

Cvičení 7 a Cvičení 8

Úloha 1. Klasifikujte všechny lokální extrémů funkce f .

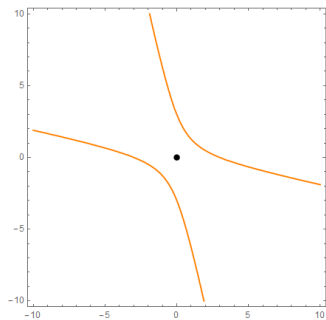
(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$

(b) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, kde $x, y, z > 0$

Úloha 2. Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \leq 1$ zahříváme na teplotu $T(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$. Určete, jaké jsou nejteplejší a nejstudenější body na talíři.

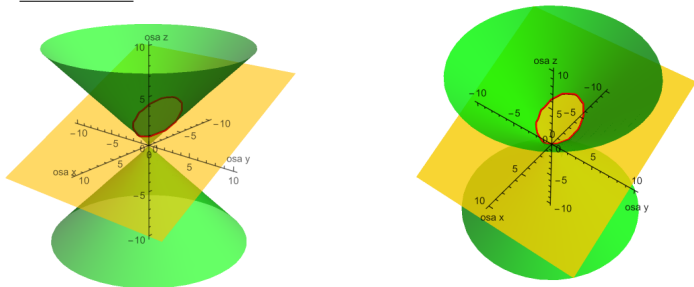
Úloha 3. Určete vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly o rovnici $x^2 + 5xy + y^2 = 9$ od bodu $(0, 0)$.

Pro ilustraci:



Úloha 4. Nalezněte nejvyšší bod (tj. bod s nejvyšší z -ovou souřadnicí) na křivce, která vznikne jako průnik ploch o rovnicích $x^2 + y^2 = z^2$ a $x + 2z = 4$.

Pro ilustraci:



Úloha 5. Do koule o poloměru R vepíšeme válec. Zjistěte, jaký největší povrch pláště může takový válec mít.

Dále řešte úlohy ze zadání Extrémy funkcí (viz Moodle nebo též konec tohoto dokumentu).

Domácí úkol na osmé cvičení: Naučit se na písemku :)

Domácí úkol na deváté cvičení: Úloha 3.

Připomenutí

Volné extrémy

- **Nutná podmínka existence lokálního extrému** funkce $f \in C^1$ ve vnitřním bodě $a \in \mathbb{R}^n$ jejího definičního oboru je, že

$$\nabla f(a) = (0, 0, \dots, 0). \quad (1)$$
 - Jinými slovy, uvnitř množiny hledáme body podezřelé z extrému jako body, kde je gradient nulový. Řešíme tedy soustavu rovnic, která vznikne tak, že položíme všechny parciální derivace rovny nule.
 - Jedná se pouze o nutnou podmínku, tzn. dostáváme pouze kandidáty na lokální extrémy, ale ještě nevíme, zda tam skutečně lokální extrém je (případně jaký)!
 - Body, kde platí (1), se nazývají **stacionární body**.
- Ve stacionárních bodech funkce $f \in C^2$ lze aplikovat následující **pravidlo pro klasifikaci lokálních extrémů**. Pokud je Hessova matice funkce ve vyšetřovaném bodě podezřelém z extrému
 - pozitivně definitní, pak se jedná o lokální minimum;
 - negativně definitní, pak se jedná o lokální maximum;
 - indefinitní, pak pak se jedná o sedlový bod.
- Pro určení (in)definitnosti Hessovy matice lze použít **Sylvestrovo kritérium**.
 - Pokud jsou všechny hlavní subdeterminanty $(H_f)_{\{1\}}, \dots, (H_f)_{\{1, \dots, n\}}$ kladné, pak je Hessova matice pozitivně definitní.
 - Pokud je první hlavní subdeterminant $(H_f)_{\{1\}}$ záporný, druhý $(H_f)_{\{1,2\}}$ kladný, třetí $(H_f)_{\{1,2,3\}}$ záporný atd., pak je Hessova matice negativně definitní.
 - Pokud není Hessova matice ani pozitivně semidefinitní ani negativně semidefinitní (totéž jako definitnost ale s neostrými nerovnostmi), potom je Hessova matice indefinitní.
- **Pozor na to**, že výše uvedené pravidlo pro klasifikaci lze aplikovat pouze ve stacionárních bodech, tj. v bodech, které jsou podezřelé z lok. extrému. Pokud něco není vůbec podezřelé z extrému, tak nedává nejmenší smysl vyšetřovat, o jaký extrém se jedná! První tedy musíme určit stacionární body a ty poté klasifikovat.

Konvexita

- **Věta:** Nechť f je reálná funkce třídy C^2 na otevřené konvexní množině $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Potom f je **konvexní** na Ω právě tehdy, když $H_f(x)$ je **pozitivně semidefinitní** pro každé $x \in \Omega$.

Metoda nejmenších čtverců

- **Tvrzení:** Ať $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ a $A \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Potom a je bod minima funkce $f(x) = \|Ax - b\|^2$ právě tehdy, když a je řešením soustavy rovnic

$$A^T A x = A^T b.$$
- To znamená, že pokud má soustava $Ax = b$ více rovnic než neznámých, přiblížení k řešení pomocí metody nejmenších čtverců dostaneme vyřešením soustavy $A^T A x = A^T b$.

Vázané extrémy

- Metoda **Lagrangeových multiplikátorů** nám dává nutnou podmínku pro existenci tzv. vázaných extrémů.
- Vázané extrémy jsou extrémy vázané vazební podmínkou (či podmínkami). Vazební podmínky jsou podmínky tvaru $g(x_1, \dots, x_n) = 0$, kde g je nějaká („dostatečně pěkná“) funkce n proměnných.
- **Lagrangeova věta o multiplikátorech:** Nechť $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená, $f, g_1, \dots, g_k \in C^1(\Omega)$, kde $k < n$, a

$$M = \{x \in \Omega, g_1(x) = 0, \dots, g_k(x) = 0\}.$$

Předpokládejme, že $a \in M$ je bod lokálního extrému f na M . Potom buď

(1) vektory $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)$ jsou lineárně závislé

nebo

(2) existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tak, že

$$\nabla f(a) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \nabla g_i(a) = 0.$$

- Jedná se pouze o nutnou podmínku. Jinými slovy dostáváme pouze kandidáty. Pokud ale víme, že se maxima a minima na uvažované množině nabývá, tak stačí probrat všechny kandidáty a vybrat největší, resp. nejmenší hodnotu.
 - Užitečná skutečnost, která nám často zaručí existenci maxima a minima, je, že **každá spojitá funkce na omezené a uzavřené množině v $\mathbb{R}^n$ nabývá maxima i minima**.

Lagrangeova metoda pro jednu vazební podmínku:

Hledáme extrémy funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ na množině dané jednou vazební podmínkou

$$g(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (2)$$

- (1) Nejprve zkontrolujeme, zda je ∇g nenulový v bodech uvažované množiny. Pokud je v nějakém bodě nulový a tento bod leží v uvažované množině, pak tento bod přidáme na seznam bodů podezřelých z extrému.
- (2) Uvážíme tzv. **Lagrangeovu funkci**

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda g(x_1, \dots, x_n),$$

kde $\lambda \in \mathbb{R}$ je nějaké číslo, jehož hodnotu neznáme.

- (3) Sestavíme si soustavu rovnic, která odpovídá soustavě pro stacionární body funkce L , ke které přidáme vazební podmínku (2). Tj.:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ \frac{\partial L}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) &= 0 \\ g(x_1, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

- (4) Nyní potřebujeme získat všechna možná řešení této soustavy. To budou naši kandidáti.
 - Že případný vázaný extrém splňuje tuto soustavu pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ je právě obsahem věty o Lagrangeových multiplikátorech.
 - Hodnota čísla λ nás obecně nezajímá, takže pokud se nám povede získat kandidáta, aniž bychom věděli hodnotu λ , tak jsme spokojeni, a rozhodně ji nedopočítáváme.
 - Musíme dávat pozor, aby kandidáti leželi v uvažované množině.

Lagrangeova metoda pro dvě vazební podmínky:

Hledáme extrémy funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ na množině dané dvěma vazebními podmínkami

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad (3)$$

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = 0. \quad (4)$$

- (1) Nejprve zkontrolujeme, zda jsou vektory ∇g_1 a ∇g_2 lineárně nezávislé v bodech uvažované množiny. Pokud jsou v nějakém bodě lineárně závislé (tj. jeden z gradientů je nulový nebo je jeden nenulovým násobkem druhého) a tento bod leží v uvažované množině, pak tento bod přidáme na seznam bodů podezřelých z extrému.
- (2) Uvážíme tzv. **Lagrangeovu funkci**

$$L(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 g_1(x_1, \dots, x_n) - \lambda_2 g_2(x_1, \dots, x_n),$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ jsou nějaká čísla, jejichž hodnotu neznáme.

- (3) Sestavíme si soustavu rovnic, která odpovídá soustavě pro stacionární body funkce L , ke které přidáme vazební podmínky (3) a (4). Tj.:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$g_2(x_1, \dots, x_n) = 0$$

- (4) Nyní potřebujeme získat všechna možná řešení této soustavy. To budou naši kandidáti.

- Že případný vázaný extrém splňuje tuto soustavu pro nějaká $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ je právě obsahem věty o Lagrangeových multipliktorech.
- Hodnota čísel λ_1, λ_2 nás obecně nezajímá, takže pokud se nám povede získat kandidáta, aniž bychom věděli hodnotu λ_1 a/nebo λ_2 , tak jsme spokojeni, a rozhodně ji nedopočítáváme.
- Musíme dávat pozor, aby kandidáti leželi v uvažované množině.

Extrémy funkcí

Zadání

- Klasifikujte všechny stacionární body funkce f , jestliže
 - $f(x, y) = x^4 - 2x^2 + y^3 - 3y$;
 - $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)$;
 - $f(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$;
 - $f(x, y) = y \cos x$;
 - $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$;
 - $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$, kde $x, y, z > 0$;
- Rozhodněte, zda je funkce f konvexní, jestliže
 - $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 3xy$;
 - $f(x, y, z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 + z^2 + xy + yz$.
- Je dána funkce $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + y^2 - x$.
 - Nalezněte největší otevřenou množinu C , na které je f konvexní.
 - Klasifikujte stacionární body funkce f .
 - Je bod $(1, 0)$ bodem extrému funkce f na C , kde C je množina z bodu (a)? Pokud ano, jakým?
- Je dána funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2 + \alpha xy + y$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.
 - Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby funkce f byla konvexní.
 - Pro každou hodnotu parametru α z předchozího bodu nalezněte všechny body minima funkce f .
- Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-1, 0)$, $(-\frac{1}{2}, 3)$, $(0, 2)$ a $(\frac{1}{2}, 1)$ graf funkce
 - $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.
 - $f(x) = a \sin(\pi x) + b \cos(\pi x)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.
- Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ a $(2, 5)$ graf funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Nalezněte všechny body v rovině $x + y + z = 1$, které jsou nejbližší bodu $(2, 0, -3)$.
- Nalezněte všechny body na povrchu kuželu $z^2 = x^2 + y^2$, které jsou nejbližší bodu $(4, 2, 0)$.
- Nalezněte body minima a maxima funkce f na množině M , jestliže
 - $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$;

- (b) $f(x, y) = xy^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 3\}$;
 (c) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x$, M je trojúhelník s vrcholy $(2, 0)$, $(0, 2)$, $(0, -2)$;

10. Nalezněte rozměry kvádrů o největším objemu, který leží v prvním oktantu, má tři stěny v rovinách $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ a jeden vrchol má v rovině $x + 2y + 3z = 6$.
 11. Pomocí metody Lagrangeových multiplikátorů nalezněte extrémy funkce f na množině M , jestliže

- (a) $f(x, y) = e^{-xy}$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 1\}$;
 (b) $f(x, y, z) = x + y + z$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

12. Mezi body množiny

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$$

nalezněte všechny, které jsou nejbližší (resp. nejdále) od bodu $\mathbf{a} = (3, 1, -1)$ a určete jejich vzdálenosti od $\mathbf{a}$.

13. Nalezněte nejvyšší bod (tj. bod s největší třetí souřadnicí) na křivce, která je průnikem ploch o rovnicích $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ a $x + 2z = 4$.
 14. Nalezněte tři nezáporná čísla, jejichž součet je 300 a součin je maximální.
 15. Nalezněte vzdálenost paraboly $y = x^2$ od přímky $x - y - 1 = 0$.

Výsledky

1. (a) $(0, 1)$, $(-1, -1)$ a $(1, -1)$ jsou sedlové body; $(-1, 1)$ a $(1, 1)$ jsou body ostrého lokálního minima; $(0, -1)$ je bod lokálního maxima.
 (b) $(0, 0)$ je bod lokálního maxima; každý prvek v $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ je bodem lokálního minima (dokonce bodem minima).
 (c) Funkce nemá stacionární body. (Ale bod $(0, 0)$ je bod maxima funkce f .)
 (d) Pro každé $k \in \mathbb{Z}$ je $(\frac{\pi}{2} + k\pi, 0)$ sedlový bod.
 (e) $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$ je bod lokálního minima.
 (f) $(\frac{1}{2}, 1, 1)$ je bod lokálního minima.
2. (a) Není konvexní.
 (b) Je konvexní.
3. (a) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
 (b) $(1, 0)$ je bod lokálního minima a $(-1, 0)$ je sedlový bod.
 (c) Jedná se o bod minima funkce f na C .
4. (a) f je konvexní pro $\alpha \in [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}]$.
 (b) Pro každé $\alpha \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ má f jediný bod minima, a to $(\frac{\alpha}{8-\alpha^2}, \frac{-2}{8-\alpha^2})$.
 Pro $\alpha = \pm 2\sqrt{2}$ bod minima neexistuje.
5. (a) $a = \frac{2}{5}, b = \frac{8}{5}$.
 (b) $a = -1, b = 1$.
6. $a = \frac{3}{7}, b = \frac{6}{5}, c = \frac{26}{35}$.
7. $(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{7}{3})$.
8. $(2, 1, \sqrt{5}), (2, 1, -\sqrt{5})$.
9. (a) $(-1, 0)$ je bod minima a $(1, 0)$ je bod maxima.
 (b) $(1, \sqrt{2})$ je bod maxima a všechny prvky množiny

$$\{(x, 0) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{3}\} \cup \{(0, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{3}\}$$
 jsou body minima.
 (c) $(1, 0)$ je bod minima; $(0, -2)$ a $(0, 2)$ jsou body maxima.
10. $(2, 1, \frac{2}{3})$.
11. (a) $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, -1)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ jsou body minima; $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ a $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ jsou body maxima.
 (b) $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, -1)$ je bod minima a $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ je bod maxima.

12. Nejblíže je bod $(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}})$, jehož vzdálenost od a je $\sqrt{15 - \frac{44}{\sqrt{11}}} = \sqrt{11} -$
2. Nejdále je bod $(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}})$, jehož vzdálenost od a je $\sqrt{15 + \frac{44}{\sqrt{11}}} =$
 $\sqrt{11} + 2$.
13. $(-4, 0, 4)$.
14. $x = y = z = 100$.
15. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$.