

CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 2

URČITÝ INTEGRÁL

Spočtěte následující (Newtonovy) integrály.

- | | |
|---|---|
| <p>(1) $\int_0^\pi \sin^4 x \, dx$</p> <p>(2) $\int_0^2 1 - x \, dx$</p> <p>(3) $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x \, dx$</p> <p>(4) $\int_0^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x \, dx$</p> <p>(5) $\int_{1/e}^e \log x \, dx$</p> <p>(6) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$</p> <p>(7) $\int_0^\infty x^n e^{-x} \, dx$, kde $n \in \mathbb{N}$</p> <p>(8) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \alpha \cos x} \, dx$,
kde $\alpha \in [0, 1)$</p> <p>(9) $\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin x}{x^4 + \cos x} \, dx$</p> | <p>(10) $\int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2 x} \, dx$</p> <p>(11) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} \, dx$</p> <p>(12) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1} \, dx$</p> <p>(13) $\int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$, kde $a > 0$</p> <p>(14) $\int_0^1 \sqrt{1 + x^2} \, dx$</p> <p>(15) $\int_0^{5\pi} \frac{1}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} \, dx$</p> <p>(16) $\int_{-1}^1 \frac{x}{x^2 + x + 1} \, dx$</p> <p>(17) $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{\sqrt{\sin^2 x + 3 \sin x + 1}} \, dx$</p> |
|---|---|

- (18) Spočtěte $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \, dx$, jako důsledek dokažte nerovnost $\pi < \frac{22}{7}$. Bonus: drobnou úpravou funkce v integrálu ukažte, že dokonce platí $\frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260}$.
- (19) Spočtěte limitu $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}}$ pro $p > 1$ s využitím Riemannova integrálu.
- (20) Ukažte, že obecně neplatí $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) \, dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \, dx$, a to ani pokud jsou výrazy na obou stranách dobře definované a konečné.

VÝSLEDKY

- (1) $\frac{3\pi}{8}$
- (2) 1
- (3) 4π
- (4) $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (5) $2 - \frac{2}{e}$
- (6) $200\sqrt{2}$
- (7) $n!$
- (8) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-\alpha^2}}$
- (9) 0
- (10) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$
- (11) $\frac{\pi}{4}$
- (12) $2 - \frac{\pi}{2}$
- (13) $\frac{\pi a^2}{2}$
- (14) $\frac{\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)}{2}$
- (15) $\frac{5\pi\sqrt{2}}{2}$
- (16) $\frac{\log 3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$
- (17) $\sqrt{5} - 2 + 3 \log(5 - 2\sqrt{5}) + \frac{5}{2} \left(\frac{1}{5 - 2\sqrt{5}} - 1 \right)$
- (18) $\frac{22}{7} - \pi$, integrovaná funkce je spojitá a kladná na $(0, 1)$, proto je integrál kladný.
- (19) Limita je rovna $\int_0^1 x^p \, dx = \frac{1}{p+1}$.