. Druhá část tvrzení 3 plyne z Tvrzení 5.27.3. Vskutku, nechť $\text{cov } Y \leq \kappa$ a $F \in \mu' = \mu \upharpoonright_{X \times X}$. Nechť $E \in \mu$ splňuje $E \cap (X \times X) = F$ a $E' \in \mu$ symetrické splňuje $E' \circ E' \subset E$. Pak existuje množina $A \subset Y$ tak, že $|A| < \kappa$ a $E'(A) = Y$. Pro každé $a \in A$ vybereme $x_a \in X \cap E'(a)$, pokud je tento průnik neprázdný. Jinak položíme $x_a = x$ pro nějaký zvolený bod $x \in X$. Ověříme, že pro $B = \{x_a; a \in A\}$ platí $F(B) = X$. Nechť tedy $x \in X$ je dáno. Pak existuje $a \in A$ takové, že $x \in E'(a)$. Pak $(x, a), (x_a, a) \in E'$, tedy $(x_a, x) \in E$, tj. $x \in E(x_a) \cap X = F(x_a) \subset F(B)$.

První část tvrzení 4 nyní plyne z 3.

Druhá část tvrzení 4 plyne z toho, že každé uniformní pokrytí X lze rozšířit na uniformní pokrytí Y a z popisu uzávěru pomocí pokrytí. Vskutku, nechť $E \in \mu$ je dáno. Zvolíme symetrické $E' \in \mu$ splňující $E' \circ E' \subset E$ a položíme $F' = E' \cap (X \times X)$. Jelikož je X totálně omezený, existuje $A \subset X$ konečná splňující

$F'(A) = X$. Pak pro $H = E \cap (\overline{X}^Y \times \overline{X}^Y)$ platí $H(A) = \overline{X}^Y$. Vskutku, nechť $z \in \overline{X}^Y$ je dáno. Pak existuje $x \in X \cap E'(z)$. Dále existuje $a \subset X$, že $x \in F'(a)$. Pak ovšem $(x, z), (x, a) \in E'$, takže $(a, z) \in E$. Proto $z \in E(a) \cap \overline{X}^Y \subset H(A)$. Tedy $\overline{X}^Y$ je totálně omezený.

2. Za příklad jemného uniformního prostoru (X, μ) a uzavřené podmnožiny $Y \subset X$, že zúžení μ na Y není jemná uniformita, vezmeme součin dvou Sorgenfreyových přímk S a za Y jeho druhou diagonálu $\{(x, -x); x \in \mathbb{R}\}$. Ta je uzavřeným diskrétním podprostorem a tedy jeho jemná uniformita je uniformně diskrétní uniformita ν_d . Nechť μ je jemná uniformita na topologickém prostoru (X, τ) , ta generuje topologii τ . Chceme ukázat, že $\mu \upharpoonright_Y \neq \nu_d$. K tomuto účelu uvažujme opak, vezměme na Y pokrytí $\mathcal{V} = \{A, B\}$, kde $A = \{(x, -x); x \in \mathbb{Q}\}, B = Y \setminus A$. Pak $\mathcal{V}$ je μ_d -uniformní pokrytí Y , tj. existuje $E' \in \nu_d$ tak, že $\{E'(y); y \in Y\} \prec \mathcal{V}$. Nechť $E \in \mu$ splňuje $E \cap (Y \times Y) = E'$. Zvolme $F \in \mu$ symetrickou takovou, že $F \circ F \subset E$. Pak $\mathcal{U} = \{F(x); x \in X\}$ je uniformní pokrytí X , které splňuje $\{F(x) \cap Y; x \in X\} \prec \mathcal{V}$.

Vskutku, stačí ukázat, že pokud $y \in F(x) \cap Y$ pro nějaké $x \in X$, pak $F(x) \cap Y \subset E'(y)$. Nechť tedy $z \in F(x) \cap Y$. Pak $(z, x), (x, y) \in F$, takže $(y, z) \in F \circ F \subset E$. Proto $z \in E(y) \cap Y = E'(y)$.

Nechť $\mathcal{W}$ je μ -uniformní τ -otevřené pokrytí X , které splňuje $\mathcal{W} \prec_{\text{star}} \mathcal{U}$. Pro každé $p = (x, y) \in X$ zvolme $W_p \in \mathcal{W}$ a $n_p \in \mathbb{N}$ tak, aby čtverec $D_p = [x, x + \frac{1}{n_p}) \times [y, y + \frac{1}{n_p})$ splňoval

$$p \in D_p \subset W_p.$$

Nyní si rozmyslíme, že pro $a \in A$ a $b \in B$ je $D_a \cap D_b = \emptyset$. Vskutku, nechť $c \in D_a \cap D_b$. Pak existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $\text{star}_{\mathcal{W}}(c) \subset U$. Předpokládejme, že $U \cap Y \subset A$. Pak ovšem máme z inkluze

$$b \in \text{star}_{\mathcal{W}}(c) \cap Y \subset U \cap Y \subset A$$

spor. Podobně bychom přivedli ke sporu situaci $U \cap Y \subset B$.

Nyní si povšimneme, že platí

$$\mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \mathbb{P}; n_{(x, -x)} = n\}.$$

Protože $\mathbb{P}$ je Baireův prostor (jedná se o čechovsky úplný prostor), existuje $n \in \mathbb{N}$, že uzávěr množiny $B_n = \{x \in \mathbb{P}; n_{(x, -x)} = n\}$ má neprázdný vnitřek v $\mathbb{P}$. Tedy existuje $(a, b) \text{ in } \mathbb{R}$, že

$$(a, b) \cap \mathbb{P} \subset \overline{B_n}^{\mathbb{P}}.$$

Vezměme $x \in \mathbb{Q} \cap (a, b)$ a posloupnost $\{x_k\} \in (a, b) \cap B_n$ splňující $|x_k - x| \rightarrow 0$. Pak pro velká $k \in \mathbb{N}$ čtverec $D_{(x, -x)}$ protíná čtverec $D_{(x_k, -x_k)}$, neboť hrana čtverců $D_{(x_k, -x_k)}$ má konstantní velikost $\frac{1}{n}$. To je však spor s předešlou argumentací. $\square$

V tvrzení 3 zřejmě nemusí nastat rovnosti.

Věta 5.55. Zachovávání vlastností součiny

1. Jsou-li (X_i, μ_i) , $i \in \mathbb{N}$, pseudometrizovatelné uniformní prostory, je součin $\prod_{i \in \mathbb{N}} (X_i, \mu_i)$ též pseudometrizovatelný. Jsou-li (X_i, μ_i) , $i \in I$, uniformně nuldimenzionální, je jejich součin též uniformně nuldimenzionální.
2. Vlastnost být jemnou uniformitou není konečně součinná.
3. Pro prostory X_i platí $\chi_u(\prod_I X_i) \leq \max\{|I|, \sup_I \{\chi_u(X_i)\}\}$. Rovnost platí, pokud jsou všechny množiny X_i aspoň dvoubodové a I je nekonečná množina. Je-li I konečná, je $\chi_u(\prod_I X_i) = \max_I \{\chi_u(X_i)\}$.
4. Pro neprázdné prostory X_i platí $\text{cov}(\prod_I X_i) = \sup_I \{\text{cov}(X_i)\}$.
5. Totální omezenost je součinná vlastnost.

Důkaz. 1. Nechť ρ_i jsou pseudometriky generující uniformitu μ_i na prostoru X_i , $i \in \mathbb{N}$. Uvažujme pseudometriku ρ na součinu $X = \prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ definovanou jako

$$\rho((x_i), (y_i)) = \prod_{i \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)}, \quad (x_i), (y_i) \in X.$$

Pak ρ generuje uniformitu součinu μ na X .

Vskutku, necht $E \in \mu$ je dáno. Dle Tvzení 5.37 existují $F \subset \mathbb{N}$ konečná a množiny $E_i \in \mu_i$, $i \in F$, takové, že

$$\bigcap_{i \in F} (\pi_i \times \pi_i)^{-1}(E_i) \subset E.$$

Pro každé E_i nalezneme $r_i > 0$ takové, že $E_{\rho_i}(2r_i) \subset E_i$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $r = 2^{\max F} \max\{r_i; i \in F\} < 1$. Pak množina $E_\rho(r) \subset E$. Platí-li totiž $\rho((x_i), (y_i)) < 2^{-\max F} r$, pak z nerovnosti

$$\frac{t}{2} \leq \frac{t}{1+t} \leq t, \quad t \in [0, 1],$$

a nerovnosti

$$\frac{\rho_i(x_i, y_i)}{2} \leq \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} \leq 2^i r \leq 2^{\max F} 2^{-\max F} \max\{r_i; i \in F\} \leq r_i$$

plyne $\rho_i(x_i, y_i) < 2r_i$, tedy $(x_i, y_i) \in E_i$ pro každé $i \in F$. Tedy

$$((x_i), (y_i)) \in \bigcap_{i \in F} (\pi_i \times \pi_i)^{-1}(E_i) \subset E.$$

Na druhou stranu, je-li $E_\rho(r) \subset X \times X$ pro nějaké $r > 0$ dáno, nalezneme $i_0 \in \mathbb{N}$ splňující $\sum_{i=i_0}^{\infty} 2^{-i} < \frac{r}{2}$. Necht $E_i = E_{\rho_i}(\frac{r}{2}) \in \mu_i$, $i = 1, \dots, i_0$. Pak

$$F = \bigcap_{i=1}^{i_0} (\pi_i \times \pi_i)^{-1}(E_i) \in \mu$$

a přitom pro $((x_i), (y_i)) \in F$ platí

$$\rho((x_i), (y_i)) \leq \sum_{i=1}^{i_0} 2^{-i} \frac{\rho_i(x_i, y_i)}{1 + \rho_i(x_i, y_i)} + \sum_{i=i_0+1}^{\infty} 2^{-i} < \sum_{i=1}^{i_0} 2^{-i} \frac{r}{2} + \frac{r}{2} < r.$$

Tedy $F \subset E_\rho(r)$ a ρ generuje součinnou uniformitu.

Jsou-li nyní X_i , $i \in I$, uniformně nuldimenzionální prostory, mají uniformity μ_i bázi složenou z ekvivalencí. Je-li $F \subset I$ konečná a $E_i \in \mu_i$ je ekvivalence pro $i \in F$, je množina

$$\bigcap_{i \in F} (\pi_i \times \pi_i)^{-1}(E_i)$$

též ekvivalence. Vzhledem k tomu, že tyto množiny tvoří bázi uniformity součinu, je uniformita součinu uniformně nuldimenzionální.

2. Jemná uniformita součinu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ má za bázi všechna otevřená pokrytí (jelikož je $\mathbb{R}$ parakompaktní), kdežto součin jemných uniformit prostoru $\mathbb{R}$ má bázi pokrytí tvaru $\{U \times V; U, V \in \mathcal{U}\}$, kde $\mathcal{U}$ je otevřené pokrytí $\mathbb{R}$. Uvažujme následující otevřené pokrytí $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{W} = \{(\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \setminus (\mathbb{R} \times \{0\})\} \cup \{(n, n+2) \times \left(-\frac{1}{|n|}, \frac{1}{|n|}\right); n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\}.$$

To nelze zjemnit žádným pokrytím tvaru $\{U \times V; U, V \in \mathcal{U}\}$. Vskutku, je-li $\mathcal{U}$ otevřené pokrytí, vybereme $\varepsilon > 0$ a $V \in \mathcal{U}$ takové, že $0 \in (-\varepsilon, \varepsilon) \subset V$. Necht $n \in \mathbb{N}$ je vybráno tak, že $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{4}$. Necht $x \in (n, n+2)$ je libovolné a necht $U \in \mathcal{U}$ splňuje $x \in U$. Pak $U \times V$ není obsaženo v žádné množině z $\mathcal{W}$.

Tedy součin jemných uniformit na $\mathbb{R}$ není jemná uniformita na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

3. Protože standardní subbáze uniformity na $\prod_{i \in I} X_i$ má mohutnost nejvýše $\max\{|I|, \sup_I \{\chi_u(X_i)\}\}$, platí nerovnost v tvrzení. Jsou-li X_i neprázdné, každý prostor X_i lze vnořit do $\prod_{i \in I} X_i$, a tedy $\chi_u(\prod_{i \in I} X_i) \geq \sup_I \{\chi_u(X_i)\}$.

Pro konečnou množinu I zřejmě platí rovnost. Nerovnost $\chi_u(\prod_I X_i) \geq |I|$ pro nekonečnou množinu I vyplývá z předpokladu $|X_i| \geq 2$, protože potom prostor $2^{|I|}$ lze vnořit do $\prod_I X_i$ a $\chi_u(2^{|I|}) = |I|$ (vzory $\{0, 1\}$ při projekci π_i tvoří subbázi součinu a menší být nemůže).

4. Ukažme nerovnost $\leq$. Necht $\kappa = \sup_I \text{cov}(X_i)$ a E je okolí diagonály v $X \times X$, kde $X = \prod_{i \in I} X_i$. Existují $F \subset I$ konečná a $E_i \in \mu_i$ takové, že $\bigcap_{i \in F} (\pi_i \times \pi_i)^{-1}(E_i) \subset E$. Dle Tvzení 5.27 existují $A_i \subset X_i$, $i \in F$, takové, že $X_i = E(A_i)$ a $|A_i| < \kappa$. Pro každé $i \in I \setminus F$ nalezneme $x_i \in X_i$ a položíme

$$A = \prod_{i \in F} A_i \times \prod_{i \in I \setminus F} \{x_i\}.$$

Pak $|A| < \kappa$ a přitom $X = E(A)$. Vskutku, je-li $x \in X$ dáno, existuje pro každé $i \in F$ nějaké $a_i \in A_i$ takové, že $(x_i, a_i) \in E_i$. Pak bod

$$\{a\} = \prod_{i \in F} \{a_i\} \times \prod_{i \in I \setminus F} \{x_i\}$$

leží v A a platí $(x, a) \in E$ (neboť $(x_i, a_i) \in E_i$ pro $i \in F$). Tedy dle Tvzení 5.27 je $\text{cov}(X) \leq \kappa$.

Obrácenou nerovnost pak dokazuje vnoření X_i do součinu.

5. Toto tvrzení plyne z 4. □

Vidíme, že jemné uniformity se nechovají hezky ani k podprostorům ani k součinům. Nyní ukážeme, že situace je lepší v jejich chování při induktivním vytváření. Nebudeme opakovat obecné vlastnosti induktivního vytváření z kapitoly 2. Zmíníme se více o jejich základních speciálních případech, a to disjunktní sumě a kvocientu.

Definice 5.56. Disjunktní suma a kvocient uniformních prostorů

1. Je-li $\{X_i\}_{i \in I}$ soubor uniformních prostorů, je jejich *uniformní suma* (nebo koprodukt) nejjemnější uniformní prostor $(\coprod_{i \in I} X_i, \mu)$ takový, že injektivní zobrazení $\iota_i : X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, \mu$ jsou stejnoměrně spojitě.
2. *Kvocient uniformního prostoru* X podle surjekce $f : X \rightarrow Y$ je nejjemnější uniformní prostor (Y, μ) takový, že $f : X \rightarrow (Y, \mu)$ je stejnoměrně spojitě zobrazení. □

Definici lze přeformulovat: systém zobrazení $\{\iota_i\}_{i \in I}$ a f jsou induktivně vytvářející. Uvedeme popis uniformit v uvedených konstrukcích. Důkaz plyne ihned z předchozí definice.

Tvrzení 5.57. Popis uniformit sumy a kvocientu

1. *Bázi uniformních pokrytí sumy* $\coprod_I X_i$ tvoří pokrytí $\{\{i\} \times U; U \in \mathcal{U}_i, i \in I\}$, kde $\mathcal{U}_i$ jsou uniformní pokrytí prostorů X_i .
2. Je-li $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ kvocientové zobrazení, je $\{E \subset Y \times Y; (f \times f)^{-1}(E) \in \mu\}$ slabá báze uniformity ν .

Důkaz. 1. Necht $\mathcal{U}$ je systém všech pokrytí tvaru $u = \{\{i\} \times U; U \in \mathcal{U}_i, i \in I\}$, kde $\mathcal{U}_i$ je uniformní pokrytí X_i . Necht $\mathcal{V}$ je systém všech pokrytí $X = \coprod_{i \in I} X_i$, které jsou zjemňovány nějakým pokrytím z $\mathcal{U}$. Pak $\mathcal{V}$ vytváří dle Věty 5.18 jednoznačně určenou uniformitu μ na X . Pak jsou všechna zobrazení ι_i stejnoměrně spojitá.

Vskutku, je-li $i_0 \in I$ dáno a v je uniformní pokrytí X , existuje $u \in \mathcal{U}$ příslušného tvaru $u = \{\{i\} \times U; U \in \mathcal{U}_i, i \in I\}$ takové, že $u \prec v$. Pak ovšem

$$\iota_{i_0}^{-1}(u) = \mathcal{U}_{i_0}$$

je uniformní pokrytí X_{i_0} . Tedy i $\iota_{i_0}^{-1}(v)$ je uniformní pokrytí X_{i_0} . Tedy $\iota_{i_0}^{-1}(v)$ je uniformní pokrytí X_{i_0} , takže ι_{i_0} je stejnoměrně spojitě.

Necht nyní ν je uniformita na X taková, že všechna zobrazení $\iota_i, i \in I$, jsou stejnoměrně spojitá. Chceme ukázat, že $\nu \subset \mu$. Necht tedy u je ν -uniformní pokrytí X . Pak pro každé ι_i je $\mathcal{U}_i = \iota_i^{-1}(u)$ μ_i -uniformní pokrytí X_i . Pak ovšem pokrytí

$$v = \{\{i\} \times U; U \in \mathcal{U}_i, i \in I\}$$

je μ -uniformní a zjemňuje u . Tedy u je též μ -uniformní, takže $\nu \subset \mu$. Proto je μ induktivní uniformita vytvářená zobrazeními $\iota_i, i \in I$. □

2. plyne z Tvzení 5.37.2.

Protože kvocientové zobrazení je surjekce, je uvedená slabá báze rovna $\{(f \times f)(F); F \in \mu\}$. Místo uniformních okolí diagonály lze brát uniformní pokrytí (jejich vzory nebo obrazy). Tyto obrazy nemusí tvořit uniformitu, např. ztotožníme-li v $\mathbb{R}$ všechna racionální čísla, bude uniformní kvocient indiskrétní, ale obrazy uniformních pokrytí nemusí obsahovat prvek $\{\mathbb{R}\}$.

Příklady 5.58. Dva důležité kvocienty

1. Každý Hausdorffův uniformní prostor je kvocientem uniformně nuldimenzionálního diskrétního prostoru. V příkladě 5.4.6 jsme definovali uniformně nuldimenzionální prostor $(Z \times \{0, 1\}, \mu(\mathcal{F}))$ pro filtr $\mathcal{F}$ na Z . Je

snadno vidět, že topologie tohoto prostoru je diskrétní, pokud je $\mathcal{F}$ volný. Mějme dán Hausdorffův uniformní prostor (X, μ) , který není uniformně diskrétní. Označme $Z = (X \times X) \setminus \Delta_X$, $\mathcal{F} = \{E \setminus \Delta_X; E \in \mu\}$ a zobrazení $f = \{((x_0, x_1), i) \rightsquigarrow x_i\} : Z \times \{0, 1\} \rightarrow X$. Z rovnosti $(f \times f)^{-1}(E) = E_{E \setminus \Delta_X}$ (značení 5.4.6) pro E symetrické plyne, že f je kvocient na (X, μ) .

2. Často používaný následující kvocient je obdobou metrické modifikace pseudometriky. Pro každý uniformní prostor (X, μ) je $\bigcap \mu$ ekvivalence, označme ji $\sim_\mu$. Pokud X není Hausdorffův, není $\sim_\mu$ identita (právě tehdy) a kvocient X podle $\sim_\mu$ je Hausdorffův prostor, označíme ho $H(X)$. Je to tzv. Hausdorffova modifikace prostoru X . Pro každé stejnoměrně spojitě zobrazení $f : X \rightarrow Y$, Y Hausdorffův, existuje jediné stejnoměrně spojitě zobrazení $\tilde{f} : H(X) \rightarrow Y$, že $f = \tilde{f} \circ q$, kde $q : X \rightarrow H(X)$ je kvocientové zobrazení. Uvědomíme si, že q je i projektivně vytvářející. a tedy X se dá uniformně vnořit do součinu $H(X) \times \tilde{X}$, kde $\tilde{X}$ je množina X s indiskrétní uniformitou.

Navíc v tomto případě platí, že $\{(q \times q)(E); E \in \mu\}$ je báze v $H(X)$, protože je-li $F \circ F \circ F \subset E$, je $(q \times q)(F) \circ (q \times q)(F) \subset (q \times q)(E)$. Odtud také vyplývá, že $H(X, \mu)$ vytváří stejnou topologii jako $H(X, \nu)$ pokud $(X, \mu), (X, \nu)$ vytvářejí stejnou topologii (lze použít i to, že $\bigcap \mu = \bigcap \nu$). Dalším důsledkem je, že zobrazení q je otevřené, protože obraz okolí x v X je okolím $q(x)$ v $H(X)$: $(q \times q)(E)(q(x)) = q(E(x))$. Poslední rovnost ukazuje, že obraz při q uniformního pokrytí v X je uniformní pokrytí v $H(X)$. $\square$

Podobně jako v topologických prostorech i kvocienty uniformních prostorů nezachovávají řadu vlastností.

Tvrzení 5.59. Zachovávání vlastností sumou a kvocientem

1. *Sumy zachovávají topologii, tj. $t(\coprod_I X_i) = \coprod_I (tX_i)$. Topologie kvocientu uniformního prostoru X je hrubší než příslušný kvocient topologického prostoru tX a může být ostře hrubší.*
2. *Suma $\coprod_I X_i$ prostorů, které nejsou uniformně diskrétní, je pseudometrizable, právě když je $|I| < \omega$ a všechny X_i jsou pseudometrizable. Kvocient pseudometrizableho prostoru nemusí být pseudometrizable.*
3. *Suma $\coprod_I X_i$ neprázdných prostorů je uniformně nuldimenzionální, právě když všechny X_i jsou uniformně nuldimenzionální. Kvocient uniformně nuldimenzionálního prostoru nemusí být uniformně nuldimenzionální.*
4. *Suma $\coprod_I X_i$ neprázdných prostorů je totálně omezená, právě když je $|I| < \omega$ a všechny X_i jsou totálně omezené. Stejněměrně spojitý obraz totálně omezeného prostoru je totálně omezený.*
5. *Jemné prostory jsou zachovávány jak sumou tak kvocientem.*
6. *Ať X_i jsou neprázdné uniformní prostory. Pak $\chi_u(\coprod_I X_i) = \Pi_I \chi_u(X_i)$ a $\text{cov}(\coprod_I X_i) = |I| \cdot \sup\{\text{cov}(X_i)\}_I$.*
7. *Nechť $f : X \rightarrow Y$ je kvocientové zobrazení. Pak $\text{cov}(Y) \leq \text{cov}(X)$. Mezi $\chi_u(X)$ a $\chi_u(Y)$ obecně neexistuje žádný vztah.*

Důkaz. Všechna tvrzení o sumách v 1-4 jsou jednoduchá nebo plynou z 6. Příklad 5.58 ukazuje, jak daleko od sebe může být topologie uniformního a topologického kvocientu a současně je to příklad na nezachovávání uniformní nuldimensionality kvocientem. Tvrzení o kvocientech v 2 plyne z Příkladu 5.60. Druhou část tvrzení 4 dokážeme pomocí uniformních okolí diagonály. Ať $f : (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ je stejnoměrně spojitá surjekce a $E \in \nu$. Pak $(f \times f)^{-1}(E) \in \mu$ a existuje konečná množina $A \subset X$, že pro každý bod $x \in X$ existuje $a \in A$ s vlastností $(f(a), f(x)) \in E$. Protože body $f(x)$ vyplní celé Y , je $E(f(A)) = Y$ a tedy (Y, ν) je totálně omezený.

Důkaz 5 provedeme pomocí charakterizace jemných uniformit z 5.48. Ať X_i jsou jemné prostory a f je spojitá funkce na $\coprod_I X_i$ do uniformního prostoru Y . Pak zúžení f na každé X_i je stejnoměrně spojitě a podle charakterizace induktivního vytváření je f stejnoměrně spojitě i na sumě. Podobně se dokáže druhá část tvrzení.

6. První rovnost vyplývá z toho, že bazové uniformní pokrytí sumy je sjednocením libovolných bazových uniformních pokrytí jednotlivých prostorů X_i . V druhé rovnosti je zřejmá nerovnost $\leq$. Pro opačnou nerovnost si stačí uvědomit, že každý X_i je podprostor sumy a že uniformní pokrytí $\{X_i\}_I$ nemá jemnější pokrytí menší mohutnosti.

7. Pokud $\text{cov}(Y) > \kappa$, tak v Y existuje uniformně diskrétní podprostor Y mohutnosti κ . Potom je i podprostor prostoru X , který se zobrazuje bijektivně na Y , uniformně diskrétní, takže $\text{cov}(X) > \kappa$.

Pro příklad $\chi_u(Y) < \chi_u(X)$ stačí vzít $X = Y^\kappa$ s vhodně velkým κ a za q projekci $Y^\kappa \rightarrow Y$. Příklad s

opačnou nerovností je v Příkladě 5.60). $\square$

Příklad 5.60. Kvocient metrizableního prostoru nemusí být metrizablení

Nechť Y je topologický uspořádaný prostor ω_1 chápaný i jako uniformní s jeho jedinou uniformitou. Pro každé $\alpha \in \omega_1$ je X_α kompaktní podprostor $[0, \alpha]$ v Y . Prostor X_α je metrizablení metrikou $d_\alpha \leq 1$ (je kompaktní a má spočetnou bázi). Za nosnou množinu prostoru X vezmeme sumu všech X_α s následující metrikou d :

$$d((\alpha, x_1), (\beta, x_2)) = \begin{cases} d_\alpha(x_1, x_2) & \text{pro } \alpha = \beta, \\ 1 & \text{pro } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

Zobrazení $q = \{(\alpha, x) \rightsquigarrow x\} : X \rightarrow Y$ je kvocientové v topologických prostorech. To je skoro zřejmé, protože prostory X_α jsou obojstrannými podprostory prostoru Y . Z toho vyplývá, že je kvocientové i v uniformních prostorech. Opravdu, vezmeme zobrazení f na Y do uniformního prostoru Z , že složení $f \circ q$ je stejnoměrně spojitě. Pak je toto složení spojitě a tedy f je spojitě. Protože uniformita na Y je jemná, je f stejnoměrně spojitě. Takže Y je nemetrizablení uniformní kvocient metrizableního prostoru. $\square$

Z 4 vyplývá, že pro totálně omezený prostor X je každá stejnoměrně spojitá reálná funkce na X omezená, tj. $U(X) = U^*(X)$. Opak neplatí, např. je-li X ježek, je vždy $U(X) = U^*(X)$, ale ježek s nekonečně mnoha ostrými není totálně omezený.

V topologických prostorech je součin diskrétního prostoru I s topologickým prostorem X homeomorfní se sumou $\coprod_I X_i$, kde $X_i = X$ pro všechna i . Tento vztah v uniformních prostorech neplatí. Součin uniformně diskrétního spočetného prostoru I s uniformním prostorem $\mathbb{R}$ má spočetný uniformní charakter a je metrizablení, kdežto uniformní charakter $\coprod_I \mathbb{R}$ je nespočetný a není tedy metrizablení.

Opačná je následující situace. Ať X, Y jsou uniformní prostory a $\tilde{X}, \tilde{Y}$ jsou množiny X, Y s uniformně diskrétními uniformitami. Pak součin $X \times Y$ je infimum součinů $X \times \tilde{Y}, \tilde{X} \times Y$. Podobné tvrzení v topologických prostorech neplatí. Tvrzení pro uniformity se s výhodou používá pro zobrazení: $f : X \times Y \rightarrow Z$ je stejnoměrně spojitě, právě když jsou stejnoměrně spojitá zobrazení $f : X \times \tilde{Y} \rightarrow Z, f : \tilde{X} \times Y \rightarrow Z$.

5.3 Úplnost

Úplnost patří v uniformních prostorech k nejdůležitějším pojmům, podobně jako kompaktnost v topologických prostorech. Oba pojmy mají hodně společného ale i rozdílného.

Tak jako v metrických prostorech musíme začít cauchyovskými soubory. Uvidíme později, že lépe se pracuje s cauchyovskými filtry.

Definice 5.61. Cauchyovské soubory a filtry

Nechť X je uniformní prostor.

1. Usměrněný soubor $\{x_a\}_A$ v X se nazývá *cauchyovský*, jestliže pro každé uniformní okolí diagonály E existuje $a_0 \in A$, že pro každé $a, b \in A, a_0 \leq a, b$ je $(x_a, x_b) \in E$.

2. Filtr $\mathcal{F}$ na X se nazývá *cauchyovský*, jestliže pro každé uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X je $\mathcal{F} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$. $\square$

Snadno se ukáží následující vlastnosti.

Fakt 5.62. Vlastnosti cauchyovských souborů a filtrů

1. Usměrněný soubor $\{x_a\}_{a \in A}$ v X je cauchyovský, právě když pro každé uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ existuje $U \in \mathcal{U}$, že $x_a \in U$ pro všechna $a \in A$ větší než nějaké $a_0 \in A$.
2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.
 - (a) Filtr $\mathcal{F}$ na X je cauchyovský.
 - (b) Pro každé $E \in \mu$ existuje $x \in X$, že $E(x) \in \mathcal{F}$.
 - (c) Pro každé $E \in \mu$ existuje $F \in \mathcal{F}$, že $F \times F \subset E$.
3. Jsou-li $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$, filtry na X , $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ a $\mathcal{F}_1$ je cauchyovský, je i $\mathcal{F}_2$ cauchyovský.
4. Je-li $\{x_a\}_A$ cauchyovský soubor, je filtr s bázi $\{x_b; b \geq a\}, a \in A$, cauchyovský.

Obráceně, je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr, pak je soubor $\{x_F; F \in \mathcal{F}\}$ cauchyovský (zde $x_F \in F$ a $\mathcal{F}$ je uspořádan obrácenou inkluzí).

5. Stejněměrně spojitě zobrazení $f: X \rightarrow Y$ zobrazuje cauchyovský soubor v X na cauchyovský soubor v Y . Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr na X , pak $f(\mathcal{F})$ je báze cauchyovského filtru.
6. Je-li usměrněný soubor (resp. filtr) v podprostoru $X \subset Y$, pak je cauchyovský v Y , právě když je cauchyovský v X .
7. Hromadný bod cauchyovského souboru nebo filtru je jeho limitou.
8. Každý konvergentní soubor (nebo filtr) v uniformním prostoru je cauchyovský.

Důkaz. 1. $\Rightarrow$: Necht $\mathcal{U}$ je uniformní pokrytí a $E \in \mu$ splňuje $\{E(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}$. Necht $a_0 \in A$ splňuje $(x_a, x_b) \in E$ pro každé $a, b \geq a_0$. Pak $x_a \in E(x_{a_0})$, což je však obsaženo v nějakém $U \in \mathcal{U}$.

$\Leftarrow$: Necht $E \in \mu$ je dáno. Necht symetrické $F \in \mu$ splňuje $F \circ F \subset E$. Ať $x \in X$ a $a_0 \in A$ jsou zvoleny tak, že $x_a \in F(x)$ pro $a \geq a_0$. Pak ovšem pro $a, b \geq a_0$ platí $(x, x_a), (x, x_b) \in F$, takže $(x_a, x_b) \in F \circ F \subset E$.

2. (a) $\Rightarrow$ (b): Necht $E \in \mu$ je dáno. Pak $\{E(x); x \in X\}$ je uniformní pokrytí X , takže existuje $x \in X$ splňující $E(x) \in \mathcal{F}$.

(b) $\Rightarrow$ (c): Je-li $E \in \mu$ dáno, ať $x \in X$ splňuje $H(x) \in \mathcal{F}$, kde symetrické $H \in \mu$ je zvoleno tak, aby $H \circ H \subset E$. Pak pro $y, z \in H(x)$ platí $(x, y), (x, z) \in H$, takže $(y, z) \in H \circ H \subset E$. Proto $H(x) \times H(x) \subset E$.

(c) $\Rightarrow$ (a): Necht $\mathcal{U}$ je uniformní pokrytí a $E \in \mu$ splňuje $\{E(x); x \in X\} \prec \mathcal{U}$. Necht $F \in \mathcal{F}$ splňuje $F \times F \subset E$. Zvolíme $x \in F$, pak $F = (F \times F)(x) \subset E(x)$. Tedy $\mathcal{U} \cap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

3. Tvrzení je zřejmé z definice.

4. Necht $\mathcal{F}$ je filtr s uvedenou bází a $E \in \mu$ je dáno. Pak existuje $a_0 \in A$ a $x \in X$ takové, že $x_a \in E(x)$ pro každé $a \geq a_0$. Tedy $\{x_a; a \geq a_0\} \in E(x)$, takže $E(x) \in \mathcal{F}$. Tedy $\mathcal{F}$ je cauchyovský.

Obráceně, necht soubor $\{x_F; F \in \mathcal{F}\}$ je vytvořen z cauchyovského filtru $\mathcal{F}$. Necht $E \in \mu$ je dáno. Pak existuje $F_0 \in \mathcal{F}$ splňující $F_0 \times F_0 \subset E$. Necht $F_1, F_2 \subset F_0$ v $\mathcal{F}$ jsou libovolné. Pak $(x_{F_1}, x_{F_2}) \in F_0 \times F_0 \subset E$, takže $\{x_F\}_{\mathcal{F}}$ je cauchyovský.

5. Je-li $f: (X, \mu) \rightarrow (Y, \nu)$ stejněměrně spojitě zobrazení a $\{x_a\}_A$ je cauchyovský usměrněný soubor, pak pro $F \in \nu$ nalezneme $E \in \mu$ splňující $(f \times f)(E) \subset F$. Necht $a_0 \in A$ je takové, že $(x_a, x_b) \in E$ pro $a, b \geq a_0$. Pak ovšem $(f(x_a), f(x_b)) \in (f \times f)(E) \subset F$. Tedy $\{f(x_a)\}$ je cauchyovský soubor v Y .

Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr a $E' \in \nu$ je dáno, nalezneme $E \in \mu$ takové, že $(f \times f)(E) \subset E'$. Necht $F \in \mathcal{F}$ splňuje $F \times F \subset E$. Pak $f(F)$ splňuje

$$(f(F) \times f(F)) = (f \times f)(F \times F) \subset (f \times f)(E) \subset E'.$$

Tedy $\{f(F)\}_{\mathcal{F}}$ je báze cauchyovského filtru.

6. Necht $\mathcal{F}$ je filtr v X , který je cauchyovský v (Y, μ) . Necht $E' \in \mu \upharpoonright_X$ je dáno. Pak existuje $E \in \mu$ takové, že $E' = E \cap (X \times X)$. Necht $F \in \mathcal{F}$ splňuje $F \times F \subset E$. Pak ovšem

$$F \times F \subset E \cap (X \times X) = E',$$

takže je cauchyovský v X . Druhá implikace stejně jako tvrzení pro soubory je analogická.

7. Necht x je hromadný bod cauchyovského filtru $\mathcal{F}$. Necht U je okolí x v topologii $t\mu$. Pak existuje $E \in \mu$ splňující $E(x) \subset U$. Necht symetrické $E' \in \mu$ a $F \in \mathcal{F}$ splňují $F \times F \subset E'$ a $E' \circ E' \subset E$. Necht $y \in X$ splňuje $y \in F \cap E'(x)$ (z definice hromadného bodu). Pak $F \subset E(x)$. Vskutku, je-li $z \in F$, je $(y, z) \in F \times F \subset E'$, $(x, y) \in E'$, takže $(x, z) \in E' \circ E' \subset E$. Tedy $z \in E(x)$. Proto $E(x) \in \mathcal{F}$, tedy i $U \in \mathcal{F}$.

Necht x je hromadný bod cauchyovského souboru $\{x_a\}_A$. Necht U je okolí x . Pak existuje $E \in \mu$ splňující $E(x) \subset U$. Necht symetrické $E' \in \mu$ splňuje $E' \circ E' \subset E$ a necht $a_0 \in A$ je takové, že pro $a, b \geq a_0$ je $(x_a, x_b) \in E$. Z definice hromadného bodu existuje $a_1 \geq a_0$ takové, že $x_{a_1} \in E'(x)$. Pak pro $a \geq a_1$ platí $(x_{a_1}, x_a) \in E'$, $(x_{a_1}, x) \in E'$, takže $(x, x_a) \in E$. Tedy $x_a \in E(x) \subset U$ pro $a \geq a_1$, proto $\{x_a\}$ konverguje k x .

8. Necht $\{x_a\}$ konverguje k $x \in X$ a $E \in \mu$ je dáno. Necht symetrické $E' \in \mu$ splňuje $E' \circ E' \subset E$ a $a_0 \in A$ splňuje $x_a \in E'(x)$ pro $a \geq a_0$. Pak pro $a, b \geq a_0$ platí $(x_a, x), (x_b, x) \in E'$, takže $(x_a, x_b) \in E$. Tedy je $\{x_a\}_A$ cauchyovský.

Necht nyní $\mathcal{F}$ je konvergentní filtr s limitou $x \in X$ a $E \in \mu$ je dáno. Pak $E(x) \in \mathcal{F}$ z definice konvergence. Tedy dle 2(a) je $\mathcal{F}$ cauchyovský. $\square$

Následující charakterizace totálně omezených prostorů pomocí cauchyovských filtrů se bude hodit později ve vztahu ke kompaktním prostorům.

Tvrzení 5.63. Totální omezenost versus ultrafiltry

Uniformní prostor je totálně omezený, právě když každý jeho ultrafiltr je cauchyovský.

Důkaz. Ať X je totálně omezený prostor a $\mathcal{F}$ je ultrafiltr na X . Vezmeme libovolné uniformní pokrytí X a jeho konečné podpokrytí. Protože $\mathcal{F}$ je ultrafiltr, musí existovat prvek podpokrytí náležící do ultrafiltru, takže $\mathcal{F}$ je cauchyovský.

Nechť X není totálně omezený. Existuje uniformní pokrytí $\mathcal{U}$, z kterého nelze vybrat konečné pokrytí. Pro každou konečnou množinu $\mathcal{A} \subset \mathcal{U}$ položíme $P_{\mathcal{A}} = X \setminus \bigcup \mathcal{A}$. Množiny $P_{\mathcal{A}}$ tvoří bázi filtru $\mathcal{F}$. Vezmeme ultrafiltr $\mathcal{X} \supset \mathcal{F}$. Ten nemůže být cauchyovský. V opačném případě obsahuje nějaké $U \in \mathcal{U}$ a toto U je disjunktní s $P_{\{U\}} \in \mathcal{F}$, což je spor. $\square$

V předchozí charakterizaci lze místo cauchyovskosti ultrafiltrů použít vlastnost, že každý filtr je obsažen v cauchyovském filtru.

Přejdeme k definici úplnosti.

Definice 5.64. Úplný uniformní prostor

Uniformní prostor se nazývá *úplný*, jestliže každý jeho cauchyovský soubor (nebo filtr) konverguje. $\square$

Místo existence limity lze použít existenci hromadného bodu. Místo filtrů lze vzít v definici ultrafiltry. Dále lze místo filtrů vzít v definici úplnosti báze cauchyovských filtrů.

Příklady 5.65. Příklady na úplnost

1. Metrický prostor je úplný ve smyslu metriky, právě když je úplný ve smyslu uniformity.

Vskutku, je-li (X, ρ) úplný metrický prostor a $\mathcal{F}$ je cauchyovský filtr, je $\mathcal{H} = \{\overline{F}; F \in \mathcal{F}\}$ filtr sestávající z uzavřených množin. Jelikož je $\mathcal{F}$ cauchyovský, obsahuje $\mathcal{F}$, a tedy i $\mathcal{H}$, množiny libovolně malého diametru. Dle Věty 4.12 existuje $x \in \bigcap \mathcal{H}$. Pak x je limita $\mathcal{F}$.

Obráceně, je-li $\{x_n\}$ cauchyovská posloupnost, jde o cauchyovský soubor, takže má limitu. To je pak i limita posloupnosti $\{x_n\}$.

2. Uniformně diskrétní a indiskrétní prostory jsou úplné.

3. *Uniformita kompaktního regulárního prostoru je úplná.*

V kompaktním prostoru konverguje každý ultrafiltr.

4. *Jediná uniformita na ω_1 není úplná.*

Soubor intervalů $\{(\alpha, \omega_1); \alpha \in \omega_1\}$ je báze nekonvergentního cauchyovského filtru v ω_1 .

5. *Jemná uniformita parakompaktního prostoru je úplná.*

Ať $\mathcal{F}$ je filtr na parakompaktním prostoru X , který nemá limitu. Pak každý bod x má otevřené okolí $U_x \notin \mathcal{F}$. Otevřené pokrytí $\{U_x; x \in X\}$ je uniformní pokrytí v jemné uniformitě na X a jeho průnik s $\mathcal{F}$ je prázdný.

6. Úplně regulární prostory, které jsou vytvořeny nějakou úplnou uniformitou, se nazývají *Dieudonné úplné* nebo *úplné ve smyslu Dieudonné*. Každý parakompaktní prostor je Dieudonné úplný, existují Dieudonné úplné prostory, které nejsou parakompaktní, např. $\mathbb{N}^{\omega_1}$ (není normální podle Příkladu 2.38, takže není parakompaktní podle 5.53).

Nabízí se srovnání s čechovskou úplností, vztah však skoro žádný není. Každý metrizable prostor je Dieudonné úplný (protože je parakompaktní), ale jen úplně metrizable prostory jsou čechovsky úplné. Obráceně, každý lokálně kompaktní úplně regulární prostor je čechovsky úplný, ale nemusí být Dieudonné úplný, jako např. ω_1 .

Protože úplnost v uniformních prostorech je součinná a uzavřeně dědičná, a přechod k topologiím zachovává součiny a podprostory, je třída všech Dieudonné úplných topologických prostorů součinná a uzavřeně dědičná. $\square$

Uvedeme základní vlastnosti úplných prostorů.

Věta 5.66. Vlastnosti úplných prostorů

1. *Úplnost je uzavřeně dědičná a součinná.*

2. *Suma úplných prostorů je úplná, kvocient úplného prostoru nemusí být úplný.*

3. Úplný podprostor Hausdorffova uniformního prostoru je uzavřený.

4. Úplně regulární prostor je kompaktní právě když je vytvořen úplným a totálně omezeným prostorem.

5. Ať Y je úplný prostor a X je jemnější prostor než Y a má bázi uniformních okolí diagonály (nebo uniformních pokrytí) složený z množin uzavřených v $Y \times Y$ (resp. Y). Pak X je úplný.

Důkaz. 1. Ať X je uzavřený podprostor uniformního prostoru Y . Je-li usměrněný soubor $\{x_a\}_A \subset X$ cauchyovský v X , je cauchyovský v Y (Fakt 5.62.5) a tedy má limitu v Y , která náleží do X , protože X je uzavřený v Y .

Ať $X_i, i \in I$, jsou neprázdné úplné prostory a $\mathcal{F}$ je cauchyovský filtr v $\prod_I X_i$. Pak projekce $\pi_i(\mathcal{F})$ generují cauchyovské filtry $\mathcal{F}_i$ v X_i (Fakt 5.62.5), a ty tedy mají limity $x_i \in X_i$. Potom $x = \{x_i\}_I$ je limita $\mathcal{F}$ v součinu.

Vskutku, nechť U je okolí x . Můžeme předpokládat, že $U = \pi_{i_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{i_n}^{-1}(U_n)$, kde $i_1, \dots, i_n \in I$ a U_j je okolí x_{i_j} pro $j = 1, \dots, n$. Pak pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ existuje $F_j \in \mathcal{F}$, že $\pi_{i_j}(F_j) \subset U_j$. Pak

$$\bigcap_{j=1}^n F_j \subset \bigcap_{j=1}^n \pi_{i_j}^{-1}(\pi_{i_j}(F_j)) \subset \bigcap_{j=1}^n \pi_{i_j}^{-1}(U_j) = U.$$

Tedy $U \in \mathcal{F}$, takže x je limita $\mathcal{F}$.

2. Tvrzení o sumě je snadné, protože cauchyovský filtr na sumě prostorů X_i je cauchyovský na některém X_i . V Příkladě 5.58 je prostor Z úplný, takže každý uniformní prostor je kvocientem úplného uniformně nuldimenziálního diskretního prostoru.

3. Ať X je úplný prostor, který je podprostorem Hausdorffova uniformního prostoru Y . Vezmeme $y \in \overline{X}^Y$ a soubor $\{x_a\}_A$ v X konvergující k y . Podle Faktu 5.62.6 je $\{x_a\}$ cauchyovský v X , a tedy má v X limitu x . Protože Y je Hausdorffův, je $x = y$ a tedy $y = x \in X$.

4. Je zřejmé, že jediná uniformita na úplně regulárním kompaktním prostoru je úplná a totálně omezená. Nechť opačně, X je úplný totálně omezený prostor a $\mathcal{F}$ je ultrafiltr na X . Podle Tvrzení 5.63 je $\mathcal{F}$ cauchyovský, a tedy konvergentní, protože X je úplný.

5. Každý cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ na X je cauchyovský na hrubším Y a má tedy nějakou limitu y . Dokážeme, že každé okolí G bodu y v X náleží do $\mathcal{F}$. Existuje uzavřené (v Y) uniformní pokrytí $\mathcal{U}$ prostoru X , že $\text{star}_{\mathcal{U}}(y) \subset G$. Protože $\mathcal{F}$ je cauchyovský filtr, existuje $U \in \mathcal{U} \cap \mathcal{F}$. Tedy $y \in \overline{U}^Y = U$, což implikuje $U \subset \text{star}_{\mathcal{U}}(y) \subset G$, takže $G \in \mathcal{F}$. $\square$

Z vlastnosti 4 plyne, že parakompaktní prostor je kompaktní, právě když má jedinou uniformitu (právě když jeho jemná uniformita je totálně omezená).

Vlastnost 5 má důležité důsledky. Oba lze dokázat bez použití předchozí vlastnosti 5.

Důsledek 5.67. Úplnost jemnějších prostorů a prostorů funkcí

1. Nechť uniformity $\mu \supset \nu$ vytvářejí stejnou topologii. Je-li ν úplná, je i μ úplná.

2. Je-li Z úplný prostor, pak $F_u(X, Z)$ je úplný prostor. Speciálně, $U_u(X), C_u(X), U_u^*(X), C_u^*(X)$ a $\ell_\infty(\kappa)$ jsou úplné prostory.

■■■

Důkaz. Dokážeme tvrzení 2 (důkaz tvrzení 1 je triviální). Protože součin $Y^X = F_p(X, Y)$ je úplný, stačí ukázat, že existuje báze uniformních okolí diagonály v $F_u(X, Y)$, která jsou uzavřené v $Y^X \times Y^X$. Vezmeme uzavřené uniformní okolí V diagonály v Y a položíme $W = \{(f, g); f, g : X \rightarrow Y, \forall x \in X : (f(x), g(x)) \in V\}$. Doplněk množiny W v $Y^X \times Y^X$ je otevřený. Opravdu, pokud $(f, g) \notin W$, existuje $x \in X$, že $(f(x), g(x)) \notin V$ a tedy existují okolí $U_{f(x)}, U_{g(x)}$ v Y , že $(U_{f(x)} \times U_{g(x)}) \cap V = \emptyset$, což dokazuje naše tvrzení. Dodatek tvrzení 2 vyplývá z toho, že $U(X, Y), C(X, Y), U^*(X, \mathbb{R}), C^*(X, \mathbb{R})$ jsou uzavřené množiny v $F_u(X, Y)$ (přímý důkaz pomocí okolí). $\square$

Nyní uvedeme důležitou větu, jejíž obdoba v topologických prostorech neplatí.

Věta 5.68. Rozšíření stejnoměrně spojitěho zobrazení

Ať $f : A \rightarrow Y$ je stejnoměrně spojitě zobrazení, kde A je podprostor uniformního prostoru X a Y je úplný Hausdorffův prostor. Pak existuje jediné stejnoměrně spojitě zobrazení $F : \overline{A} \rightarrow Y$, které rozšiřuje f .

Důkaz. Vezmeme libovolný bod $x \in \bar{A}$ a $\mathcal{F} = \{U \cap A; U \in \mathcal{U}(x)\}$. Pak $\mathcal{F}$ je cauchyovský v A (Fakt 5.62.5) a $f(\mathcal{F})$ generuje cauchyovský filtr v Y . Ten má tedy jednoznačně určenou limitu v Y , označíme ji $F(x)$. Zřejmě $F \upharpoonright A = f$. Zbývá dokázat, že F je stejnoměrně spojitý. To lze dokázat z definice stejnoměrné spojitosti, ale použijeme Tvzení 5.32.3, které říká, že stačí ukázat spojitost F na $\bar{A}$. To však plyne z Tvzení 1.69, protože F bylo definováno spojitý na $A \cup \{x\}$. Protože Y je Hausdorffův, je F určeno jednoznačně. $\square$

Předpoklad Hausdorffovosti lze vynechat, pak v tvrzení neplatí jednoznačnost. Vezmeme kvocient $q : Y \rightarrow H(Y)$ z příkladu 5.58.2 a rozšíříme zobrazení $q \circ f : A \rightarrow H(Y)$ na $F' : \bar{A} \rightarrow H(Y)$. Pak pro $x \in \bar{A}$ zvolíme libovolně $F(x) \in q^{-1}(F'(x))$ (pro $x \in A$ musíme vzít $F(x) = f(x)$). Protože q je nejen induktivně vytvářející, ale i projektivně vytvářející, je F stejnoměrně spojitý.

Nyní přicházíme k období kompaktifikací topologických prostorů. Tak jako u kompaktifikací budeme i u úplných obalů uvažovat jen Hausdorffovy prostory. Pomocí Hausdorffovy modifikace lze některá následující tvrzení a definice převést i na prostory, které nejsou Hausdorffovy. Kompaktifikaci Tichonovova prostoru X jsme definovali jako dvojici (e, Y) , kde $e : X \rightarrow Y$ je homeomorfismus na hustou část a Y je kompaktní Hausdorffův prostor. V praxi se však ztotožňuje X s $e(X)$ a chápe se X jako podprostor Y , i když množinově to podprostor není. Tímto způsobem budeme postupovat i u následujících zúplnění.

Definice 5.69. Zúplnění

Dvojice (e, Y) , kde Y je úplný Hausdorffův prostor a $e : X \rightarrow Y$ je uniformní vnoření na hustou část, se nazývá *zúplnění* (nebo *úplný obal*) prostoru X . $\square$

Následující tvrzení ukazuje podstatný rozdíl mezi kompaktifikacemi a zúplněními.

Věta 5.70. Existence a jednoznačnost zúplnění

Každý Hausdorffův uniformní prostor X má zúplnění, které je určeno jednoznačně až na uniformní homeomorfismus, který rozšiřuje identitu na X . Zúplnění prostoru X budeme značit γX .

Důkaz. Pro uniformní Hausdorffův prostor X existuje uniformní vnoření $e : X \rightarrow \prod_I Y_i$ do součinu metrických prostorů. Každé Y_i má metrický úplný obal $\gamma(Y_i)$. Pak $\overline{e(X)} \subset \prod_I \gamma(Y_i)$ je zúplnění prostoru X .

Mějme dva úplné obaly $e_i : X \rightarrow Z_i$, $i = 0, 1$, prostoru X . Podle Věty 5.68 lze $e_{1-i} \circ e_i^{-1}$ jednoznačně rozšířit na stejnoměrně spojitý zobrazení $f_i : Z_i \rightarrow Z_{1-i}$. Pak

$$(f_0 \circ f_1)(e_1(x)) = f_0(e_0(x)) = e_1(x) \quad \text{a} \quad (f_1 \circ f_0)(e_0(x)) = f_1(e_1(x)) = e_0(x), \quad x \in X.$$

Tedy $f_1 \circ f_0 = \text{Id}_{Z_0}$ a $f_0 \circ f_1 = \text{Id}_{Z_1}$. Zobrazení f_i jsou tedy vzájemně inverzní uniformní homeomorfismy. $\square$

Na konci této kapitoly se podíváme hlouběji na cauchyovské filtry a pomocí nich sestojíme zúplnění bez použití metrických prostorů. navíc i pro prostory, které nejsou Hausdorffovy. Tento postup se bude hodit v Dodatcích na popis kompaktifikací.

Jednoduchým důsledkem Věty 5.70 je tvrzení, že je-li X uniformním podprostorem prostoru Y , je γX uniformním podprostorem γY .

5.3.1 Použití uniformit na topologické prostory

Uvedeme nyní důležitou souvislost totálně omezených uniformních prostorů s kompaktifikacemi. Důkaz vyplývá z předchozích tvrzení.

Věta 5.71. Kompaktifikace versus totálně omezené prostory

1. Je-li (X, μ) totálně omezený Hausdorffův prostor, je jeho zúplnění kompaktifikací prostoru $(X, t\mu)$.
2. Necht (e, Y) je kompaktifikace topologického prostoru (X, τ) . Pak zúžení na $e(X)$ uniformity na Y je totálně omezená uniformita a její zúplnění je uniformita prostoru Y .
3. Ať (e, Y) je kompaktifikace topologického prostoru X . Pro spojitý zobrazení $f : X \rightarrow Z$ do kompaktního Hausdorffova prostoru Z pak existuje spojitý zobrazení $g : Y \rightarrow Z$ splňující $g = f \circ e^{-1}$, právě když $f \circ e^{-1}$ je stejnoměrně spojitý vzhledem k zúžení na $e(X)$ uniformity na Y .

Důkaz. 1. Necht $(e, (Y, \nu))$ je zúplnění totálně omezeného uniformního prostoru (X, μ) . Pak $(e(X), \nu \upharpoonright_{e(X)})$ je totálně omezený prostor, takže $Y = \overline{e(X)}^{t\nu}$ je též totálně omezený (Fakt 5.30.2). Tedy je $(Y, t\nu)$ kompaktní

dle Věty 5.66.4. Jelikož máme $t(\nu \upharpoonright_{e(X)}) = t\nu \upharpoonright_{e(X)}$, je $e: (X, t\mu) \rightarrow (e(X), t\nu \upharpoonright_{e(X)})$ homeomorfismus. Tedy je $(Y, t\nu)$ kompaktifikace $(X, t\mu)$.

2. Necht $(e, (Y, \sigma))$ je kompaktifikace (X, τ) . Necht ν je uniformita na Y generující topologii σ . Pak (Y, ν) je totálně omezený prostor, tedy i $(e(X), \nu \upharpoonright_{e(X)})$ je totálně omezený prostor. Uvažujme zúplnění $(\tilde{Y}, \tilde{\nu})$ uniformního prostoru $(e(X), \nu \upharpoonright_{e(X)})$. Dle Věty 5.70 je $(\tilde{Y}, \tilde{\nu})$ uniformně homeomorfní s (Y, ν) .

3. $\implies$: Je-li $\tilde{f}: Y \rightarrow Z$ spojitě rozšíření $f \circ e^{-1}: e(X) \rightarrow Z$, jde o stejnoměrně spojitě zobrazení (Y je kompaktní). Tedy i jeho restrikce $f \circ e^{-1}$ je stejnoměrně spojitě zobrazení na X .

$\impliedby$: Je-li $f \circ e^{-1}: e(X) \rightarrow Z$ stejnoměrně spojitě vzhledem k uniformitě $\nu \upharpoonright_{e(X)}$, kde ν je uniformita Y generující topologii na Y , pak $f \circ e^{-1}$ lze stejnoměrně spojitě rozšířit na Y dle Věty 5.68. $\square$

Poznámka 5.72. Jednobodová Čechova-Stoneova kompaktifikace

Má-li Tichonovův prostor X jednobodovou Čechovu-Stoneovu kompaktifikaci βX , má X podle předchozího tvrzení jedinou totálně omezenou uniformitu. Zajímavým důsledkem je, že má X i jedinou uniformitu. Důkaz lze provést formální úpravou důkazu z Příkladu 5.24.2, že ω_1 má jedinou uniformitu.

Vidíme, že kompaktifikace na X jsou v jednoznačném vztahu s totálně omezenými uniformitami na X , které vytvářejí topologii prostoru X . A to včetně spojitosti a stejnoměrné spojitosti (v řeči teorie kategorií: kategorie kompaktifikací prostoru X je isomorfní kategorii totálně omezených uniformit na X).

Je-li X uniformní Hausdorffův prostor, pak jeho totálně omezená modifikace vytváří stejnou topologii a její zúplnění je kompaktní prostor, který se nazývá *Samuelova kompaktifikace* prostoru X a značí se sX . Kompaktifikace v tomto smyslu obecně neobsahuje X jako uniformní podprostor. Z předchozí vlastnosti 3 plyne jistá podobnost s kompaktifikací βX :

Důsledek 5.73. Samuelova kompaktifikace

1. Je-li $f: X \rightarrow Y$ stejnoměrně spojitě zobrazení Hausdorffových uniformních prostorů a Y je kompaktní, pak existuje jediné stejnoměrně spojitě zobrazení $F: sX \rightarrow Y$ rozšiřující f .
2. Je-li X úplně regulární Hausdorffův prostor a μ jeho jemná uniformita, pak $s(X, \mu)$ je Čechova-Stoneova kompaktifikace βX .

Důkaz. Tvrzení 1. plyne z Důsledku 5.51.4.

2. Necht $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená spojitá funkce a μ je jemná uniformita na X . Dle Tvrzení 5.48 je $f: (X, \mu) \rightarrow \mathbb{R}$ stejnoměrně spojitě. Dle bodu 1. lze f spojitě rozšířit na $s(X, \mu)$. Tedy $s(X, \mu)$ je Čechova-Stoneova kompaktifikace prostoru X . $\square$

Jiným důsledkem je slibované vnoření totálně omezených prostorů do Tichonovova kvádru.

Důsledek 5.74. Totálně omezené prostory versus Tichonovův kvádr

1. Hausdorffův uniformní prostor je totálně omezený, právě když lze uniformně vnořit do Tichonovova kvádru.
2. Uniformní prostor je totálně omezený, právě když lze uniformně vnořit do součinu Tichonovova kvádru s indiskrétním prostorem.

Důkaz. 1. Protože Tichonovův prostor je kompaktní, je každý jeho uniformní podprostor totálně omezený. Obráceně, každý totálně omezený prostor je podprostorem svého zúplnění, které je kompaktní a lze tedy vnořit do Tichonovova kvádru.

Tvrzení 2 vyplývá z 1 a z toho, že každý uniformní prostor je podprostorem součinu své Hausdorffovy modifikace s indiskrétním prostorem. $\square$

■■■zbytek kapitoly

Pomocí předchozích tvrzení lze zcela jiným způsobem dokázat Tietzovu-Urysohnovu větu a navíc Katětovovu větu o rozšíření stejnoměrně spojitých funkcí. Základem je Stoneova-Weierstrassova věta (3.24), pomocí které jsme dokázali Čechovu rozšiřovací větu z kompaktních podprostorů (3.27).

Věta 5.75. Tietzova-Urysohnova věta a Katětovova věta

1. Každá stejnoměrně spojitá omezená funkce $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, kde A je podprostor uniformního prostoru X , lze rozšířit na stejnoměrně spojitou funkci $X \rightarrow \mathbb{R}$.
2. Každá spojitá funkce $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, kde A je uzavřený podprostor normálního regulárního prostoru X , lze rozšířit na spojitě zobrazení $X \rightarrow \mathbb{R}$.

Důkaz. 1. Necht $f : A \rightarrow [a, b]$ je stejnoměrně spojitá funkce. Podle Důsledku 5.51.4 je f stejnoměrně spojitě jako zobrazení $pA \rightarrow [a, b]$. Platí, že pA je podprostor pX (5.51.3) a $\gamma(pA)$ je podprostor $\gamma(pX)$. Podle věty 5.68 existuje stejnoměrně spojitě zobrazení $\tilde{f} : \gamma(pA) \rightarrow [a, b]$. Podle Čechovy věty o rozšíření (3.27) existuje spojitě rozšíření $F : \gamma(pX) \rightarrow [a, b]$, které je stejnoměrně spojitě, protože $\gamma(pX)$ je kompaktní prostor. Zúžení F na X je hledané rozšíření funkce f .

2. Víme z konce důkazu věty 1.70, že stačí tvrzení dokázat pro omezená zobrazení. Navíc můžeme podle věty 5.68 předpokládat, že A je uzavřená podmnožina X . Necht $f : A \rightarrow [a, b]$ je spojitá funkce. Protože X je normální, tvoří všechna jeho konečná otevřená pokrytí uniformitu, označíme ji u a je to totálně omezená modifikace jemné uniformity na X . Protože A je uzavřený v X , lze každé konečné otevřené pokrytí množiny A rozšířit na konečné otevřené pokrytí X a tedy zúžení u na A je totálně omezená modifikace jemné uniformity na A . Funkce $f : (A, u_A) \rightarrow [a, b]$ je stejnoměrně spojitá (5.48, 5.51.3 a lze tedy podle 1 rozšířit na stejnoměrně spojitou (a tedy i spojitou) funkci $X \rightarrow [a, b]$. $\square$

Oproti větě 1.70 máme v 2 navíc předpoklad, že X je regulární, protože potřebujeme, aby X byl uniformizovatelný. Pomocí Hausdorffovy modifikace lze z předchozího postupu ukázat platnost i pro normální neregulární prostory, protože normalita X implikuje normalitu $H(X)$ (použije se charakterizace normality pomocí konečných otevřených pokrytí). Dodáme, že předpoklad omezenosti funkce f v Katětovově větě je podstatný (např. funkce $\{n \rightsquigarrow n^2\} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ nelze rozšířit na stejnoměrně spojitou funkci $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Vrátíme se nyní k otázce existence nejmenšího prvku v množině uniformit vytvářejících daný úplně regulární prostor. V kapitole 3 byly definovány lokálně kompaktní prostory jako Hausdorffovy prostory, kde každý bod má kompaktní okolí. Tuto definici lze beze změny použít i pro regulární prostory (v případě neregulárních prostorů je třeba požadovat, že každý bod má bázi okolí složenou z kompaktních množin). V kapitole 3 se lokálně kompaktní prostory používaly pro kompaktifikace a ty jsou definovány jen pro Hausdorffovy prostory. Nyní však lokální kompaktnost potřebujeme v úplně regulárních prostorech. Použijeme pozorování, že uniformní prostor X je lokálně kompaktní, právě když je $H(X)$ lokálně kompaktní. Opravdu, podle 5.58 je kvocient $q : X \rightarrow H(X)$ otevřené zobrazení, takže obraz kompaktního okolí bodu x je kompaktní okolí bodu $q(x)$. Protože q je projektivně vytvářející v topologickém i uniformním smyslu, je X lokálně kompaktní, pokud je $H(X)$ lokálně kompaktní.

Tvrzení 5.76. Nejhrubší uniformita na lokálně kompaktních prostorech

Úplně regulární prostor má nejhrubší uniformitu, která ho vytváří, právě když je lokálně kompaktní.

Důkaz. Předpokládejme nejdříve, že X je Hausdorffův. Víme, že hledaná nejhrubší uniformita je totálně omezená. Podle věty 5.71 existuje tato nejhrubší uniformita právě když má X nejmenší kompaktifikaci. Ta existuje podle tvrzení 3.39 a podle poznámky za tvrzením, právě pro lokálně kompaktní prostory.

Pokud X není Hausdorffův, použijeme jeho Hausdorffovu modifikaci $H(X)$. Stačí si uvědomit, že uniformita μ je nejhrubší na $t(X)$ právě když $H(\mu)$ je nejhrubší na $t(H(X))$. $\square$

Uvedená nejhrubší uniformita μ na lokálně kompaktním úplně regulárním prostoru X se dá snadno popsat. Pro bod $x \in X$ vezmeme jeho otevřená okolí $x \in V \subset \bar{V} \subset U$, že $\bar{U}$ je kompaktní. Pak všechna dvouprvková pokrytí $U, X \setminus \bar{V}$ tvoří subbázi hledané uniformity. Bázi jsou tedy konečná otevřená pokrytí $\mathcal{G}$, kde existuje $G_0 \in \mathcal{G}$, že $\bar{G}$ jsou kompaktní pro každé $G \in \mathcal{G}, G \neq G_0$.

Víme, že na totálně omezených prostorech je každá stejnoměrně spojitá reálná funkce omezená (a že to není charakterizace totální omezenosti). Pokud je tedy jemná uniformita na úplně regulárním prostoru X totálně omezená (pak je každá uniformita na X totálně omezená), je každá spojitá reálná funkce na X omezená. Tato vlastnost je jednou ze zobecnění kompaktnosti.

Definice 5.77. Pseudokompaktní prostor

Topologický prostor X se nazývá *pseudokompaktní*, jestliže $C(X) = C^*(X)$. $\square$

Příklady 5.78. Pseudokompaktnost

1. Každý spočetně kompaktní prostor je pseudokompaktní (Tvzení 3.11).

2. Isbellův-Mrówkův prostor $X = \mathbb{N} \cup \mathcal{S}$, vytvořený pomocí maximální skoro disjunktní soustavy $\mathcal{S}$, je pseudokompaktní (není spočetně kompaktní, protože $\mathcal{S}$ je nekonečná diskrétní uzavřená podmnožina v X). Předpokládejme, že existuje neomezená spojitá funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, řekněme, že existuje prostá posloupnost $\{x_n\}$ v X , že $f(x_n) \rightarrow \infty$. Nechť nejdříve $x_n \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$. Pak množina $\{x_n\}$ protíná nějakou množinu $S \in \mathcal{S}$ v nekonečné podmnožině a ta má za hromadný bod prvek $S \in X$. Potom $f(S) = \lim f(x_{k_n}) = \infty$, což je spor, protože $f(S) \in \mathbb{R}$. Vidíme, že stačí požadovat $|\{x_n\} \cap \mathbb{N}| = \omega$. Předpokládejme tedy $\{x_n\} \subset \mathcal{S}$. Pro každé n existuje okolí U_n bodu x_n , že $|f(y) - f(x_n)| < 1/n$ pro každé $y \in U_n$. Indukcí sestrojíme body $y_n \in U_n \cap \mathbb{N}$, že $y_n \neq y_m$ pro $n \neq m$. Zvolíme $y_1 \in U_1 \cap \mathbb{N}$ libovolně. Máme-li sestrojeny různé body $y_1, \dots, y_n$, kde $y_i \in U_i \cap \mathbb{N}$, najdeme $y_{n+1} \in U_{n+1} \cap \mathbb{N} \setminus \{y_1, \dots, y_n\}$, což lze, protože každá množina $U_n \cap \mathbb{N}$ je nekonečná. Zřejmě platí $f(y_n) \rightarrow \infty$ a můžeme použít předchozí část důkazu pro získání sporu.

3. Předchozí příklad byl umožněn i tím, že použitý příklad není normální. Platí totiž, že každý normální pseudokompaktní prostor je spočetně kompaktní. Je-li $\{a_n\}$ uzavřená spočetná diskrétní množina v normálním prostoru X , podle Tietzovy věty existuje spojitá funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, že $f(a_n) = n$. $\square$

Každý jemný totálně omezený uniformní prostor je pseudokompaktní. Platí i opak pro úplně regulární prostory.

Tvrzení 5.79. Pseudokompaktní prostor versus uniformity

Úplně regulární prostor je pseudokompaktní právě když jeho jemná uniformita je totálně omezená.

Důkaz. Zbývá dokázat, že pseudokompaktní úplně regulární prostor X má totálně omezenou jemnou uniformitu. Není-li jemná uniformita μ na X totálně omezená, obsahuje prostor (X, μ) spočetný uniformně diskrétní podprostor $Y = \{y_n\}$. Existuje stejnoměrně spojitá pseudometrika ρ na (X, μ) , že $\{B_\rho(y, 2); y \in Y\}$ je disjunktní systém. Následující funkce je spojitá na X a neomezená, což je spor.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } d(x, y) \geq 1 \text{ pro každé } y \in Y \\ n(1 - d(x, y_n)) & \text{je-li } d(x, y_n) < 1. \end{cases}$$

$\square$

Protože jemná uniformita parakompaktního prostoru je úplná, dostáváme:

Důsledek 5.80. Parakompaktní pseudokompaktní prostory

Parakompaktní pseudokompaktní prostor je kompaktní.

Jako důsledek dostáváme, že uspořádaný prostor ω_1 není parakompaktní, což bylo ukázáno i dříve.

5.3.2 Zúplnění pomocí filtrů

Zúplnění uniformních prostorů jsme sestrojili pomocí úplných metrických prostorů. Zúplnění metrických prostorů se sestrojí buď pomocí $\mathbb{R}$ (pokud víme, že $\mathbb{R}$ je úplný prostor) nebo pomocí cauchyovských posloupností. Tato druhá možnost na úplnosti $\mathbb{R}$ nezávisí a lze ji převést i do uniformních prostorů, jen se místo cauchyovských posloupností použijí cauchyovské filtry. Z tohoto postupu vyplyne důležitý popis kompaktifikací a zvláště Čechovy-Stoneovy kompaktifikace.

Každý cauchyovský filtr je obsažen v maximálním cauchyovském filtru, tj. v ultrafiltru. Platí však i obdoba pro minimální cauchyovské filtry.

Tvrzení 5.81. Minimální cauchyovské filtry

Nechť (X, μ) je uniformní prostor.

1. Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr na (X, μ) , je i menší filtr $m\mathcal{F} = \{E(F); F \in \mathcal{F}, E \in \mu\} = \{\text{star}_\mu F; F \in \mathcal{F}, \mathcal{U} \in \mu\}$ cauchyovský.
2. Je-li $\mathcal{F}$ cauchyovský filtr na (X, μ) , je $m\mathcal{F}$ minimálním cauchyovským filtrem vzhledem k inkluzi $\subset$.
3. Cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ na (X, μ) je minimální, právě když pro každé $F \in \mathcal{F}$ existuje $F' \in \mathcal{F}$, $E \in \mu$, že $E(F') \subset F$.

4. Dva různé minimální cauchyovské filtry $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$, obsahují disjunktní množiny $F_i \in \mathcal{F}_i$.
5. Jestliže minimální cauchyovský filtr konverguje k x , je totožný s filtrem okolí bodu x .
6. Cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ konverguje k bodu x , právě když konverguje k tomuto bodu minimální cauchyovský filtr $m\mathcal{F}$.

Důkaz. 1. Vezmeme $E \in \mu$ a hledáme x , že $E(x) \in m\mathcal{F}$. Najdeme $E' \in \mu$, že $E' \circ E' \subset E$. Existuje $x \in X$, že $E'(x) \in \mathcal{F}$. Potom $E'(E'(x)) \in m\mathcal{F}$, takže $E(x) \in m\mathcal{F}$.

Tvrzení 2 a 4 dokážeme současně. Necht $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$, jsou cauchyovské filtry na (X, μ) a $m\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1$. At $F \in \mathcal{F}_1 \setminus \mathcal{F}_2$. Pro F existuje $F' \in \mathcal{F}_1$ a $E \in \mu$, že $E(F') \subset F$. Pak $\{F, X \setminus F'\}$ je uniformní pokrytí v μ a tedy jedna z množin pokrytí náleží do $\mathcal{F}_2$. Nemůže to být F , takže $X \setminus F' \in \mathcal{F}_2$. To dokazuje 4 pro disjunktní množiny $F' \in \mathcal{F}_1, X \setminus F' \in \mathcal{F}_2$. Zároveň dostáváme i 2, protože pro $\mathcal{F}_2 \subsetneq \mathcal{F}_1$ je $F', X - F' \in \mathcal{F}_1$, což není možné.

Tvrzení 3 plyne ihned přímo z 2 a tvrzení 5 z definice okolí bodů v uniformním prostoru. Poslední tvrzení plyne z 4 a z toho, že každý filtr okolí bodu v úplně regulárním prostoru X je minimální cauchyovský filtr v libovolné uniformitě na X . $\square$

Uniformní prostor X je tedy úplný, právě když každý jeho minimální cauchyovský soubor konverguje. Nabízí se tedy možnost, že množina všech minimálních cauchyovských filtrů na uniformním prostoru X bude úplný prostor, s vhodnou uniformitou. To opravdu platí. At (X, μ) je uniformní prostor a $(Y, \nu) = \{\mathcal{F}; \mathcal{F} \text{ minimální cauchyovský filtr na } (X, \mu)\}$ mající za bázi uniformity $\{\tilde{E}; E \in \mu\}$, kde

$$\tilde{E} = \{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \in Y \times Y; \text{existují } F_i \in \mathcal{F}_i, \text{ že } F_1 \times F_2 \subset E\}.$$

Je nutné ukázat, že definovaná soustava je báze uniformity. Zřejmě $\Delta_Y \subset \tilde{E}$ z popisu cauchyovských filtrů v 5.62.2. Následující vlastnosti jsou jednoduchým pozorováním a dávají zbývající vlastnosti báze uniformity: $\widetilde{E_1 \cap E_2} \subset \tilde{E}_1 \cap \tilde{E}_2, \tilde{E} \circ \tilde{E} \subset E \circ E$ a $\tilde{E}$ is symetrická, je-li E symetrická.

Ještě potřebujeme zobrazení $e : X \rightarrow Y$, a to přiřazuje bodu x filtr jeho okolí. Z uvedených definic snadno plyne, že pro $\mathcal{F} \in Y$ konverguje $e(\mathcal{F})$ k bodu $\mathcal{F}$ v Y , protože $e(F) \subset \tilde{E}(\mathcal{F})$ pro každé $F \in \mathcal{F}$.

Věta 5.82. Zúplnění pomocí filtrů

1. (Y, ν) je uniformní Hausdorffův úplný prostor.
2. $e : X \rightarrow Y$ je projektivně vytvářející, $e : X \rightarrow e(X)$ je Hausdorffova modifikace prostoru X a $e(X)$ je hustý v Y .
3. Je-li X Hausdorffův, je (e, Y) zúplnění prostoru X .

Důkaz. 1. Prostor $(Y, \tilde{\mu})$ je Hausdorffův. Opravdu, jsou-li $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$, dva různé body v Y , pak podle Tvrzení 5.81.4 existují disjunktní množiny $F_i \in \mathcal{F}_i, i = 1, 2$. Dále existují $F'_i \in \mathcal{F}_i$ a $E \in \mu$, že $E(F'_i) \subset F_i$. Potom $(F'_1 \times F'_2) \cap E = \emptyset$ a tedy $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \notin \tilde{E}$.

Dokážeme, že (Y, ν) je úplný prostor. At $\mathbb{F}$ je minimální cauchyovský filtr na Y . Protože $\tilde{E}(\mathbb{F}) \cap e(X) \neq \emptyset$ pro každé $E \in \mu, \mathbb{F} \in \mathbb{F}$, je soustava $\{\tilde{E}(\mathbb{F}) \cap e(X); E \in \mu, \mathbb{F} \in \mathbb{F}\}$ cauchyovský filtr na X , označme ho $\mathcal{F}$. Navíc je z jeho popisu vidět, že $\mathcal{F}$ je minimální cauchyovský filtr. Protože $e(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{F}$ v Y , je $\mathcal{F} \in \bigcap \{(\overline{e(F)})^Y; F \in \mathcal{F}\} \subset \bigcap \{\tilde{E}(\mathbb{F}); E \in \mu, \mathbb{F} \in \mathbb{F}\}$, takže $\mathcal{F}$ je hromadným bodem $\mathbb{F}$.

2. Zřejmě platí $(e \times e)(E) = \tilde{E} \cap (e(X) \times e(X))$, takže $e : X \rightarrow e(X)$ je kvocient uniformních prostorů. Protože $e(X)$ je Hausdorffův a $e(x) = e(y)$, právě když filtry okolí x, y jsou totožné, je $e : X \rightarrow e(X)$ Hausdorffova modifikace X , takže je i projektivně vytvářející, a tedy má tuto vlastnost i $e : X \rightarrow Y$. Obraz $e(X)$ je hustý v Y , neboť pro každý minimální cauchyovský filtr $\mathcal{F}$ a každé $E \in \mu$ obsahuje $\tilde{E}(\mathcal{F}) \cap X$ množinu $F \in \mathcal{F}$, pro kterou je $F \times F \subset E$.

3. Toto tvrzení plyne z 1 a 2, protože $e : X \rightarrow Y$ je v tomto případě vnoření. $\square$

Předchozí části 1 a 2 se využívají pro vhodnou definici zúplnění libovolných uniformních prostorů X . Vezme se Hausdorffova modifikace $h : X \rightarrow hX$, zúplnění Y prostoru hX a definuje se $\gamma X = X \cup (Y \setminus hX)$. Uniformita na γX je projektivně vytvořená zobrazením $f : \gamma X \rightarrow Y$, které je totožné s h na X a je identické na $Y \setminus hX$. Pak γX je úplný prostor obsahující X jako hustý podprostor a každý bod z $\gamma X \setminus X$ lze T_2 -oddělit od každého bodu γX . Pro toto obecné zúplnění platí odpovídající modifikace tvrzení 5.70.

$\mathcal{Z}$ -filtry a $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry

Otázka je, zda se pro popis úplnění dají použít i maximální cauchyovské filtry, tj. cauchyovské ultrafiltry. Dají, ale tento popis má jednu nevýhodu: minimální cauchyovský filtr je obecně rozšiřován mnoha ultrafiltry a tyto ultrafiltry musíme ve výsledku ztotožnit, abychom dostali Hausdorffovo rozšíření. Průnik ultrafiltrů, které rozšiřují daný minimální cauchyovský filtr, se dá zajímavě popsat a potom můžeme popsat úplnění pomocí těchto průniků. K tomu budeme nyní směřovat.

Pro uniformní prostor X označíme $\mathcal{Z}(X)$ množinu funkcionálně uzavřených množin vzhledem k $U(X)$, ekvivalentně vzhledem k $U(X, [0, 1])$, tj. množinu $\{f^{-1}(0); f \in U(X, [0, 1])\}$. Protože součet i součin dvou omezených stejnoměrně spojitých funkcí je stejnoměrně spojitá funkce, podobně jako v 1.61 a v poznámce po 1.62) dostaneme, že $\mathcal{Z}(X)$ je množinový σ -okruh (σ vzhledem k průnikům). Víme, že $U(X, [0, 1]) = U(pX, [0, 1])$, takže $\mathcal{Z}(X) = \mathcal{Z}(pX)$.

Příklady 5.83. Příklady $\mathcal{Z}(X)$

1. V případě, že X je jemný, dostáváme funkcionálně uzavřené množiny v topologii prostoru X (viz 1.61). Pro úplně regulární prostor X budeme $\mathcal{Z}(X)$ chápat jako $\mathcal{Z}((X, \mu))$, kde μ je jemná uniformita na X .
2. Je-li (X, d) pseudometrický prostor, chápaný jako uniformní, je každá jeho uzavřená množina F funkcionálně uzavřená, protože $F = f^{-1}(0)$ pro $f(x) = d(x, F) \in U(X)$. Odtud vyplývá, že pseudometrizovatelný prostor má stejné funkcionálně uzavřené množiny jako jeho jemná modifikace, přestože mohou mít různé totálně omezené modifikace.
3. Je-li X lokálně kompaktní Hausdorffův nekompaktní prostor a μ jeho nejmenší uniformita, je

$$\mathcal{Z}(X) = \{Z \subset X; \text{buď je } Z \text{ kompaktní } G_\delta \text{ nebo } X \setminus Z = \bigcup C_n, C_n \text{ jsou kompaktní}\}.$$

Protože každá stejnoměrně spojitá omezená funkce na (X, μ) se dá stejnoměrně spojitě rozšířit na jednobodovou kompaktifikaci αX , jsou funkcionálně uzavřené množiny na X právě průniky s X funkcionálně uzavřených množin na αX . Na kompaktním Hausdorffově prostoru jsou funkcionálně uzavřenými množinami právě kompaktní G_δ množiny, což dá uvedený popis $\mathcal{Z}(X)$. $\square$

Soubor $\mathcal{F}$ množin v $\mathcal{Z}(X)$ se nazývá $\mathcal{Z}$ -filtr, jestliže neobsahuje $\emptyset$, je uzavřený na konečné průniky a s každým svým prvkem obsahuje i všechny větší funkcionálně uzavřené množiny v X . Každý $\mathcal{Z}$ -filtr tvoří bázi filtru v X a pro každý filtr $\mathcal{F}$ v X je $\mathcal{F} \cap \mathcal{Z}(X)$ $\mathcal{Z}$ -filtrem v X . Zopakujme, že uniformní prostor má bázi uniformních pokrytí složenou z jeho funkcionálně uzavřených množin a tedy každý cauchyovský filtr obsahuje cauchyovský filtr mající bázi složenou z funkcionálně uzavřených množin. Speciálně, každý minimální cauchyovský prostor má bázi složenou z funkcionálně uzavřených množin a můžeme ho chápat jako $\mathcal{Z}$ -filtr.

Maximální $\mathcal{Z}$ -filtr v X se nazývá $\mathcal{Z}$ -ultrafiltr. Pomocí Kuratowského-Zornova lemmatu se snadno dokáže, že každý $\mathcal{Z}$ -filtr je obsažen v nějakém $\mathcal{Z}$ -ultrafiltru. Podobně jednoduše jako pro ultrafiltry se ukáže, že $\mathcal{F}$ je $\mathcal{Z}$ -ultrafiltr, právě když $Z \in \mathcal{F}$ pokud $Z \in \mathcal{Z}(X)$, $Z \cap F \neq \emptyset$ pro každé $F \in \mathcal{F}$. Na rozdíl od ultrafiltrů ale neplatí, že $F_1 \in \mathcal{F}$ nebo $F_2 \in \mathcal{F}$, pokud $F_1, F_2 \in \mathcal{Z}(X)$, $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$ (viz následující příklad). Na diskretním prostoru s Čechovou uniformitou (nebo jemnější) jsou $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry totožné s ultrafiltry.

Je nutná opatrnost při práci s ultrafiltry a $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry. Je-li $\mathcal{A}$ ultrafiltr na X , pak $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z}(X)$ je sice $\mathcal{Z}$ -filtr, ale nemusí být $\mathcal{Z}$ -ultrafiltrem. Existují $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry, pro které je množina všech větších ultrafiltrů nekonečná (viz následující příklady).

Příklady 5.84. Ultrafiltry vs $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry

1. Nechť $\mathcal{A}$ je volný ultrafiltr na množině $[0, 1]$. Na této množině s obvyklou topologií pak $\mathcal{A}$ konverguje k nějakému bodu x , protože $[0, 1]$ je kompaktní. Filtr $\mathcal{A} \cap \mathcal{Z}([0, 1])$ neobsahuje bod x a tedy $\mathcal{Z}$ -filtr $\mathcal{F}$ všech uzavřených množin z $\mathcal{A}$ netvoří $\mathcal{Z}$ -ultrafiltr, protože ten musí obsahovat bod x . Nicméně, jestliže sjednocení dvou uzavřených množin náleží do $\mathcal{F}$, aspoň jedna z těchto množin do $\mathcal{F}$ musí náležet.
2. V prostoru ω_1 je množina $\mathcal{F}$ všech uzavřených množin obsahujících neomezený interval $\mathcal{Z}$ -ultrafiltrem. Každý ultrafiltr sestávající jen z neomezených podmnožin ω_1 rozšiřuje $\mathcal{F}$. Takových ultrafiltrů je nespočetně mnoho. $\square$

Jak bylo právě zmíněno, minimální cauchyovský filtr obecně má mnoho rozšíření na ultrafiltry. Vezmeme-li $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry, situace je zcela jiná.

Lemma 5.85. Cauchyovské $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry

Každý minimální cauchyovský $\mathcal{Z}$ -filtr na (X, μ) je obsažen v jediném $\mathcal{Z}$ -ultrafiltru.

Důkaz. Necht $\mathcal{F}_i, i = 1, 2$, jsou dva $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry obsahující minimální cauchyovský $\mathcal{Z}$ -filtr $\mathcal{F}$ na (X, μ) . Existují disjunktní prvky $F_i \in \mathcal{F}_i$. Existuje stejnoměrně spojitě zobrazení $f : X \rightarrow [0, 1]$ s hodnotou 0 na F_1 a s hodnotou 1 na F_2 . Obraz $f(\mathcal{F})$ je cauchyovský filtr na $[0, 1]$ a má tedy jedinou limitu x . Protože $\mathcal{F}_i$ rozšiřují $\mathcal{F}$, konvergují jejich f -obrazy rovněž k x , což je spor, protože $f(\mathcal{F}_1) \rightarrow 0, f(\mathcal{F}_2) \rightarrow 1$. $\square$

Můžeme tedy v popisu zúplnění nahradit minimální cauchyovské filtry cauchyovskými $\mathcal{Z}$ -ultrafiltry. Ať (X, μ) je uniformní prostor a (Y', ν') je uniformní prostor, kde Y' je množina všech cauchyovských $\mathcal{Z}$ -ultrafiltrů na (X, μ) a ν' má bázi $\{\tilde{E}; E \in \mu\}$, kde

$$\tilde{E} = \{(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2); \text{existují } F_i \in \mathcal{F}_i, E' \in \mu, \text{ že } E'(F_1) \times E'(F_2)) \subset E\}.$$

Definujeme $e' = \{x \rightsquigarrow \{Z \in \mathcal{Z}(X); x \in Z\}\} : X \rightarrow Y'$.

Věta 5.86. Zúplnění pomocí $\mathcal{Z}$ -ultrafiltrů

1. (Y', ν') je uniformní Hausdorffův úplný prostor.
2. $e' : X \rightarrow Y'$ je projektivně vytvářející, $e' : X \rightarrow e'(X)$ je Hausdorffova modifikace prostoru X a $e'(X)$ je hustý v Y' .
3. Je-li X Hausdorffův, je (e', Y') zúplnění prostoru X .

Důkaz. Označme $f : (Y, \nu) \rightarrow (Y', \nu')$ zobrazení přiřazující minimálnímu cauchyovskému filtru $\mathcal{F}$ na (X, μ) jediný $\mathcal{Z}$ -ultrafiltr $\mathcal{F}'$ obsahující $\mathcal{F}$. Podle definice ν a ν' je f uniformní homeomorfismus. Protože navíc $f' \circ e = e'$, vyplývá tvrzení z Věty 5.82. $\square$

Důsledek 5.87. Vztah úplných obalů

Ať $(X, \mu_i), i = 1, 2$, jsou Hausdorffovy uniformní prostory a $\mu_1 \supset \mu_2 \supset p\mu_1$.

1. Existuje prosté stejnoměrně spojitě zobrazení $\iota : \gamma(X, \mu_1) \rightarrow \gamma(X, \mu_2)$ rozšiřující identitu na X .
2. Topologicky je zobrazení ι vnořením.

Důkaz. Protože $\mathcal{Z}(X, \mu_i)$ jsou totožné množiny pro $i = 1, 2$ a identické zobrazení $(X, \mu_1) \rightarrow (X, \mu_2)$ je stejnoměrně spojitě, je jeho stejnoměrně spojitě rozšíření prosté. Tvrzení 2 plyne z Tvrzení 5.9 a 5.51.4, protože prostor $\gamma(X, \mu_1)$ a jeho ι -obraz mají stejná omezená stejnoměrně spojitá zobrazení, a tedy i stejná okolí bodů. $\square$

Příklady 5.88. Zúplnění diskretních prostorů

1. Je-li X diskretní prostor s Čechovou uniformitou, je $\gamma X = \beta X$. Čechova uniformita na X má za bázi všechna konečná disjunktní pokrytí X
2. Má-li uniformita μ na X za bázi všechny nejvýše spočetné rozklady, může být $\gamma(X, \mu) = X$ i nemusí. $\mathcal{Z}$ -ultrafiltr $\mathcal{X}$ (tj. ultrafiltr na X) je cauchyovský právě když platí:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{X} \Rightarrow \text{existuje } n, \text{ že } A_n \in \mathcal{X},$$

což je značně silnější vlastnost než podobná vlastnost pro konečná sjednocení charakterizující ultrafiltry. V kapitole 99 v části o reálně kompaktních prostorech ukážeme, že existence volného ultrafiltru s uvedenou silnější vlastností závisí na modelu teorii množin.

3. Nejhrubší uniformita na diskretním prostoru X má za bázi pokrytí $\{x_i\}_{i=1}^n \cup \{X \setminus \{x_1, \dots, x_n\}\}$, kde $\{x_1, \dots, x_n\} \subset X, n \in \mathbb{N}$. Její zúplnění je jednobodovou kompaktifikací X . $\square$

