

6. LIMITA FUNKCE

Příklad 6.1. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}.$$

Příklad 6.2. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}.$$

Příklad 6.3. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt[3]{x^3 + 7x} - x \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (e^x - 1)^{\frac{(\operatorname{tg} x)^2}{\sqrt[3]{x^2}}}.$$

Příklad 6.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x-1} \right)^{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \log(1+2^x) \log \left(1 + \frac{3}{x} \right).$$

Příklad 6.5. Spočtěte limity následujících funkcí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\frac{\pi}{6} + x)}{\operatorname{tg} x}.$$

Příklad 6.6. Spočtěte limity následujících funkcí a posloupností

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[n]{2} - 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\log(1 + \sqrt{x})}.$$

Příklad 6.7. Spočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{\cot \pi x}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \arctg \frac{x}{x+1} \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

Příklad 6.8. Spočtěte limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(2\pi \sqrt{n^2 + 1} \right).$$

VÝSLEDKY

- Příklad 6.1: $2, 1/2, -1$
- Příklad 6.2: $-1/16, 3/2, 1/n, 1/4$
- Příklad 6.3: $7/3, -1/2, 0$
- Příklad 6.4: $0, 1/e, 2/3, \log 8$
- Příklad 6.5:

2. Platí

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}} \cdot \frac{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}). \end{aligned}$$

Víme, že

- (i) $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\log(1+y)}{y} = 1$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- (iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$,
- (iv) $\sin$ je prostý na $\langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$,
- (v) $\sqrt{\cdot}$ je spojitá ve svém definičním oboru.

Z (i), (iii), (iv) a věty o limitě složené funkce plyne $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} = 1$.

Poslední rovnost, spolu s (ii), (v) a větou o limitě součinu dává

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + \sin x)}{\sin x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{2x+1} + \sqrt{x+1}) = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

2. Pišme

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{tg} x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x}. \end{aligned}$$

Víme, že $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\operatorname{tg} x} = 1$. Zabývejme se teď první limitou ve výše uvedeném součinu limit.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - 1}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} - \frac{e^{\arcsin x} - 1}{\arcsin x} \cdot \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

Použili jsme

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- $\sin$ je prostá funkce na jistém okolí 0,
- $\arcsin$ je prostá funkce,
- $x \mapsto 2x$ je prostá funkce,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1),
- větu o aritmetice limit.

Dohromady tedy máme

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 2x} - e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x} = 1.$$

3. Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme

$$\begin{aligned}
 \frac{e^x - 2 \sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - 2 \sin(\pi/6 + x)}{x} \right) \\
 &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right) \\
 &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right) \\
 &= \frac{x}{\operatorname{tg} x} \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \cdot \frac{1}{1 + \cos x} - \frac{\sqrt{3} \sin x}{x} \right). \quad (*)
 \end{aligned}$$

Víme, že

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$,
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$,
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$,
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$.

Z (*), (1)–(4) a z věty o aritmetice limit vyplývá

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 \sin(\pi/6 + x)}{\operatorname{tg} x} = 1 - \sqrt{3}.$$

• Příklad 6.6:

1. Pokusme se nejprve spočítat limitu funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x.$$

Upravme nejprve výraz jehož limitu počítáme:

$$\begin{aligned}
 &\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x \\
 &= \exp \left(\log \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x \right) \right) \\
 &= \exp \left(x \log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right) \right) \\
 &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right) \\
 &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot x \cdot \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + 1}}{2x^3 - 1} \right) \\
 &= \exp \left(\frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2 - \frac{1}{x^3}} \right). \quad (*)
 \end{aligned}$$

Dále platí:

- $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+z)}{z} = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3} + \sqrt{x^4 + 1}}{2x^3 - 1}$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2x - \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{\infty} = 0$,
- funkce $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}$ je na jistém okolí ∞ různá od nuly,
- $\exp$ je spojitá na $\mathbb{R}$.

Z (1)–(3) a z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)}{\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}}} = 1. \quad (**)$$

Dále máme

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{2 - \frac{1}{x^3}} = 1. \quad (***)$$

Z (*), (**), (***) a (4) plyne

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2x^3} - \sqrt{x^4 + 1}} \right)^x = e^1 = e$$

a tedy podle Heineho věty

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n^4 + 2n^3} - \sqrt{n^4 + 1}} \right)^n = e.$$

2. Místo limity posloupnosti $\{n(\sqrt[n]{2}-1)\}_{n=1}^{\infty}$ počítejme limitu funkce $f(x) = x(2^{\frac{1}{x}} - 1)$ v ∞ . Pokud totiž ukážeme, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, pak podle Heineho věty také $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = A$. Platí

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(2^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{\log 2}{x}} - 1}{\frac{\log 2}{x}} \cdot \log 2 = \log 2.$$

Užili jsme

- $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$,
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log 2}{x} = 0$,
- $\frac{\log 2}{x} \neq 0$ pro každé $x > 0$,
- větu o limitě složené funkce ve verzi s podmínkou (P1).

3. 1.

- Příklad 6.7: $1/e, 1/2, 4/3$
- Příklad 6.8: 0

7. DERIVACE FUNKCE, L'HOSPITALOVO PRAVIDLO, VĚTY O STŘEDNÍ HODNOTĚ

Příklad 7.1. Spočtěte:

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{x}{x+1} \right).$$

Příklad 7.2. Spočtěte následující limity:

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0+} (\cos(\sqrt{x}))^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos(\sqrt{x})}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{x}{\sqrt{1 - e^{-x^2}}}$$

Příklad 7.3. Definujme funkci

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{pro } x \neq 0; \\ \frac{1}{2} & \text{pro } x = 0. \end{cases}$$

Určete, zda má funkce f derivaci v bodě 0 a pokud ano, spočtěte ji.

Příklad 7.4. Spočtěte následující limity:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} (2 - x)^{\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2})}; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\arcsin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2}, \quad a > 0.$$