

Cvičení 10

Úloha 1. Spočtěte délku křivky C , která má parametrizaci $\varphi(t) = (t^2, 9t, 4t^{\frac{3}{2}})$, $t \in [1, 4]$.

Úloha 2. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_C x + y \, ds,$$

kde C je křivka, která se skládá ze tří částí C_1 , C_2 a C_3 . C_1 je spodní polokružnice se středem v počátku a poloměru 1. C_2 je úsečka spojující body $(1, 0)$ a $(0, 2)$. C_3 je čtvrtkružnice se středem v $(0, 4)$ a poloměru 2, která prochází body $(0, 2)$ a $(-2, 4)$.

Úloha 3. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C, \tau)} (y, z^2, x) \cdot d\mathbf{s},$$

kde C je křivka, která je určena rovnostmi $x^2 + y^2 = 1$ a $x + z = 1$. Křivka C je kladně orientovaná při pohledu shora.

Úloha 4. Na hmotný bod působí silové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2, z, x)$. Jakou práci vykoná hmotný bod při pohybu po křivce dané rovnostmi $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a $x = y$ při pohybu z bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ do bodu $(0, 0, 1)$?

Úloha 5. Spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C, \tau)} (y, z, x) \cdot d\mathbf{s},$$

kde C je křivka ležící v poloprostoru $z \geq 0$, která je určena rovnostmi $x^2 + y^2 = z^2$ a $x^2 + y^2 = 2x$. Křivka C je kladně orientovaná při pohledu shora.

Úloha 6. Pomocí Greenovy věty spočtěte křivkový integrál

$$\int_{(C, \tau)} (2xy^3 + \sin^9 x, 4x^2y^2 + e^y) \cdot d\mathbf{s},$$

kde C je kladně orientovaná hranice rovinné oblasti M , která je omezená křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$.

Úloha 7. Pomocí Greenovy věty spočtěte obsah rovinné oblasti M , která je ohraničená křivkami $y = 5x - 3$ a $y = x^2 + 1$.

Dále řešte úlohy ze zadání Křivkový integrál (viz Moodle nebo též čtvrtá strana tohoto dokumentu).

Domácí úkol: Úloha 2 jako příprava na písemku

Křivkový integrál skalární funkce

- **Křivkový integrál skalární funkce f podél křivky C** , která má parametrizaci $\varphi(t)$, $t \in [a, b]$, se spočte jako

$$\int_C f \, ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

- Křivkový integrál skalární funkce podél křivky nezávisí ani na parametrizaci, ani na orientaci křivky (tj. v jakém směru křivku probíháme).
- Délka křivky C se spočte jako křivkový integrál jedničky ($f \equiv 1$), tj.

$$\text{délka } C = \int_C 1 \, ds = \int_a^b \|\varphi'(t)\| \, dt.$$

Křivkový integrál vektorového pole

- **Křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ podél orientované křivky C** , která má parametrizaci $\varphi(t)$, $t \in [a, b]$, a orientaci τ , se spočte jako

$$\int_{(C, \tau)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \, dt,$$

kde $\cdot$ značí skalární součin v $\mathbb{R}^n$.

- Křivkový integrál vektorového pole podél křivky závisí na orientaci křivky (tj. v jakém směru křivku probíháme).
- Pokud najdeme opačnou parametrizaci (tj. křivku probíháme v opačném směru, než máme), tak není třeba zoufat, protože opačná orientace odpovídá opačnému znaménku u integrálu.
- Interpretace křivkového integrálu vektorového pole $\mathbf{F}$ podél křivky C je, že se jedná o práci, kterou vykoná hmotný bod při pohybu po křivce C , když na něj působí silové pole $\mathbf{F}$.

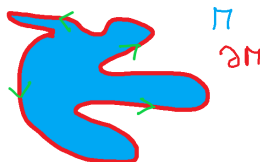
Greenova věta

- Jednoduchá uzavřená křivka $C \subseteq \mathbb{R}^2$ se nazývá **Jordanova křivka**.
- Řekneme, že Jordanova křivka je **kladně orientovaná** (resp. **záporně orientovaná**), jestliže ji procházíme proti (resp. po) směru hodinových ručiček.
- Jordanova křivka rozdělí $\mathbb{R}^2$ na sjednocení omezené oblasti $\text{Int } C$, křivky C a neomezené oblasti $\text{Ext } C$, které nemají žádný společný prvek.

Greenova věta

Ať $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast, $C \subseteq \Omega$ je kladně orientovaná Jordanova křivka taková, že $\text{Int } C \subseteq \Omega$. Jestliže $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ je vektorové pole třídy C^1 na Ω , potom

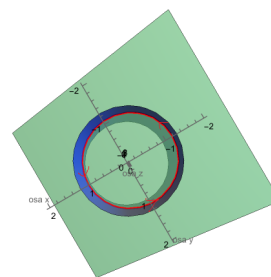
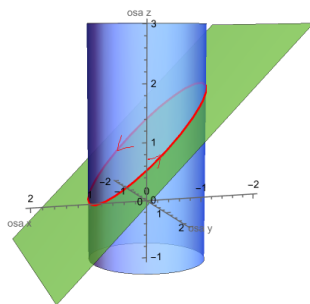
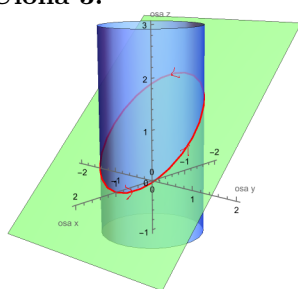
$$\int_{\text{Int } C} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d\lambda_2 = \int_C \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{s}.$$



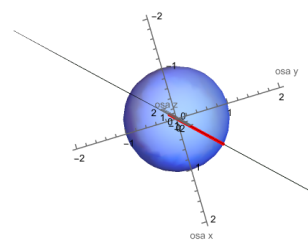
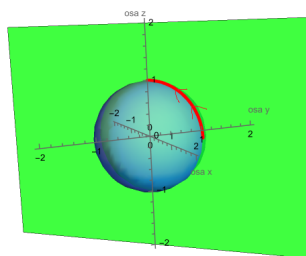
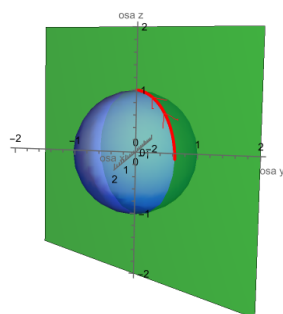
- Greenova věta se občas používá k výpočtu obsahu rovinných obrazců. Protože obsah $M = \int_M 1$, abychom mohli použít Greenovu větu, potřebujeme nějak (šikovně) zvolit rovinné vektorové pole $\mathbf{F}$, pro které platí $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv 1$. Základní volby (často úspěšné) jsou např. $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$, $\mathbf{F}(x, y) = (-y, 0)$ nebo $\mathbf{F}(x, y) = (-\frac{y}{2}, \frac{x}{2})$.

Ilustrace k úlohám

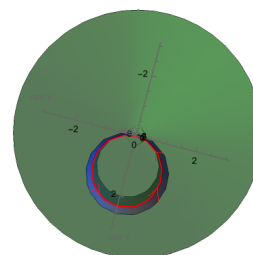
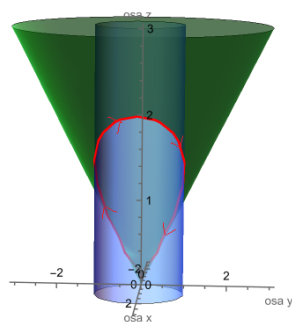
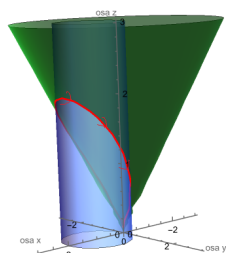
Úloha 3.



Úloha 4.



Úloha 5.



Křivkový integrál

Zadání

- Nalezněte parametrizaci křivky, která vznikne
 - průnikem ploch $z = x^2$, $x + y + z = 1$ a poloprostoru $z \leq 1$;
 - průnikem válce $x^2 + y^2 = 16$ a roviny $z = x + y$.
- Vypočítejte délku křivky C , jestliže
 - C má parametrizaci $\varphi(t) = (t^2, 9t, 4t^{\frac{3}{2}})$, $t \in [1, 4]$;
 - C je asteroida $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ (parametrizace asteroidy je $\varphi(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, 2\pi]$);
 - C je graf funkce $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$.
- Vypočítejte křivkový integrál z funkce f podél křivky C , jestliže
 - $f(x, y) = xy^4$, $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x^2 + y^2 = 2\}$;
 - $f(x, y, z) = xe^{yz}$, C je úsečka s krajními body $(0, 0, 0)$ a $(1, 2, 3)$;
 - $f(x, y, z) = x - y + 2z$, C je spojení úsečky s krajními body $(0, 0, 0)$ a $(1, 1, 0)$ a úsečky s krajními body $(1, 1, 0)$ a $(1, 1, 1)$;
 - $f(x, y) = xy$, kde C je část elipsy $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, kde $a, b > 0$, která leží v prvním kvadrantu.
- Vypočítejte křivkový integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ podél orientované křivky C , jestliže
 - $\mathbf{F}(x, y) = (x^2, 4y)$, C má parametrizaci $\varphi(t) = (e^t, t^2)$, $t \in [0, 2]$;
 - $\mathbf{F}(x, y) = (e^x, 0)$, C je část křivky $x = y^3$, počáteční bod je $(-1, -1)$ a koncový bod je $(1, 1)$;
 - $\mathbf{F}(x, y) = (-y, -x)$, C je horní půlkružnice o středu $(0, 0)$ a poloměru 2, počáteční bod je $(2, 0)$ a koncový bod je $(-2, 0)$;
 - $\mathbf{F}(x, y, z) = (z^2, x^2, y^2)$, C je úsečka s počátečním bodem $(1, 0, 0)$ a koncovým bodem $(4, 1, 2)$.
- Určete hmotnost pružiny, jejíž parametrizace je $\varphi(t) = (2 \cos t, 2 \sin t, t)$, $t \in [0, 4\pi]$, jestliže její lineární hustota hmotnosti je $\varrho(x, y, z) = z$.
- Uzavřená křivka $C \subseteq \mathbb{R}^3$ je dána rovnicemi $x^2 + y^2 = 4$ a $z = 0$. Jakou práci vykoná silové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, xy, 1)$ na částici, která (jednou) oběhne C tak, že prochází body $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ a $(-2, 0, 0)$ v uvedeném pořadí.
- Nalezněte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ takové, aby vektorové pole $\mathbf{F}(x, y) = (\alpha xy + y^2, x^2 + 2xy)$ bylo potenciální.

8. Nalezněte funkci $g(x)$ tak, aby vektorové pole

$$\mathbf{F}(x, y) = (y \sin x + xy \cos x + e^y, g(x) + xe^y)$$

bylo potenciální a $g(0) = 0$.

9. Je dáno vektorové pole $\mathbf{F}(x, y) = (3 + 2xy^2, 2x^2y)$.

- (a) Rozhodněte, zda $\mathbf{F}$ je potenciální. Pokud ano, pak nalezněte potenciál f vektorového pole $\mathbf{F}$ splňující $f(0, 0) = 0$.
- (b) Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ podél křivky C , která je částí hyperboly $y = \frac{1}{x}$ s počátečním bodem $(1, 1)$ a koncovým bodem $(4, \frac{1}{4})$.

10. Je dáno vektorové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (2 - xy + z, x - z - 3, x^2 - y)$.

- (a) Rozhodněte, zda $\mathbf{F}$ je potenciální. Pokud ano, pak nalezněte potenciál f vektorového pole $\mathbf{F}$ splňující $f(0, 0, 0) = 0$.
- (b) Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ podél úsečky C s počátečním bodem $(1, 0, -2)$ a koncovým bodem $(4, 6, 3)$.

11. Je dáno vektorové pole $\mathbf{F}(x, y, z) = (\sin y, x \cos y + \cos z, -y \sin z)$.

- (a) Rozhodněte, zda $\mathbf{F}$ je potenciální. Pokud ano, pak nalezněte potenciál f vektorového pole $\mathbf{F}$ splňující $f(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) = 3$.
- (b) Vypočtěte křivkový integrál vektorového pole $\mathbf{F}$ podél křivky C s parametrizací $\varphi(t) = (\sin t, t, 2t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

12. Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole $\mathbf{F}$ podél orientované křivky C , jestliže

- (a) $\mathbf{F}(x, y) = (ye^x, 2e^x)$ a C je kladně orientovaná hranice obdélníka s vrcholy $(0, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 4)$, $(0, 4)$;
- (b) $\mathbf{F}(x, y) = (y^3, -x^3)$ a C je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 4$;
- (c) $\mathbf{F}(x, y) = (e^{-x} + y^2, e^{-y} + x^2)$ a C je záporně orientovaná hranice množiny

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq \cos x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \right\}.$$

13. Pomocí Greenovy věty vypočtěte obsah množiny M , jestliže

- (a) M je ohraničená křivkami $y = 5x - 3$, $y = x^2 + 1$;
- (b) M je ohraničená osou x a křivkou s parametrizací

$$\varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Výsledky

1. (a) $\varphi(t) = (t, 1 - t - t^2, t^2)$, $t \in [-1, 1]$;
(b) $\varphi(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 4(\cos t + \sin t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. (a) 42;
(b) 6;
(c) $\frac{33}{16}$.
3. (a) $\frac{16}{5}$;
(b) $\frac{\sqrt{14}}{12}(e^6 - 1)$;
(c) 1;
(d) $\frac{ab}{3(a+b)}(a^2 + ab + b^2)$.
4. (a) $\frac{e^6 - 1}{3} + 32$;
(b) $\frac{e^2 - 1}{e}$;
(c) 0;
(d) $\frac{35}{3}$.
5. $8\sqrt{5}\pi^2$.
6. 0.
7. $\alpha = 2$.
8. $g(x) = x \sin x$.
9. (a) $3x + x^2 y^2$.
(b) 9.
10. (a) $\mathbf{F}$ není potenciální.
(b) $-\frac{11}{2}$.
11. (a) $f(x, y, z) = x \sin y + y \cos z + 2$.
(b) $1 - \frac{\pi}{2}$.
12. (a) $4(e^3 - 1)$;
(b) -24π ;
(c) $\frac{\pi}{2}$.
13. (a) $\frac{9}{2}$;
(b) 3π .