

Bonus

Úloha 1. *Nalezněte Fourierovu řadu 2π -periodické, po částech konstantní funkce $f(x)$, pro kterou platí*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in [-\pi, 0), \\ 0, & \text{pro } x \in [0, \pi). \end{cases}$$

Dále zjistěte, ve kterých bodech řada reprezentuje funkci f .

Úloha 2. *Nalezněte Fourierovu řadu 2π -periodické funkce*

$$f(x) = \max\{0, \cos x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Dále zjistěte, ve kterých bodech řada reprezentuje funkci f .

Dále řešte úlohy ze zadání **Fourierovy řady** (viz Moodle nebo též třetí strana tohoto dokumentu) a prohlédněte si řešení některých příkladů (pátá strana tohoto dokumentu).

Fourierovy řady

- **Fourierova řada T -periodické funkce** $f(x) \in L^2([a, a+T))$ je (trigonometrická) řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_k \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) \right),$$

kde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) dt, \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Místo $(a, a+T)$ můžeme díky T -periodicitě funkce f integrovat přes libovolný interval délky T .
- Je-li funkce f sudá, potom $b_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť funkce $f(x) \sin\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$ je lichá. V takovém případě tedy stačí spočítat koeficienty a_n .
- Je-li funkce f lichá, potom $a_n = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$, neboť funkce $f(x) \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)$ je lichá. V takovém případě tedy stačí spočítat koeficienty b_n .
- Při počítání Fourierových koeficientů se často hodí různé goniometrické identity. Mj. se mohou hodit vzorce

$$\sin(x) \sin(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) - \cos(x+y)),$$

$$\cos(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\cos(x-y) + \cos(x+y)),$$

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y)),$$

které se snadno odvodí ze součtových vzorců

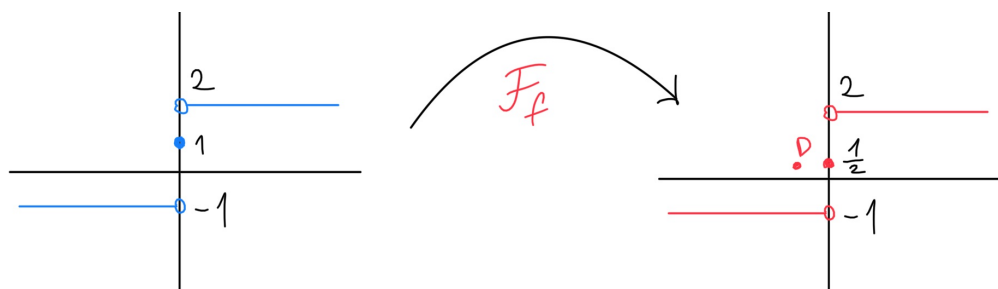
$$\sin(x \pm y) = \sin(x) \cos(y) \pm \cos(x) \sin(y),$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x) \cos(y) \mp \sin(x) \sin(y).$$

- Dále se může hodit vztah $\cos(k\pi) = (-1)^k$ a podobné vztahy závislé na paritě čísla k .
- Fourierova řada může a nemusí reprezentovat funkci f . Dirichletova věta říká, že pokud jsou f a f' po částech spojitě¹ a T -periodické, platí následující důležitý výsledek:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) = \begin{cases} f(x), & \text{pokud je } f \text{ spojitá v } x, \\ \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2}, & \text{pokud má } f \text{ v } x \text{ skok}^2. \end{cases}$$

- Jednoduše řečeno, Fourierova řada reprezentuje takové funkce ve všech bodech spojitosti a v bodech, kde mají skok, je součet Fourierovy řady aritmetický průměr skoku.



¹spojité funkce se skoky, vizte přednášku 12

² $f(x_-)$ a $f(x_+)$ značí jednostranné limity v bodě x zleva, respektive zprava

Fourierovy řady

Zadání

1. Nalezněte Fourierovu řadu funkce f , jestliže

(a) $f(t) = t^2, t \in [0, 1);$

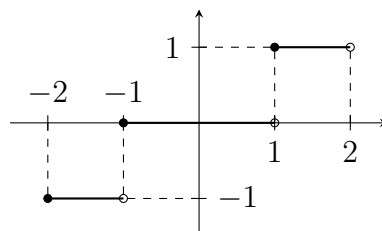
(b) $f(t) = 1 - |t|, t \in [-1, 1);$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0, & t \in [-\pi, 0), \\ \cos t, & t \in [0, \pi); \end{cases}$

(d) $f(t) = e^t, t \in [0, 2).$

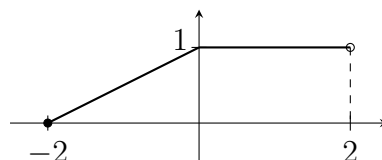
2. Nalezněte součet $\mathcal{F}_f$ Fourierovy řady funkce $f(t) = \max\{1, 2t\}, t \in [-1, 1)$.
Dále určete hodnotu $\mathcal{F}_f\left(\frac{27}{4}\right)$.

3. Nalezněte Fourierovu řadu funkce f zadané grafem



Jaký je součet Fourierovy řady funkce f na intervalu $[6, 10)$?

4. Nalezněte Fourierovu řadu funkce f zadané grafem



Jaký je součet Fourierovy řady funkce f na intervalu $[-14, -10)$?

Výsledky

1. (a) $\frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2\pi^2} \cos(2k\pi t) - \frac{1}{k\pi} \sin(2k\pi t);$
 (b) $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2-2(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos(k\pi t);$
 (c) $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{[1+(-1)^k]k}{(k^2-1)\pi} \sin(kt);$
 (d) $\frac{-1+e^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-1+e^2}{1+k^2\pi^2} \cos(k\pi t) + \frac{k\pi(1-e^2)}{1+k^2\pi^2} \sin(k\pi t).$

2. $\mathcal{F}_f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je periodická funkce s periodou 2 taková, že

$$\mathcal{F}_f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [-1, \frac{1}{2}), \\ 2t, & t \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

$$\mathcal{F}_f\left(\frac{27}{4}\right) = \frac{3}{2}.$$

3. $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2(-1)^k + 2\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi t}{2}\right)$ a

$$\mathcal{F}_f(t) = \begin{cases} -1, & t \in (6, 7), \\ -\frac{1}{2}, & t = 7, \\ 0, & t \in (7, 9) \cup \{6\}, \\ \frac{1}{2}, & t = 9, \\ 1, & t \in (9, 10). \end{cases}$$

4. $\frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2} \cos\left(\frac{k\pi t}{2}\right) + \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi t}{2}\right)$ a

$$\mathcal{F}_f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & t = -14, \\ \frac{1}{2}(t+12) + 1, & t \in (-14, -12), \\ 1, & t \in [-12, -10). \end{cases}$$