MATEMATICKÁ ANALÝZA 2
POČETNÍ PŘÍKLADY NA PRIMITIVNÍ FUNKCI

ZE SBÍRKY LUBOŠE PICKA

5. Primitivní funkce

Příklad 5.1. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int (x+5)^3\,dx, \qquad \int \sin(2x+7)\,dx, \qquad \int \frac{(x+1)}{\sqrt{x}}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2-5x}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{2-3x^2}}, \qquad \int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx;$$

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx, \qquad \int \sqrt{1-\sin(2x)}\,dx, \qquad \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx;$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \qquad \int \frac{x}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\cos x}.$$

Příklad 5.2. Pomocí jednoduchých substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \sin(\log x)\,\frac{dx}{x}, \qquad \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}, \qquad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}};$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}\,dx, \qquad \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx, \qquad \int \frac{x+1}{x^2+2x+9}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x^2)}.$$

Příklad 5.3. Pomocí trigonometrických vzorců určete následující primitivní funkce:

$$\int \sin^2 x\,dx, \qquad \int \sin^3 x\,dx, \qquad \int \sin^4 x\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}, \qquad \int \frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x};$$

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x\cos x};$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\sin^3 x\cos^5 x}} \qquad \int \frac{\sin x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{2\sin x-\cos x+5}.$$

Příklad 5.4. Pomocí metody integrování per partes spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int e^x\sin x\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \log x\,dx;$$

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx, \qquad \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}, \qquad \int \operatorname{arctg}(\sqrt{x})\,dx.$$

Příklad 5.5. Pomocí metody integrování per partes odvoďte formule pro následující primitivní funkce:

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx, \qquad \int \arcsin x\,dx, \qquad \int \sin(\log x)\,dx.$$

Příklad 5.6. Pomocí vhodné substituce spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx, \qquad \int \frac{x^3}{x^8-2}\,dx, \qquad \int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos(2x)}};$$

$$\int \frac{x^2}{1+x}\,dx, \qquad \int \frac{x^2+1}{1+x^4}\,dx, \qquad \int \sqrt{\frac{\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{1+x^2}}\,dx.$$

Příklad 5.7. Procvičte si lepení primitivních funkcí na následujících příkladech:

$$\int |x|\, dx, \qquad \int e^{-|x|}\, dx, \qquad \int \max\{x, x^2\}\, dx;$$

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}; \qquad \int |2x+1|\, dx; \qquad \int (|1+x| - |1-x|)\, dx.$$

Příklad 5.8. Pomocí rozkladu na parciální zlomky spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\, dx, \qquad \int \frac{x}{x^2-x-2}\, dx, \qquad \int \frac{x^4}{x^4+5x^2+4};$$

$$\int \frac{x}{x^3-1}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{1+x^6}, \qquad \int \frac{x}{x^3-3x+2}\, dx.$$

Příklad 5.9. Spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^x+2}}\, dx, \qquad \int \sqrt{x^2-2x}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x+3}};$$

$$\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x}\, dx, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}, \qquad \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\, dx.$$

Příklad 5.10. Pomocí Eulerových substitucí spočtěte následující primitivní funkce:

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}, \qquad \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}};$$

$$\int \frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x-\sqrt{x^2+3x+2}}, \qquad \int \frac{x^2}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

Příklad 5.11. Na intervalu $(-\pi, \pi)$ nalezněte primitivní funkci

$$\int \frac{(\sin x)|\sin x| + (\cos x)^2}{(\sin x)^2 + 2(\cos x)^2}\, dx.$$

Příklad 5.12. Spočtěte primitivní funkci na intervalu $(0, \pi)$ k funkci

$$f(x) = \frac{1}{6\cos^2 x + 4\sin x \cos x + \sin^2 x}.$$

Příklad 5.13. Spočtěte primitivní funkci na maximálním možném intervalu k funkci

$$f(y) = \frac{1}{3\cos^2 y + \sin(2y) + 1}.$$

Příklad 5.14. Spočtěte primitivní funkci na maximálních intervalech, na kterých existuje, k funkci

$$\int \frac{e^{4x}+2e^{2x}}{e^{3x}-1}\, dx.$$

Výsledky.

- Příklad 5.11: Označme

$$I := \int \frac{(\sin x)|\sin x| + (\cos x)^2}{(\sin x)^2 + 2(\cos x)^2}\, dx.$$

Použijeme substituci $t = \operatorname{tg} x$, a to na intervalech $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2})$ a $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, pak po řadě vychází $t \in (-\infty, \infty)$, $t \in (0, \infty)$ a $t \in (-\infty, 0)$. Tedy

$$I = \begin{cases} \int \frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)}\, dt, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}),\ x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \int \frac{dt}{2+t^2} & x \in (0, \frac{\pi}{2}),\ x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Rozložíme první funkci na parciální zlomky a druhou spočítáme rovnou. U první funkce dostaneme rozklad

$$\frac{1-t^2}{(2+t^2)(1+t^2)} = \frac{At+B}{1+t^2} + \frac{Ct+D}{2+t^2},$$

uhodneme $A = C = 0$ a dopočítáme $B = 2$, $D = -3$. Celkem dostaneme

$$I = \begin{cases} 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_1, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ 2x - \frac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_2, & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_3, & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + C_4, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Nyní spočítáme jednu primitivní funkci na celém intervalu $(-\pi, \pi)$, řekněmě F_0. Nejprve zvolíme konstantu $C_2 = 0$ Konstanty C_1, C_3 a C_4 spočítáme z jednostranných limit funkce F_0 v bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0. Dostáváme

$$C_1 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, \qquad C_3 = 0, \qquad C_4 = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}.$$

V bodech $\pm\frac{\pi}{2}$ a 0 dodefinujeme funkci F_0 tak, aby byla spojitá. Celkem tedy máme

$$F_0(x) = \begin{cases} 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}, & x \in (-\pi, -\frac{\pi}{2}), \\ \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} - \pi, & x = -\frac{\pi}{2}, \\ 2x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right), & x \in (-\frac{\pi}{2}, 0), \\ 0, & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right), & x \in (0, \frac{\pi}{2}), \\ \frac{\sqrt{2}\pi}{4}, & x = \frac{\pi}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} x\right) + \frac{\pi\sqrt{2}}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \pi). \end{cases}$$

Všechny primitivní funkce na intervalu $(-\pi, \pi)$ jsou tedy tvaru

$$F(x) = F_0(x) + C, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

- Příklad 5.12: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(x) + C$, $x \in (0, \pi)$, kde (například)

$$F_0(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{2}\,(3 \operatorname{cotg} x + 1)\right)$$

nebo

$$F_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{tg} x + 2)\right), & x \in (0, \frac{\pi}{2}); \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} (\operatorname{tg} x + 2)\right) + \frac{\pi}{\sqrt{2}}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}); \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- Příklad 5.13: Všechny primitivní funkce jsou tvaru $F_0(y) + C$, $y \in (-\infty, \infty)$, kde (například)

$$F_0(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg} y + 1}{\sqrt{3}} + \frac{k\pi}{\sqrt{3}}\right), & y \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi); \\ \frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} + k\right), & y = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- Příklad 5.14:

$$\log|e^x - 1| - \frac{1}{2}\log\left(e^{2x} + e^x + 1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(e^x + \frac{1}{2}\right)\right), \qquad x \in (-\infty, 0) \quad \text{nebo} \quad x \in (0, \infty).$$