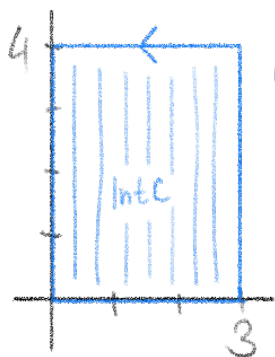


1) Pomocí Greenovy věty spočítejte $\int_{(C,+)} (ye^x, 2e^x) \cdot ds$,

kde C je kladně orientovaná hranice obdélníka $[0, 3] \times [0, 4]$.

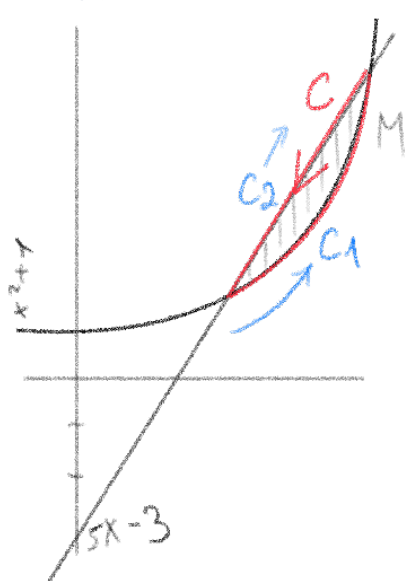
Řešení



$$\begin{aligned} \int_{(C,+)} (ye^x, 2e^x) \cdot ds &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial(2e^x)}{\partial x} - \frac{\partial(ye^x)}{\partial y} \right) d\lambda^2 \\ &= \int_0^3 \int_0^4 (2e^x - e^x) dy dx = 4 \int_0^3 e^x dx = 4 \left[e^x \right]_0^3 = \\ &= \underline{4(e^3 - 1)}. \end{aligned}$$

2) Pomocí Greenovy věty vypočítejte obsah množiny M ohraničené grafy funkcí $y = 5x - 3$ a $y = x^2 + 1$.

Řešení



$$\int_M 1 d\lambda^2 = \int_M \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(0)}{\partial y} \right) d\lambda^2 \stackrel{\text{Greenova věta}}{=} \int_{(C,+)} (0, x) \cdot ds = \star$$

$$= \int_{(C,+)} (0, x) \cdot ds = \star$$

$$C_1 \dots \gamma_1(t) = (t, t^2 + 1), \quad t \in [1, 4]$$

$$C_2 \dots \gamma_2(t) = (t, 5t - 3), \quad t \in [1, 4]$$

! C_2 má opačnou orientaci, přemnožíme (-1) .

$$\star = \int_{C_1} (0, x) \cdot ds - \int_{C_2} (0, x) \cdot ds =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_1^4 (0, t) \cdot (1, 2t) dt - \int_1^4 (0, t) \cdot (1, 5) dt = \int_1^4 (2t^2 - 5t) dt = \\
 &= \left[\frac{2t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} \right]_1^4 = \frac{2 \cdot 64}{3} - \frac{5 \cdot 16}{2} - \frac{2}{3} + \frac{5}{2} = \frac{256 - 240 - 4 + 15}{6} \\
 &= \frac{27}{6} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}
 \end{aligned}$$

3) Určete parametr $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby bylo vektorové pole $F(x, y) = (\alpha xy + y^2, x^2 + 2xy)$ potenciální.

Řešení

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \frac{\partial (x^2 + 2xy)}{\partial x} = 2x + 2y \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= \frac{\partial (\alpha xy + y^2)}{\partial y} = \alpha x + 2y \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{pro } \alpha = 2 \text{ platí} \\ &\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ &\text{a právě tehdy} \\ &\text{je } F \\ &\text{potenciální} \end{aligned}$$

$$F \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

umožňuje nám rovnost derivací použít jako postačující podmínku.

4) Je dáno vektorové pole $F(x, y) = (3 + 2xy^2, 2x^2y)$. Rozhodněte, zda je F potenciální a pokud ano, určete potenciál f takový, že $f(0, 0) = 0$. Dále spočítejte $\int_C F(x, y) \cdot ds$, kde C je část grafu funkce $y = \frac{1}{x}$ s počátečním bodem $(1, 1)$ a koncovým $(4, \frac{1}{4})$.

Řešení

$$\begin{aligned}
 &\bullet F \text{ je potenciální: } \left. \begin{aligned} \frac{\partial (2x^2y)}{\partial x} &= 4xy \\ \frac{\partial (3 + 2xy^2)}{\partial y} &= 4xy \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &F \in C^1(\mathbb{R}^2) \\ &\Rightarrow F \text{ je} \\ &\text{potenciální} \end{aligned}
 \end{aligned}$$

◦ Potenciál

Hledáme f : $\nabla f(x,y) = F(x,y) = (3+2xy^2, 2x^2y)$

$$\left[\text{tedy } \frac{\partial f}{\partial x} = 3+2xy^2 \Rightarrow \int (3+2xy^2) dx = f \right.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y \Rightarrow \int (2x^2y) dy = f$$

* pozor na konstanty, při integraci podle x může konstanta záviset na y a obráceně (např. y^2+1 je podle x konstanta a derivace=0)

$$f_c(y) = \int (3+2xy^2) dx = 3x + 2 \frac{x^2}{2} y^2 + c(y) = 3x + x^2 y^2 + c(y)$$

$$\frac{\partial f_c(y)}{\partial y} = 2x^2y + c'(y) \stackrel{\text{chceme}}{=} 2x^2y \Rightarrow c'(y) = 0$$

$$c(y) = c, c \in \mathbb{R}.$$

Tedy $f_c(x,y) = 3x + x^2 y^2 + c, c \in \mathbb{R}$, jsou všechny potenciály $F(x,y)$.

Zadáno $0 = f(0,0) = 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + c = c \Rightarrow c = 0$

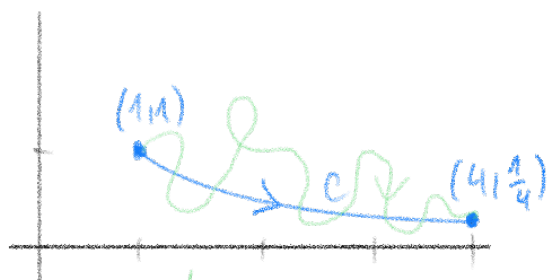
Hledaný potenciál je $f(x,y) = 3x + x^2 y^2$.

Poznámka: Postupné odvození je mnohem bezpečnější než porovnávání $\int dx$ a $\int dy$.

Poznámka2: Zkusť si začít od $f_c(x) = \int 2x^2 y dy$, $c(x)$ je netriviální

◦ Křivkový integrál

Potenciál funguje jako prim. funkce



$$\int_c F(x,y) \cdot ds = f\left(4, \frac{1}{4}\right) - f(1,1)$$

$$= 3 \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 16 - 3 - 1 = \underline{9}$$

↳ vyšlo by stejně pro jakoukoli křivku s počátkem v $(1,1)$ a koncem v $(4, \frac{1}{4})$.

Poznámka: na konci cvičení jsme parametrizovali
plochu, ale to už zahrneme do
dalšího tématu