

Cvičení 13

Téma: Stokesova věta
Mocninné řady

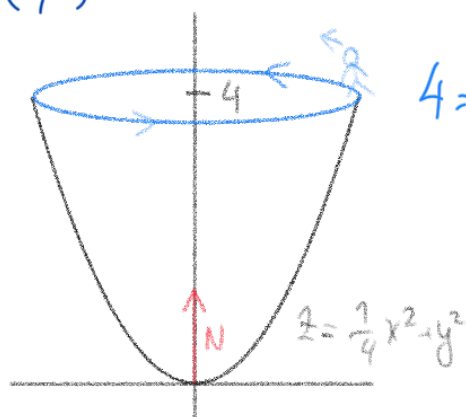
- Rotace vektorového pole $F = (F_1, F_2, F_3)$

$$\text{curl } F = \nabla \times F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right).$$

- Plocha S a její okraj C jsou souhlasně orientovány, pokud máme plochu S stále po levé ruce, procházíme-li C a hlava máme ve směru normály plochy S .

- 1) Spočítejte tok vektorového pole $\nabla \times (6yz, 5x, yze^{x^2})$ části paraboloidu $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ splňující $0 \leq z \leq 4$ orientovanou normálovým polem s nezápornou třetí komponentou.

Řešení: $\int_{(S, N)} \nabla \times (6yz, 5x, yze^{x^2}) \cdot d\sigma \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{(C, \tau)} (6yz, 5x, yze^{x^2}) \cdot d\mathbf{s} = \star$



$$4 = \frac{1}{4}x^2 + y^2 \quad \text{parametrizace elipsy}$$

$$x = 4 \cos t$$

$$y = 2 \sin t$$

$$z = 4$$

$$\varphi(t) = (4 \cos t, 2 \sin t, 4), t \in [0, 2\pi]$$

$$\varphi'(t) = (-4 \sin t, 2 \cos t, 0)$$

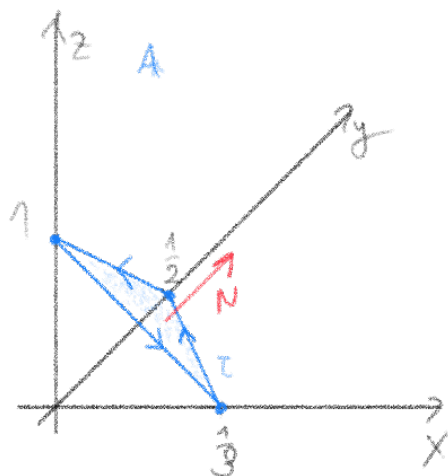
$$\begin{aligned} \star &= \int_0^{2\pi} (6 \cdot 2 \sin t \cdot 4, 5 \cdot 4 \cos t, 2 \sin t \cdot 4 \cdot e^{16 \cos^2 t}) \cdot (-4 \sin t, 2 \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-48 \cdot 4 \sin^2 t + 40 \cos^2 t) dt = -192\pi + 40\pi = \underline{-152\pi} \end{aligned}$$

- 2) Pomocí Stokesovy věty spočítejte křivkový integrál z vektorového pole $(1, x+yz, xy-\sqrt{z})$ přes okraj části roviny $3x+2y+z=1$ nacházející se v prvním oktantu, který je orientován proti směru hodinových ručiček, dáváme-li se na něj shora.

Řešení

$$\int_{(C, \vec{v})} (1, x+yz, xy-\sqrt{z}) \cdot d\vec{s} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{(S, N)} \nabla \times (1, x+yz, xy-\sqrt{z}) \cdot d\vec{G}$$

$$= \int_{(S, N)} (x-y, 0-y, 1-0) \cdot d\vec{G} = \odot$$



parametrizace trojúhelníku

$$\begin{aligned} \Phi(u,v) &= \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right) + u \left(\left(0, \frac{1}{2}, 0\right) - \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)\right) \\ &\quad + v \left(\left(0, 0, 1\right) - \left(\frac{1}{3}, 0, 0\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{3} - \frac{u}{3} - \frac{v}{3}, \frac{u}{2}, v\right), \quad u \in [0,1], v \in [0, 1-u]. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \text{orientace } NV$$

$$\begin{aligned} \odot &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \left(\frac{1}{3} - \frac{u}{3} - \frac{v}{3} - \frac{u}{2} - \frac{u}{2}, 1\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right) dv du = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \left(\frac{1}{6} - \frac{u}{6} - \frac{v}{6} - \frac{u}{4} - \frac{u}{6} + \frac{1}{6}\right) dv du = \int_0^1 \int_0^{1-u} \left(\frac{1}{3} - \frac{7u}{12} - \frac{v}{6}\right) dv du \\ &= \int_0^1 \left[\frac{v}{3} - \frac{7uv}{12} - \frac{v^2}{12}\right]_0^{1-u} du = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} - \frac{u}{3} - \frac{7u}{12} + \frac{7u^2}{12} - \frac{1}{12} + \frac{u}{6} - \frac{u^2}{12}\right) du \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}u + \frac{1}{2}u^2\right) du = \left[\frac{u}{4} - \frac{3u^2}{8} + \frac{u^3}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{6} = \frac{6-9+4}{24} = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

3) Určete poloměr konvergence mocniné řady $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-4)^m m}{m+1} x^{2m}$.

Pozorování: $x^{2m} = (x-0)^{2m} \Rightarrow 0$ je střed konvergence

Řešení

Označme $a_m = \frac{(-4)^m m}{m+1}$.

Poloměr konvergence $R = \sup \left\{ r \geq 0, \sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \cdot r^m < \infty \right\}$

Zde tedy zkoumáme konverenci $\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| r^{2m}$.

Použijeme odmocninové kritérium (šlo by i podle 'ove')

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-4)^n n}{n+1} \right| r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n n}{n+1} r^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 \cdot \sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot r^2 \stackrel{AL}{=} 4r^2$$

$$4r^2 \begin{cases} < 1 \text{ pro } r < \frac{1}{2} \dots \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n} \text{ konverguje} \\ = 1 \text{ pro } r = \frac{1}{2} \dots \text{nevíme} \\ > 1 \text{ pro } r > \frac{1}{2} \dots \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^{2n} \text{ diverguje} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{1}{2}. \quad (\text{pro } x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ konv.})$$

4) Vyšetřete konvergenci a určete součet mocninové řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} (x-2)^n.$$

Pozorování: $x_0 = 2$ je střed

Řešení

• poloměr konvergence

$$\text{označme } a_n = \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!}$$

zkoumáme konvergenci: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$: použijeme ^{$n, n!$ a hod!} podílové kritérium

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1} (2+n)}{3^{n+1} (n+1)!} \right| r^{n+1}}{\left| \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} \right| r^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2+n}{3 \cdot 3^n \cdot (n+1)!} r^{n+1}}{\frac{1+n}{3^n n!} r^n} = \frac{r}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+n}{n^2 + 2n + 1} = 0 < 1 \quad \forall r \in [0, \infty).$$

$\Rightarrow R = \infty$, původní řada konverguje $\forall x \in \mathbb{R}$.

• součet

díky stejnoměrné konvergenci

neřešíme konstantu, budeme derivovat

$$\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} (x-2)^n dx \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} \int (x-2)^n dx \stackrel{\downarrow}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} \frac{(x-2)^{n+1}}{n+1}$$

$$= (x-2) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{-1 \cdot (x-2)}{3} \right)^n}{n!} = (x-2) \cdot e^{-\frac{x-2}{3}} \quad | x \in \mathbb{R} \quad (\text{obor konvergence se při derivaci dělá})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} (x-2)^n = \left(\int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} (x-2)^n dx \right)' = \left((x-2) \cdot e^{-\frac{x-2}{3}} \right)'$$

$$= e^{-\frac{x-2}{3}} + (x-2) \cdot e^{-\frac{x-2}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3} \right) = \underline{e^{-\frac{x-2}{3}} \left(1 - \frac{x-2}{3} \right)}, x \in \mathbb{R}.$$

5) Vyšetřete konvergenci a určete součet mocninové řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1}.$$

• poloměr konvergence

$$\text{označme } a_n = \frac{1}{2^n (n+1)}. \text{ Pak } a_n = |a_n|.$$

Zkoumáme tedy konvergenci $\sum |a_n| r^{n+1} = \sum a_n r^{n+1}$. Použijeme podílové kr.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2 \cdot 2^n (n+2)} \cdot r^{n+2}}{\frac{1}{2^n (n+1)} r^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r}{2} \cdot \frac{n+1}{n+2} \stackrel{AL}{=} \frac{r}{2} \begin{cases} < 1 \text{ pro } r < 2 \Rightarrow \sum a_n r^{n+1} K \\ = 1 \text{ pro } r = 2 \\ > 1 \text{ pro } r > 2 \Rightarrow \sum a_n r^{n+1} D \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = 2$$

- rozbor konvergence: $\sum a_n x^{n+1}$
 - konverguje absolutně pro $x \in (-2, 2)$
 - diverguje pro $x \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty)$

Pro ověření: pro $x=2$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot 2}{2^n (n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ Diverguje

pro $x=-2$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{2^n (n+1)}$ Konverguje & Leibnizova kritéria
 $\downarrow$ monotónně

• součet

$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1} \right)' \stackrel{\text{díky stejnoměrné konvergenci na } [-2+\epsilon, 2-\epsilon]}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) x^n}{2^n (n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2} \right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{2-x} - 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1} = \int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1} \right)' dx = \int \left(\frac{2}{2-x} - 1 \right) dx =$$

$$= -2 \ln |2-x| - x + C, C \in \mathbb{R}$$

Najdeme C , aby součet seděl v $x_0=0$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} 0^{n+1} = 0$

Tedy $0 = -2 \ln |2-0| - 0 + C = -2 \ln 2 + C \Rightarrow 2 \ln 2 = C, \ln 4 = C$.

Závěr: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1} = \underline{-2 \ln(2-x) - x + \ln 4, x \in (-2, 2)}$
 $\hookrightarrow$ díky intervalu

6) Rozviňte do řady se středem $x_0 = -3$ funkci $f(x) = 3^x$

Řešení!

(chceme $(x - (-3)) = (x+3)$.)

funguje pro $(x+3) \ln 3 \in \mathbb{R} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 3^x = e^{x \ln 3} = e^{(x+3) \ln 3 - 3 \ln 3} = e^{-3 \ln 3} \cdot e^{(x+3) \ln 3} = 3^{-3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+3)^n \ln 3}{n!}, x \in \mathbb{R}$$

7) Rozviňte do řady se středem $x_0 = 1$ funkci $f(x) = \frac{1}{2x-5}$.

Řešení: Chceme $(x-1)$.

funguje pro $\left| \frac{2(x-1)}{3} \right| < 1$

$$f(x) = \frac{1}{2x-5} = \frac{1}{2(x-1)-5+2} = \frac{1}{-3+2(x-1)} = \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2(x-1)}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2(x-1)}{3} \right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n (x-1)^n}{3^{n+1}}$$

$$\left| \frac{2(x-1)}{3} \right| < 1 \Rightarrow |x-1| < \frac{3}{2} \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Poznámky k dalším příkladům

• výrazy lze podle potřeby upravovat

$$\sum \frac{1}{(n+1)} \cdot x^{n+2} = x \cdot \sum \frac{x^{n+1}}{n+1} \text{ a derivovat (a integrovat) jen část } \sum \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

• $\frac{1}{(x+1)^2} = -\left(\frac{1}{x+1}\right)'$... můžeme rozvinout nejprve $\frac{1}{x+1}$ a poté zderivovat na kýženou funkci