CVIČENÍ Z MATEMATICKÉ ANALÝZY 2

Taylorův polynom

1. Nalezněte Taylorův polynom třetího řádu (není-li určeno jinak) pro danou funkci v daném bodě.

(1) $x \log x$ v bodě 1
(2) $\sin x$ v bodě $\frac{\pi}{2}$
(3) $\sqrt{x}$ v bodě 1
(4) $\frac{1}{x}$ v bodě 1
(5) $\cos \frac{x\pi}{2}$ řádu 9 v bodě 1
(6) $\frac{1-x}{1+x}$ řádu 7 v bodě 0

2. Nalezněte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce:

(7) $\exp(2x - x^2)$, $k = 3$
(8) $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$, $k = 2$
(9) $\tan x$, $k = 4$
(10) $\sqrt{1 - 2x + x^2} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2}$, $k = 3$
(11) $\frac{1}{3-2x}$, $k = 100$
(12) $\log(\cos x)$, $k = 6$
(13) $\cos(\sin x)$, $k = 5$
(14) $\sin(\sin x)$, $k = 6$
(15) $\sin(1 - \cos x)$, $k = 3$
(16) $\frac{x}{1-e^x}$, $k = 4$

3. Spočtěte limity pomocí Taylorových polynomů:

(17) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4}$
(18) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$
(19) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$
(20) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right)$
(21) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2}$ $(a > 0)$
(22) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(x - x^2 \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$
(23) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$
(24) $\lim\limits_{x\to \infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$
(25) $\lim\limits_{x\to \infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1}\right)$

4. U následujících příkladů nalezněte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby limita byla konečná a nenulová.

(26) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^n}$
(27) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^n}$
(28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(\tan x)}{x^n}$
(29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$

(30) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0.$

(31) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - a\sin x - b\tan x}{x^4} = 0$

a spočtěte $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - a\sin x - b\tan x}{x^5}$.

5. Jaký musí být řád Taylorova polynomu funkce exp, abychom si byli jisti, že $T_n^{\exp,0}(x)$ aproximuje $\exp(x)$ s chybou menší než $0,001$ pro každé $x \in (0, 1)$? (32)

6. Nalezněte racionální odhady uvedených čísel s předepsanou přesností:

(33) $\sqrt{e}, \quad 10^{-2}$

(34) $\sqrt{5}, \quad 10^{-3}$

(35) $e, \quad 10^{-3}$

Výsledky

(1) $x\log x, \quad 1: \quad x - 1 + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{6}(x-1)^3$

(2) $\sin x, \quad \frac{\pi}{2}: \quad 1 - \frac{1}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2$

(3) $\sqrt{x}, \quad 1: \quad 1 + \frac{1}{2}(x-1) - \frac{1}{8}(x-1)^2 + \frac{3}{8\cdot 3!}(x-1)^3$

(4) $\frac{1}{x}, \quad 1: \quad 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3$

(5) $\cos\frac{x\pi}{2}, \quad 1: \quad -\frac{\pi}{2}(x-1) + \frac{(\pi/2)^3}{3!}(x-1)^3 - \frac{(\pi/2)^5}{5!}(x-1)^5 + \frac{(\pi/2)^7}{7!}(x-1)^7 - \frac{(\pi/2)^9}{9!}(x-1)^9$

(6) $\frac{1-x}{1+x}, \quad 0: \quad 1 - 2x + 2x^2 - 2x^3 + 2x^4 - 2x^5 + 2x^6 - 2x^7$

(7) $\exp(2x - x^2),\ k = 3: \quad 1 + 2x + x^2 + -\frac{2}{3}x^3$

(8) $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}},\ k = 2: \quad 1 + 60x + 1950x^2$

(9) $\tan x,\ k = 4: \quad x + \frac{1}{3}x^3$

(10) $\sqrt{1 - 2x + x^2} - \sqrt[3]{1 - 3x + x^2},\ k = 3: \quad \frac{1}{6}x^2 + x^3$

(11) $\frac{1}{3-2x},\ k = 100: \quad \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n x^n$

(12) $\log(\cos x),\ k = 6: \quad -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45}$

(13) $\cos(\sin x),\ k = 5: \quad 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$

(14) $\sin(\sin x),\ k = 6: \quad x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$

(15) $\sin(1 - \cos x),\ k = 3: \quad \frac{1}{2}x^2$

(16) $\frac{x}{1-e^x},\ k = 4: \quad 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4$

(17) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{\frac{-x^2}{2}}}{x^4} = -\dfrac{1}{12}$

(18) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x\sin x - x(1+x)}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

(19) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right) = 0$

(20) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{\cos x}{\sin x}\right) = \dfrac{1}{3}$

(21) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x + a^{-x} - 2}{x^2} = \log^2(a) \quad (a > 0)$

(22) $\lim_{x\to\infty} \left(x - x^2\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \dfrac{1}{2}$

(23) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right) = \dfrac{1}{3}$

(24) $\lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right) = -\dfrac{1}{4}$

(25) $\lim_{x\to\infty} \left((x^3 - x^2 + \frac{x}{2})e^{1/x} - \sqrt{x^6 + 1}\right) = \dfrac{1}{6}$

(26) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(\sin x) - \sin(\tan x)}{x^7} = \dfrac{1}{30}$

(27) $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^x - 1}{x^2} = 1$

(28) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(\tan x)}{x^4} = \dfrac{1}{3}$

(29) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^1} = \dfrac{e}{2}$

(30) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - (a + b\cos x)\sin x}{x^4} = 0$. $\quad a = \frac{4}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$.

(31) Najděte $a, b \in \mathbb{R}$, aby $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - a\sin x - b\tan x}{x^4} = 0$ a spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - a\sin x - b\tan x}{x^5}$.
$a = \frac{2}{3}$, $b = \frac{1}{3}$, zadaná limita je rovna $-\frac{1}{20}$