Cvičení 10 — Téma: Křivkový integrál

1) Parametrizujte křivku, která vznikne jako průnik ploch $x^2 = z$, $x+y+z=1$ a poloprostoru $z \leq 1$.

Řešení

Za jednu souřadnici zvolíme t, výhodné je x
(z by vedlo na odmocninu, y se dobře dostane z x a z).

$$\left.\begin{aligned} x &= t \\ z &= x^2 = t^2 \\ y &= 1-x-z = 1-t-t^2 \end{aligned}\right\} \quad \underline{\varphi(t) = (t, 1-t-t^2, t^2)}$$

Zjistíme obor, ze kterého je t: $x^2 \leq 1 \Rightarrow \underline{t \in [-1,1]}$.

Poznámka: jsme-li na pochybách, může pomoci náčrtek.
(např.: $z=t$ a $x=\sqrt{t}$ by vyloučilo záporná x, což by byla chyba)

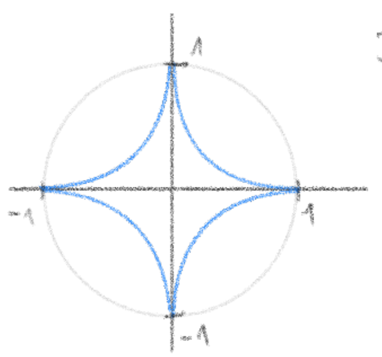
Důležité parametrizace

kružnice $K(S,R)$: $\varphi(t) = (S_1 + R\cos t, S_2 + R\sin t), t \in [0, 2\pi]$

úsečka od bodu P k bodu Q: $\varphi(t) = P + t(Q-P), t \in [0,1]$

2) Vypočtěte délku asteroidy, která je parametrizovaná $\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Řešení



⌜K náčrtku: $\varphi(t) = (\cos t, \sin t)$ by byla kružnice, 3 mocnina na intervalu $(0,1)$ zmenšuje čísla⌟

$$\varphi(t) = (3\cos^2 t(-\sin t), 3\sin^3 t\cos t)$$

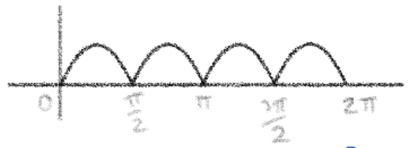
↳ v bodech $(\pm 1, 0), (0, \pm 1)$ je derivace 0

$\Rightarrow$ rozdělíme na 4 křivky podle kvadrantů

resp. parametrizaci na intervaly $[0, \frac{\pi}{2}], [\frac{\pi}{2}, \pi], [\pi, \frac{3\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$.

$$\|\varphi(t)\| = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9 \sin^4 t \cos^2 t} = |3 \cos t \sin t| \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} =$$

$$= 3 \cdot \frac{1}{2} |2 \cos t \sin t| \cdot 1 = \frac{3}{2} |\sin(2t)|$$



$\Rightarrow$ "stejná funkce" na intervalech $[0, \frac{\pi}{2}], [\frac{\pi}{2}, \pi], [\pi, \frac{3\pi}{2}], [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

$\Rightarrow$ stejný integrál přes tyto intervaly

$$\int_C 1 ds = \int_{C_1} 1 ds + \int_{C_2} 1 ds + \int_{C_3} 1 ds + \int_{C_4} 1 ds =$$

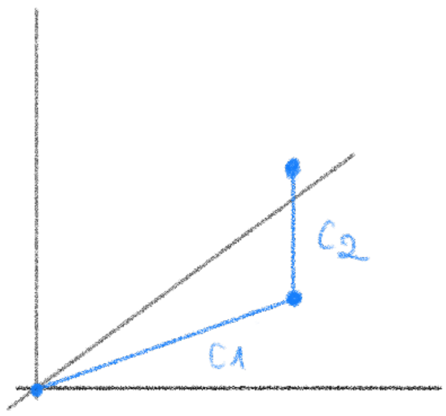
$$= 4 \cdot \int_{C_1} 1 ds = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \|\varphi'(t)\| dt = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3}{2} \sin(2t) dt =$$

$$= 6 \cdot \left[-\frac{\cos(2t)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{6}}$$

[u kružnice $2 \cdot 3{,}14 \ldots$]

3) Spočtěte křivkový integrál z funkce $f(x,y,z) = x - y + 2z$ přes křivku, která vznikne spojením úsečky z bodu $(0,0,0)$ do bodu $(1,1,0)$ a úsečky z bodu $(1,1,0)$ do bodu $(1,1,1)$.

Řešení



Parametrizujeme jednotlivé úsečky

$C_1 \ldots \varphi_1(t) = (0,0,0) + t((1,1,0) - (0,0,0)) =$
$= (t, t, 0), \quad t \in [0,1]$

$C_2 \ldots \varphi_2(t) = (1,1,0) + t((1,1,1) - (1,1,0))$
$= (1, 1, t), \quad t \in [0,1]$

$\varphi_2'(t) = (0,0,1).$

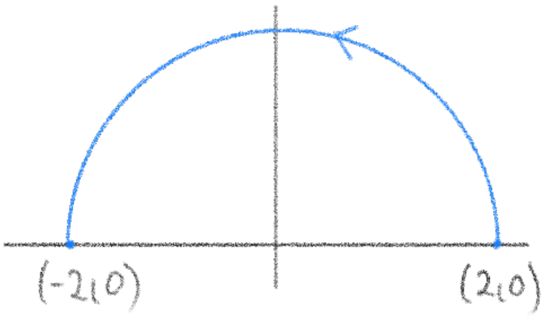
$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

$$= \int_0^1 (\underbrace{t - t}_{=0} + 2 \cdot 0) \cdot \|\varphi_1'(t)\| dt + \int_0^1 (1 - 1 + 2 \cdot t) \cdot \|\varphi_1'(t)\| dt$$

$$= 0 + \int_0^1 2t \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} dt = \int_0^1 2t \, dt = \left[\frac{2t^2}{2} \right]_0^1 = 1 - 0 = \underline{1}$$

4) Spočtěte křivkový integrál z vektorového pole $f(x,y) = (-y,-x)$ přes horní polokružnici se středem v počátku, poloměrem 2, počátečním bodem $(2,0)$ a koncovým bodem $(-2,0)$.

Řešení



Parametrizace

$\varphi(t) = (2\cos t, 2\sin t),\ t \in [0,\pi]$

prochází křivku ve správném směru

$\varphi'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$

$$\int_C (-y,-x)\cdot ds = \int_0^\pi (-2\sin t, -2\cos t)\cdot(-2\sin t, 2\cos t)\,dt =$$

$$= \int_0^\pi (4\sin^2 t - 4\cos^2 t)\,dt = 4\int_0^\pi \sin^2 t\,dt - 4\int_0^\pi \cos^2 t\,dt =$$

$$= 4\cdot\frac{\pi}{2} - 4\cdot\frac{\pi}{2} = 0$$