

Cvičení 13

Úloha 1. Rozviňte funkci $f(x)$ do mocninné řady se středem x_0 a určete poloměr konvergence.

(a) $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-x-6}$, $x_0 = 0$

(b) $f(x) = 3x \ln(1-2x)$, $x_0 = 0$

Využijte rozvoje logaritmu:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$

(c) $f(x) = 6^{x+2}$, $x_0 = -1$

Využijte rozvoje exponenciály:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

(d) $f(x) = (x-\pi)^3 \sin x$, $x_0 = \pi$

Využijte rozvoje:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

(e) $f(x) = (x+1) \ln x$, $x_0 = 1$

Využijte rozvoje logaritmu.

Dále řešte úlohy ze zadání Mocninné řady (viz Moodle nebo též třetí strana tohoto dokumentu).

Domácí úkoly: Doplňte si cvičení na Fourierovy řady. Projděte si vzorové zkouškové písemky a jejich řešení.

Hodně štěstí u zkoušek!

Rozvoj do mocninných řad

- Najít **rozvoj funkce** $f(x)$ **se středem** $x_0 \in \mathbb{R}$ znamená vyjádřit funkci pomocí mocninné řady se středem v x_0 , tj.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

kde $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je číselná posloupnost (tzv. koeficienty mocninné řady).

- Jedná se vlastně o nekonečný polynom v proměnné x , neboť

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + a_3 (x - x_0)^3 + \dots$$

- Všimněte si stále zvýrazňovaného faktoru $(x - x_0)$, který odráží střed mocninné řady. Pokud výsledný rozvoj není ve tvaru s tímto faktorem, nejedná se o rozvoj se správným středem, což je hrubá chyba...
- Nekonečná řada může a nemusí konvergovat (mít konečný součet). V případě mocninných řad je situace následující. Každá mocninná řada má tzv. **poloměr konvergence**

$$R = \sup\{r \geq 0; \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k < \infty\} \in [0, \infty]$$

(může být 0 i ∞).

- Mocninná řada se středem v x_0 konverguje (dokonce absolutně) na otevřeném intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$ a diverguje na $\mathbb{R} \setminus [x_0 - R, x_0 + R]$.



- Poloměr konvergence $R = \infty$ odpovídá tomu, že řada konverguje na celé reálné ose, naopak poloměr konvergence $R = 0$ znamená, že řada konverguje pouze ve svém středu a nikde jinde.
- Jestliže $R > 0$ je poloměr konvergence, potom pro každé $\delta \in (0, R)$ tato řada konverguje stejnoměrně na intervalu $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. V důsledku můžeme **zaměnit pořadí integrace / derivace a sčítání** funkcí na $(x_0 - R, x_0 + R)$. Poloměr konvergence se při těchto operacích zachovává.
- K určení poloměru konvergence se hodí podílové a případně odmocninové kritérium pro konvergenční číselných řad. Mějme číselnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$.
 - Podílové kritérium:** Označme $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$.
 - * Pokud $L < 1$, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolutně konverguje.
 - * Pokud $L > 1$, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverguje.
 - Odmocninové kritérium:** Označme $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.
 - * Pokud $L < 1$, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolutně konverguje.
 - * Pokud $L > 1$, potom řada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ diverguje.
 - Tip:** Pokud řada obsahuje faktoriály, pro většinu bude snazší použít podílové kritérium.
- Pro rozvoje racionálních funkcí se využívá známého **součtu geometrické řady**, a to

$$\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n \quad \text{pro každé } |q| < 1.$$

- Metoda na součet řady:** Porovnám se známými vzorci. Někdy je třeba vytknout, aby seděly mocniny, někdy je třeba derivovat nebo integrovat, aby se určil výraz a_n (pokud něco překáží v čitateli $\rightarrow$ integruji, pokud ve jmenovateli $\rightarrow$ derivuji). Nezapomenu vrátit operaci zpět, pokud přitom integruji, dopočítám konstantu dosazením $x = x_0$. Naleznou poloměr konvergence.
- Metoda na rozvoj do řady:** Vyrobím závorku $(x - x_0)$ a upravím do podoby známého vzorce. Někdy je třeba integrovat a pak derivovat (případně obráceně). Naleznou poloměr konvergence.

Mocninné řady

Zadání

1. Nalezněte poloměr konvergence uvedených mocninných řad.

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{3^n} (x-5)^n.$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!} x^n.$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n n}{n+1} x^{2n}.$

2. Vyšetřete konvergenci uvedených mocninných řad a nalezněte jejich součet.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n+3}.$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (1+n)}{3^n n!} (x-2)^n.$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n (n+1)} x^{n+1}.$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n.$

3. Nalezněte rozvoj funkce $f(x)$ do mocninné řady na okolí bodu x_0 , jestliže

(a) $f(x) = 3^x, x_0 = -3;$

(b) $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, x_0 = 0;$

(c) $f(x) = \frac{1}{x+2}, x_0 = -1;$

(d) $f(x) = \frac{1}{2x-5}, x_0 = 1;$

(e) $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}, x_0 = 0;$

(f) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}, x_0 = 0;$

(g) $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}, x_0 = 2.$

Výsledky

1. (a) $R = 1$.
(b) $R = 0$.
(c) $R = +\infty$.
(d) $R = \frac{1}{2}$.
2. (a) $\frac{x^3}{5+x^2}$, $R = \sqrt{5}$.
(b) $e^{-\frac{x-2}{3}} \left(\frac{5-x}{3}\right)$, $R = +\infty$.
(c) $-x - 2\ln(2-x) + \ln 4$, $R = 2$.
(d) $\operatorname{arctg}(x)$, $R = 1$.
(e) $\frac{x}{1-x^2} - \ln(1-x)$, $R = 1$.
3. (a) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\ln 3)^n}{27 \cdot n!} (x+3)^n$ pro $x \in \mathbb{R}$.
(b) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1} n!} x^{2n+1}$ pro $x \in \mathbb{R}$.
(c) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x+1)^n$ pro $|x+1| < 1$.
(d) $f(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}} (x-1)^n$ pro $|x-1| < \frac{3}{2}$.
(e) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n (n+1)x^n$ pro $|x| < \frac{1}{2}$.
(f) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-\frac{1}{3^{n+1}} + 2(-1)^n\right] x^n$ pro $|x| < 1$.
(g) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[-1 + \frac{2(-1)^n}{3^{n+1}}\right] (x-2)^n$ pro $|x| < 1$.