

Cvičení 11

Úloha 1.

(a) Rozhodněte, zda jsou vektorová pole

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (y + z, x^2, x + y)$$

a

$$\mathbf{G}(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

potenciální, a v pozitivních případech najděte potenciál.

(b) V pozitivním případě najděte také jeho potenciál, který má v počátku hodnotu 5.

(c) V pozitivním případě spočítejte jeho křivkový integrál přes libovolnou křivku s počátečním bodem $(0, 0, 0)$ a koncovým $(1, 1, 1)$.

Úloha 2. Určete funkci $g(x)$ tak, aby vektorové pole

$$\mathbf{F}(x, y) = (y \sin x + xy \cos x + e^y, g(x) + xe^y)$$

bylo potenciální. Určete jeho potenciál.

Úloha 3. Spočítejte obsah plochy S , která je částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$ pod rovinou $z = 2$.

$$\text{Tj. } S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2, z \leq 2\}.$$

Úloha 4. Spočítejte plošný integrál

$$\iint_S xy \, d\sigma,$$

kde S je část plochy $x^2 + z^2 = 1$ vymezená rovinami $y = 0$ a $x + y = 2$.

Úloha 5. Spočítejte tok vektorového pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (z - x^2 - y^2, ye^x, x^2y)$ protékající směrem vzhůru částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

Úloha 6. Spočítejte plošný integrál z vektorového pole

$$\iint_{(S,N)} (x, -z, y) \cdot d\sigma,$$

kde S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ležící v 1. oktantu (tj. $x, y, z \geq 0$), která je orientovaná normálou s kladnou z -ovou souřadnicí.

Dále řešte úlohy ze zadání Křivkový integrál (viz Moodle nebo též čtvrtá strana Cvičení 10) na potenciální vektorové pole a ze zadání Plošný integrál (viz Moodle nebo též čtvrtá strana tohoto dokumentu) na plošný integrál z definice.

Domácí úkol: Úloha 2.

Potenciál vektorového pole

- **Potenciál** vektorového pole $\mathbf{F}$ je skalární funkce $f \in C^1$ taková, že

$$\nabla f = \mathbf{F}.$$

Vektorové pole je **potenciální**, pokud má potenciál.

- Nutnou, a na otevřené konvexní množině i postačující podmínkou, aby vektorové pole $\mathbf{F} \in C^1$ bylo potenciální, je

$$\text{v } \mathbb{R}^2: \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 0;$$

$$\text{v } \mathbb{R}^3: \quad \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (0, 0, 0),$$

kde $\nabla \times \mathbf{F}$ nazýváme **rotace**.

- Pokud má vektorové pole $\mathbf{F}$ potenciál f , platí

$$\int_C \mathbf{F} \, d\mathbf{s} = f(B) - f(A),$$

kde C je libovolná¹ křivka s počátečním bodem A a koncovým B .

Plošný integrál skalární funkce

- **Plošný integrál skalární funkce f přes plochu S** , která má parametrizaci $\Phi(u, v): D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$, se spočte jako

$$\int_S f \, d\sigma = \int_D f(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv.$$

- Plošný integrál se po dosazení vlastně převede na výpočet dvojného integrálu.
- Plošný integrál skalární funkce přes plochu nezávisí ani na parametrizaci, ani na orientaci plochy.
- Plošný integrál jedničky ($f \equiv 1$) odpovídá obsahu plochy S , tj.

$$\text{obsah } S = \int_S 1 \, d\sigma = \int_D \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \, du \, dv.$$

- Pokud je plocha S grafem funkce $g(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}$, tj. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = g(x, y), (x, y) \in D\}$, vzorec pro plošný integrál se zjednoduší na

$$\int_S f \, d\sigma = \int_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2} \, dx \, dy.$$

Plošný integrál vektorového pole

- **Plošný integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ přes orientovanou plochu S** , která má parametrizaci $\Phi(u, v): D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a orientaci $\mathbf{N}$, se spočte jako

$$\int_{(S, \mathbf{N})} \mathbf{F} \cdot d\sigma = \int_D \mathbf{F}(\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \, du \, dv.$$

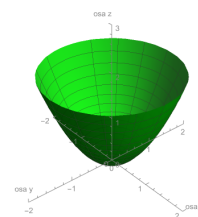
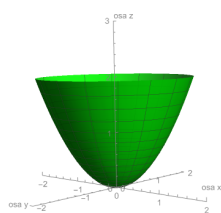
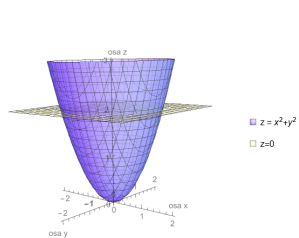
- $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ je normálový vektor.
- Plošný integrál vektorového pole přes plochu závisí na orientaci plochy.
- Pokud najdeme opačnou parametrizaci (tj. normálový vektor směřuje opačným směrem, než má), tak není třeba zoufat, protože opačná orientace odpovídá opačnému znaménku u integrálu.
- Pokud je plocha S grafem funkce $g(x, y): D \rightarrow \mathbb{R}$, tj. $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = g(x, y), (x, y) \in D\}$ s orientací, že její normálový vektor má kladnou z -ovou souřadnici, tak se vzorec pro plošný integrál zjednoduší na

$$\iint_{(S, \mathbf{N})} \mathbf{F} \cdot d\sigma = \iint_D \mathbf{F}(x, y, g(x, y)) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial x}, -\frac{\partial g}{\partial y}, 1 \right) \, dx \, dy.$$

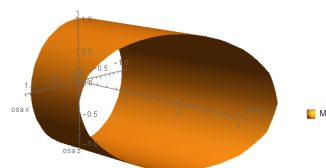
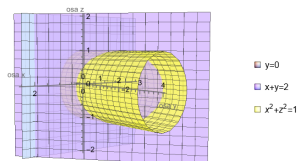
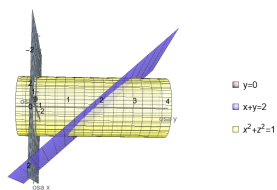
¹ležící v množině, kde je f potenciálem F

Ilustrace k úlohám

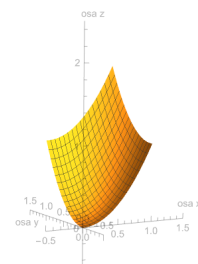
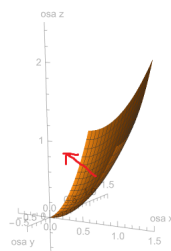
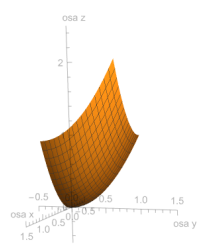
Úloha 3.



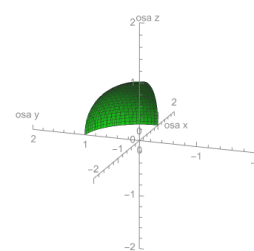
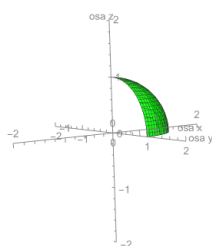
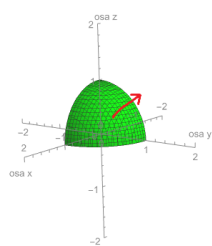
Úloha 4.



Úloha 5.



Úloha 6.



Plošný integrál

Zadání

1. Nalezněte parametrizaci plochy S , jestliže

- (a) S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ ležící mezi rovinami $z = 0$ a $z = 3\sqrt{3}$;
- (b) S je část roviny $z = x+3$ ležící v množině popsané nerovnostmi $x^2 + y^2 = 1$ a $x \geq 0$;
- (c) S je plocha vzniklá rotací křivky $y = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in [-1, 1]$, (ležící v rovině xy) kolem osy x .

2. Vypočtete obsah plochy S , jestliže

- (a) S je plocha s parametrizací

$$\Phi(u, v) = ((a + b \cos u) \cos v, (a + b \cos u) \sin v, b \sin u), \quad u, v \in [0, 2\pi],$$

kde $0 < b < a$;

- (b) S je část paraboloidu $z = x^2 + y^2$ ležící pod rovinou $z = 2$;
- (c) S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, která leží uvnitř kuželu $z^2 = x^2 + y^2$.

3. Vypočtete plošný integrál z funkce f přes plochu S , jestliže

- (a) $f(x, y, z) = x$ a S je trojúhelník s vrcholy $(1, 0, 0)$, $(0, -2, 0)$, $(0, 0, 4)$;
- (b) $f(x, y, z) = y^2$ a S je část sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, která leží nad kuželem $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
- (c) $f(x, y, z) = x^2 z + y^2 z$ a S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$;

4. Vypočtete plošný integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ přes orientovanou plochu S , jestliže

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y, -x, 2z)$ a $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, z \geq 0\}$ je orientovaná normálovým polem s nekladnou třetí komponentou;
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$ a $S = \{(x, y, x \sin y) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [0, 2], y \in [0, \pi]\}$ je orientovaná normálovým polem s nezápornou třetí komponentou;

5. Je dáno vektorové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 5)$ a plocha

$$S = \partial \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, x + y \leq 2\}$$

orientovaná vnějším normálovým polem. Vypočtete plošný integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ přes orientovanou plochu S

- (a) z definice plošného integrálu;
- (b) pomocí Gaussovy věty.

6. Pomocí Gaussovy věty vypočtete plošný integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ přes orientovanou plochu S , jestliže

- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (4x, y, 4z)$, S je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ orientovaná vnějším normálovým polem;
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2yz, xy^2z, xyz^2)$, S je hranice množiny $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$, kde $a, b, c > 0$, orientovaná vnějším normálovým polem;
- (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, xz^3, (z-1)^2)$, S je hranice množiny ohraničené plochami $x^2 + y^2 = 16, z = 1, z = 5$, která je orientovaná vnějším normálovým polem.
7. Pomocí Stokesovy věty vypočtete tok vektorového pole $\nabla \times \mathbf{F}$ orientovanou plochu S , jestliže
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 \sin z, y^2, xy)$, S je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ ležící nad rovinou $z = 0$ a její normálové pole má nezápornou třetí komponentu;
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (ze^y, x \cos y, xz \sin y)$, S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 16, y \geq 0$, a její normálové pole má nezápornou druhou komponentu;
- (c) $\mathbf{F}(x, y, z) = (6yz, 5x, yze^{x^2})$, plocha S je část paraboloidu $z = \frac{1}{4}x^2 + y^2$ splňující $0 \leq z \leq 4$ a její normálové pole má nezápornou třetí komponentu.
8. Pomocí Stokesovy věty vypočtete křivkový integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ podél orientované křivky C , jestliže
- (a) $\mathbf{F}(x, y, z) = (1, x + yz, xy - \sqrt{z})$, C je okraj části roviny $3x + 2y + z = 1$ nacházející se v prvním oktantu a je orientována proti směru hodinových ručiček, koukáme-li se na ní shora;
- (b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^3, -x^3, y^2 + z^3)$, C je průnik válcové plochy $x^2 + y^2 = 1$ s rovinou $x + y + z = 1$ a je orientována proti směru hodinových ručiček, koukáme-li se na ní shora.

Výsledky

1. (a) $\Phi(u, v) = (6 \cos u \sin v, 6 \sin u \sin v, 6 \cos v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}]$.
(b) $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, 3 + u \cos v)$, $u \in [0, 1]$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
(c) $\Phi(u, v) = (u, \frac{\cos v}{1+u^2}, \frac{\sin v}{1+u^2})$, $u \in [-1, 1]$, $v \in [0, 2\pi]$.
2. (a) $4\pi^2 ab$;
(b) $\frac{13\pi}{3}$;
(c) $4\pi(2 - \sqrt{2})$.
3. (a) $\sqrt{\frac{7}{3}}$;
(b) $\frac{\pi}{12}(8 - 5\sqrt{2})$;
(c) 16π .
4. (a) $-\frac{32}{3}\pi$;
(b) $\frac{\pi^2}{2}$.
5. 4π .
6. (a) 96π ;
(b) $\frac{3}{4}a^2b^2c^2$;
(c) 256π .
7. (a) 0 ;
(b) 16π ;
(c) -152π .
8. (a) $\frac{1}{24}$;
(b) 2π .