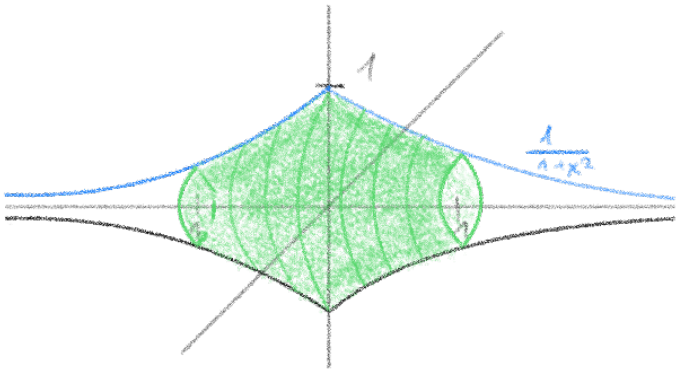
Cvičení 12

Téma: Plošný integrál, Gaussova věta

1) Parametrizujte plochu vzniklou rotací grafu funkce $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $x \in [-1, 1]$, kolem osy x.

Řešení



Použijeme válcové souřadnice s rotací kolem osy x a s fixním poloměrem $r = \frac{1}{1+x^2}$ pro každé x.

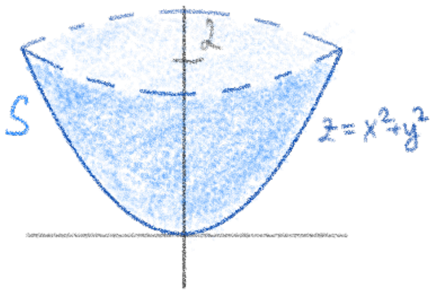
$$x = x$$
$$y = \frac{1}{1+x^2}\cos\varphi$$
$$z = \frac{1}{1+x^2}\sin\varphi$$

Parametrizace: $\Phi(u, v) = \left(u, \frac{1}{1+u^2}\cos v, \frac{1}{1+u^2}\sin v\right)$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$

(po formálním převodu do proměnných u, v)

2) Vypočtěte obsah části paraboloidu $z = x^2 + y^2$ ležící pod rovinou $z = 2$.

Řešení



Parametrizujeme plochu pomocí válcových souřadnic kolem osy z s fixním poloměrem $r = \sqrt{z}$ pro každé z.

↳ neboť $r^2 = x^2 + y^2 = z$

$$x = \sqrt{z}\cdot\cos\varphi$$
$$y = \sqrt{z}\,\sin\varphi$$
$$z = z$$

! pokud můžeme, vyhneme se odmocninám !: vezměme $u = \sqrt{z}$, $v = \varphi$

$$\Phi(u, v) = (u\cos v, u\sin v, u^2), \quad u \in [0, \sqrt{2}], \; v \in [0, 2\pi]$$

Pak z definice plošného integrálu

$$\int_S \underbrace{1 \, d\sigma}_{\text{obsah plochy}} = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} 1 \cdot \Big\| \underbrace{\frac{\partial\Phi}{\partial u} \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}}_{\text{normála}} \Big\| \, dv\,du = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \left\| (\cos v, \sin v, 2u) \times (-u\sin v, u\cos v, 0) \right\| dv\,du$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \Big\| \big(-2u^2\cos v, -2u^2\sin v, \underbrace{u\cos^2 v + u\sin^2 v}_{u}\big) \Big\| \, dv\,du =$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sqrt{4u^4\cos^2 v + 4u^4\sin^2 v + u^2} \, dv\,du = \int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi} \sqrt{4u^4 + u^2} \, dv\,du =$$

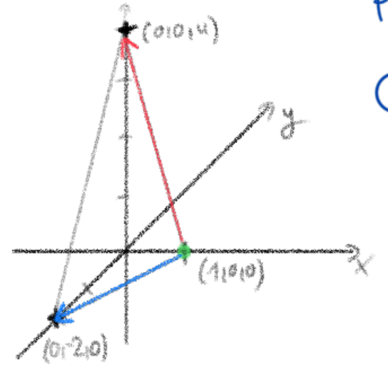
$u = |u|$ na $[0, \sqrt{2}]$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{2}} u\sqrt{4u^2+1}\, du = \begin{bmatrix} 4u^2+1 = t \\ 8u\,du = dt \\ \begin{array}{c|c|c} u & 0 & \sqrt{2} \\ \hline t & 1 & 9 \end{array} \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{8} \int_1^9 \sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}\left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^9 =$$

$$= \frac{\pi}{6}(27-1) = \underline{\frac{13}{3}\pi}.$$ Obsach plochy je $\frac{13}{3}\pi$.

3) Spočtěte plošný integrál $\int_S x\, d\sigma$, kde S je trojúhelník s vrcholy $(1,0,0)$, $(0,-2,0)$ a $(0,0,4)$.

Řešení



Parametrizace trojúhelníku

$$\phi(u,v) = (1,0,0) + u\big((0,-2,0)-(1,0,0)\big) + v\big((0,0,4)-(1,0,0)\big)$$
$$= (1-u-v,\ -2u,\ 4v),\ u\in[0,1],\ v\in[0,1-u]$$

Konvexní kombinace: mějme body A,B,C a koeficienty $a,b,c\in[0,1]$ takové, že $a+b+c=1$. Pak $a\cdot A + b\cdot B + c\cdot C$ je konvexní kombinace bodů A,B,C. V $\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$, se jedná o trojúhelník.

koeficienty u nás:

$(1-u-v)+(u)+(v) = 1$ ✓ $\boxed{0\leq u\leq 1}$, $0\leq v\leq 1$, $0\leq 1-u-v\leq 1$

$\boxed{v\leq 1-u}$ $\quad -u\leq v$ ✓

$$\int_S x\, d\sigma = \int_0^1\int_0^{1-u} (1-u-v)\cdot \|(-1,-2,0)\times(-1,0,4)\|\, dv\, du =$$

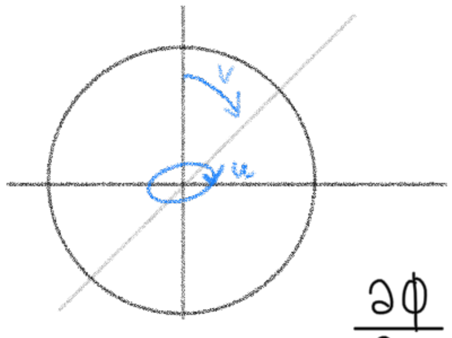
$$= \int_0^1\int_0^{1-u} (1-u-v)\cdot\|(-8,4,-2)\|\, dv\, du = \sqrt{84}\int_0^1 \left[v - uv - \frac{v^2}{2}\right]_0^{1-u} du$$

$$= 2\sqrt{21}\int_0^1 \left(1-u-u(1-u) - \frac{(1-u)^2}{2}\right) du = 2\sqrt{21}\int_0^1 \left(1-u-u+u^2-\frac{1}{2}+u-\frac{u^2}{2}\right) du$$

$$= 2\sqrt{21}\int_0^1\left(\frac{1}{2}-u+\frac{u^2}{2}\right)du = 2\sqrt{21}\left[\frac{u}{2}-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{6}\right]_0^1 = 2\sqrt{21}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{21}}{3} = \underline{\sqrt{\frac{7}{3}}}.$$

Sféra $S(0,r)$, kde r je fixní poloměr $\quad \overset{\parallel}{(s_1,s_2,s_3)}$



Sférické souřadnice

$$\phi(u,v) = (\overset{+s_1}{r \cdot \cos u \sin v}, \overset{+s_2}{r \cdot \sin u \sin v}, \overset{+s_3}{r \cos v})$$

$$u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \pi]$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} = (-r \sin u \sin v, r \cos u \sin v, 0) \times$$

$$\times (r \cos u \cos v, r \sin u \cos v, -r \sin v)$$

$$= (-r^2 \sin^2 v \cos u, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin^2 u \sin v \cos v - r^2 \cos^2 u \sin v \cos v)$$

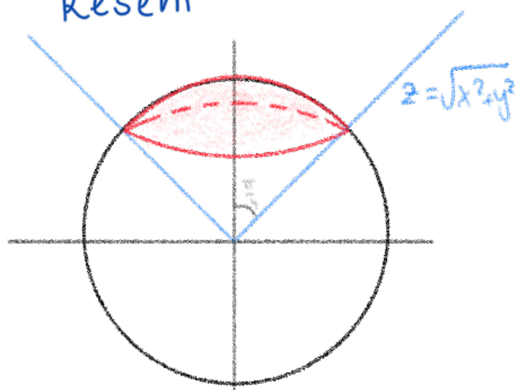
$$= (-r^2 \sin^2 v \cos u, -r^2 \sin u \sin^2 v, -r^2 \sin v \cos v) \quad \leq 0 \text{ pro } v \in [0, \tfrac{\pi}{2}]$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| = \sqrt{r^4 \sin^4 v \cos^2 u + r^4 \sin^2 u \sin^4 v + r^4 \sin^2 v \cos^2 v} =$$

$$= \sqrt{r^4 \sin^4 v + r^4 \sin^2 v \cos^2 v} = \sqrt{r^4 \sin^2 v} = r^2 \sin v$$

4) Spočtěte plošný integrál $\int_S y^2 \, d\sigma$, kde S je část sféry $x^2+y^2+z^2=1$ nad kuželem $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Řešení



Parametrizace

$$\phi(u,v) = (\cos u \sin v, \sin u \sin v, \cos v)$$

$$u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, \tfrac{\pi}{4}] \qquad z = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r \quad 45°$$

$$\left\| \frac{\partial \phi}{\partial u} \times \frac{\partial \phi}{\partial v} \right\| = \sin v$$

$$\int_S y^2 \, d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 u \cdot \sin^2 v \cdot \sin v \, dv \, du = \int_0^{2\pi} \sin^2 u \, du \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 v \, dv =$$

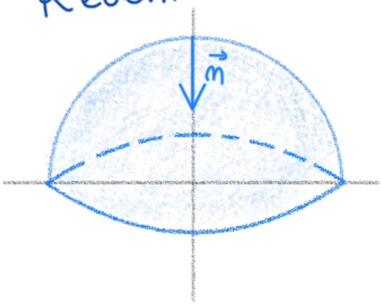
$$= \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin v \,(1 - \cos^2 v)\, dv = \left[\begin{array}{l} \text{cos prostý} \\ \cos v = t \\ -\sin v \, dv = dt \\ \begin{array}{c|c|c} v & 0 & \frac{\pi}{4} \\ \hline t & 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \end{array} \right] = \pi\,(-1) \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (1-t^2)\, dt = \pi \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} (1-t^2)\, dt =$$

$$= \pi \left[t - \frac{t^3}{3} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} = \pi \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{24} \right) = \underline{\pi \left(\frac{2}{3} - \frac{5\sqrt{2}}{12} \right)}$$

5) Spočtěte plošný integrál z vektorového pole $(y, -x, 2z)$

přes plochu $S = \{(x,y,z),\ x^2+y^2+z^2=4,\ z\geq 0\}$ orientovanou normálovým vektorem s nekladnou třetí komponentou.

Řešení



Parametrizace

$$\phi(u,v) = (2\cos u \sin v, 2\sin u \sin v, 2\cos v)$$

$$u\in[0,2\pi],\ v\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v} = (-4\sin^2 v\cos u, -4\sin u\sin^2 v, \underbrace{-4\sin v\cos v}_{\leq 0 \text{ správná orientace}})$$

$$\int_{(S,n)} (y,-x,2x)\cdot d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin u\sin v, -2\cos u\sin v, 4\cos v)\cdot\left(\frac{\partial\phi}{\partial u}\times\frac{\partial\phi}{\partial v}\right) dv\, du =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-8\sin^3 v\sin u\cos u + 8\sin^3 v\sin u\cos u - 16\sin v\cos^2 v\right) dv\, du =$$

$$= -16\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin v\cos^2 v\, dv\, du = -16\cdot 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin v\cos^2 v\, dv = \left[\begin{array}{c} \cos v = t \\ -\sin v = dt \\ \begin{array}{c|c|c} v & 0 & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 1 & 0 \end{array}\end{array}\right] =$$

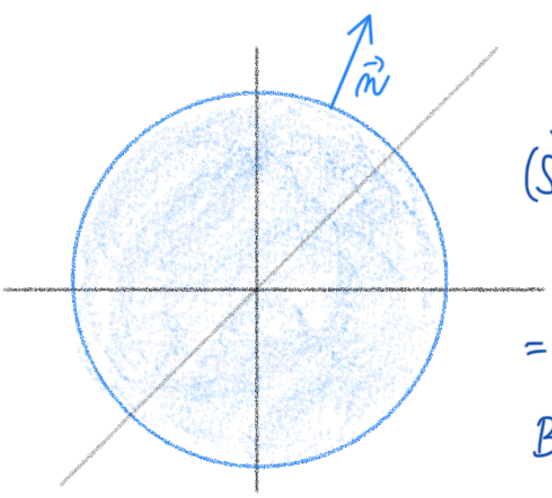
$$= -32\pi(-1)\int_1^0 t^2\, dt = -32\pi\int_0^1 t^2\, dt = -32\pi\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \underline{-\frac{32}{3}\pi.}$$

Divergence vektorového pole $F = (F_1, F_2, F_3)$

$$\operatorname{div} F = \nabla\cdot F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

6) Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $(4x, y, 4z)$ přes sféru $x^2+y^2+z^2=4$ orientovanou vnějším normálovým vektorem.

Řešení



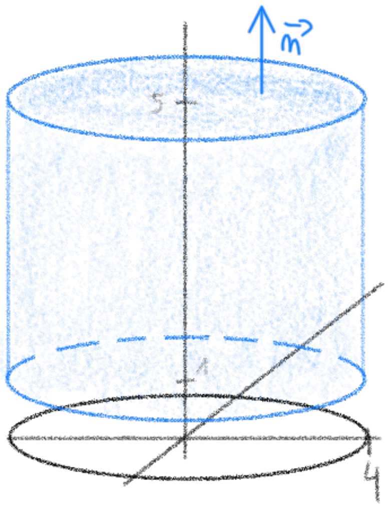
orientace je správně vnější

$$\int_{(S(0,2),n)} (4x, y, 4z)\cdot d\sigma \overset{\text{Gauss}}{=\!=} \int_{B(0,2)} \operatorname{div}(4x, y, 4z)\, d\lambda^3 =$$

$$= \int_{B(0,2)} (4+1+4)\, d\lambda^3 = 9\cdot\int_{B(0,2)} 1\, d\lambda^3 = 9\cdot\frac{4}{3}\pi 2^3 = \underline{96\pi.}$$

7) Pomocí Gaussovy věty vypočtěte plošný integrál z vektorového pole $(y^2, xz^3, (z-1)^2)$ přes hranici množiny ohraničené plochami $x^2+y^2=16$, $z=1$, $z=5$, která je orientovaná vnějším normálovým polem.

Řešení



válcové souřadnice

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$z = z$

$r \in [0,4]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$z \in [1,5]$

$$\int_{(S,m)} \left(y^2, xz^3, (z-1)^2\right) \cdot d\vec{\sigma} \underset{=}{\overset{\text{Gauss}}{=}} \int_{\text{⌭}} \operatorname{div}\left(y^2, xz^3, (z-1)^2\right) d\lambda^3$$

$$= \int_{\text{⌭}} \left(0 + 0 + 2(z-1)\right) d\lambda^3 \overset{\text{v. o. substituci}}{=} \int_1^5 \int_0^{2\pi} \int_0^4 2(z-1) r \, dr \, d\varphi \, dz =$$

$$= 2\pi \cdot 2 \cdot \int_1^5 (z-1)\, dz \cdot \int_0^4 r \, dr =$$

$$= 4\pi \left[\frac{z^2}{2} - z\right]_1^5 \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^4 = 4\pi \left(\frac{25}{2} - 5 - \frac{1}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{16}{2}\right) =$$

$$= 4\pi \cdot 8 \cdot 8 = \underline{256\pi}.$$

lze zkrátit: $\displaystyle\int_1^5 \int_{K(0,4)} 2(z-1)\, d\lambda^2 dz = \pi 4^2 \cdot \int_1^5 (2z-2)\, dz = 16\pi \cdot \left[z^2 - 2z\right]_1^5$

$= 16\pi \left(25 - 10 - 1 + 2\right) = 16^2\pi$