

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{3^n \sqrt{n}}, a \in \mathbb{R}$$

a) absolutní: na Cauchyho $\sum |a_n| = \sum \frac{|a|^n}{3^n \sqrt{n}}$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|a|}{3} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|a|}{3} < 1 \Leftrightarrow |a| < 3$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt[2n]{\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

Pak $\sum a_n$ KA

b) Je-li $\frac{|a|}{3} > 1$, $\sum a_n$ diverguje neboť (neúspěšná metoda, metoda ani pro neabsolutní)

Zbývá $3, -3$

$a = 3$: $\sum a_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ K z Leibnizova kritéria ($\frac{1}{\sqrt{n}}$ je klesající, kladný)

$$\sum |a_n| = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum n^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2} > -1, \text{ dle } p\text{-krytéria diverguje}$$

$\Rightarrow \sum a_n$ K neabsolutně

$$-3: \sum a_n = \sum \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ D (zákl. řada)}$$

$$\text{Začít: } (-\infty, -3] \text{ D}$$

$$(-3, 3) \text{ AK}$$

$$\{3\} \text{ K neabsolutně (NAK)}$$

$$(3, \infty) \text{ D}$$

Příklady: vyšetřete konvergence (AK moc složité)

ne K 4) $\sum_{n=1}^{\infty} (\cos 3n) (\sqrt{n} - 1)$

$$a_n = \cos 3n \text{ (nemá náleži na monotónii, ale má omezení č.s.)}$$

$$b_n = \sqrt{n} - 1, \lim b_n = \infty$$

$$\text{monotónie? } \sqrt{n} > 1 \geq \sqrt{n+1} - 1 \quad |^{n \cdot (n+1)}$$

$$n^{n+1} \geq (n+1)^n$$

$$n \geq \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \dots \text{platí } \forall n \geq 3$$

Tedy z Dirichletova kritéria

$$\sum (\cos 3n) (\sqrt{n} - 1) \text{ K}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(1 + \frac{1}{n})^n}{\sqrt{n}}$$

dvoukrokově:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ K z Leibnizova kritéria}$$

$$2) a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \text{ víme že } \sum a_n \text{ K z 1. kroku}$$

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \text{ monotónní (odhad z e), omezené (e)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Abel} \\ \Rightarrow \end{array} \right\} \sum a_n \cdot b_n \text{ K}$$

$$6) \sum (-1)^n \frac{n \cdot \sin n}{n^{2+1}}$$

Trick
S. pozit.
repetuj

$$(-1)^n \cdot \sin n = \cos \pi n \cdot \sin n = \cos(\pi n) \cdot \sin n = \sin((\pi+1)n)$$

$$\sum a_n = \sum \sin((\pi+1)n) \cdot \frac{n}{n^{2+1}}$$

$0 \leq n$ $a_n = \sin((\pi+1)n)$, pro $\sum a_n$ ma'om. častice'ne součty

$$\beta_n = \frac{n}{n^{2+1}}, \lim \beta_n = 0, \text{ klesající: } \frac{1}{n^{2+1}}, n+1 \text{ roste } \Rightarrow \frac{1}{n^{2+1}} \text{ klesá}$$

$$4) \sum \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log(\log n)} \quad K \text{ neabsolutně} \quad (10) \sum \frac{\sin n}{\log^2 n + n}$$

$$n+\frac{1}{n} \leq n+1 \leq (n+1) + \frac{1}{n}$$

$$\sin(n+\frac{1}{n}) = \sin n \cos \frac{1}{n} + \sin \frac{1}{n} \cos n, n \in \mathbb{N}$$

$$\sum \frac{\sin n}{\log(\log n)} \cos \frac{1}{n} \text{ konverguje, protože}$$

$\{ \cos \frac{1}{n} \}$ je omezená a neklesající

$\sum \frac{\sin n}{\log(\log n)} \in K$, protože $\sum \sin n$ ma' omezené častice'ne součty a Dirichlet $\Rightarrow K$

$$\frac{1}{\log(\log n)} \rightarrow 0 \text{ (monotónně)} \Rightarrow$$

$$\sum \sin \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos n}{\log(\log n)} \text{ konverguje, protože}$$

$\{ \sin \frac{1}{n} \}$ omezená, klesající

$\sum \frac{\cos n}{\log(\log n)}$ konverguje protože $\sum \cos n$ ma' omezené č. s. Dir $\Rightarrow K$

$$\frac{1}{\log(\log n)} \rightarrow 0$$

$$\text{Tedy } \sum \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log(\log n)} \stackrel{\text{2 konvergence tech 2}}{=} \sum \frac{\sin n}{\log(\log n)} \cos \frac{1}{n} + \sum \sin \frac{1}{n} \cdot \frac{\cos n}{\log(\log n)} \quad K \quad K \quad \text{Konverguje}$$

Neabsolutní konvergence

$$\left| \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log(\log n)} \right| \geq \frac{\sin^2(n+\frac{1}{n})}{\log(\log n)} = \frac{1 - \cos 2(n+\frac{1}{n})}{2 \log(\log n)} = \frac{1}{2 \log(\log n)} - \frac{\cos(2n+\frac{2}{n})}{2 \log \log n}$$

$$\sum \frac{1}{2 \log(\log n)} \quad D: \quad \frac{1}{2 \log \log n} = \frac{n}{2 \log n} \geq \frac{n}{\log n} \rightarrow \infty \text{ a } \sum \frac{1}{2 \log \log n} \quad D \stackrel{LSK}{\Rightarrow} \sum \frac{1}{2 \log \log n} \quad D$$

$$\sum \frac{\cos(2n+\frac{2}{n})}{\log(\log n)} \text{ konverguje - podobně jako výše}$$

$$\text{Minule: } \sum a_n \quad D, \sum b_n \quad K \Rightarrow \sum a_n - b_n \quad D, \text{ tedy } \sum \frac{\sin^2(n+\frac{1}{n})}{\log(\log n)} \quad D, \text{ tedy } \sum \frac{|\sin(n+\frac{1}{n})|}{\log(\log n)}$$

$$\text{Závěr: } \sum \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log(\log n)} \text{ konverguje neabsolutně}$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{10 \sin n + n}$$

$$\text{Resent: } \left| \frac{\sin n}{n+10 \sin n} - \frac{\sin n}{n} \right| = \left| \frac{-10 (\sin n)^2}{n(n+10 \sin n)} \right| \leq \frac{10}{n(n-10)}$$

$$\sum \frac{10}{n(n-10)} \ll (\text{stuvnani's } \frac{1}{n^2}) \Rightarrow \sum \left| \frac{\sin n}{n+10 \sin n} - \frac{\sin n}{n} \right| \ll \text{zastuvnava'ho kriteria}$$

$$\sum \frac{\sin n}{n+10 \sin n} = \sum \frac{\sin n}{n+10 \sin n} - \frac{\sin n}{n} + \frac{\sin n}{n} = \sum \frac{-10 (\sin n)^2}{n(n+10 \sin n)} + \sum \frac{\sin n}{n}$$

arithmetic
kvadr. KA $\Rightarrow$ K.

K poala Dirichle
(kolitabi/sme)

Tey rada konverguy'e