

Čištění 7

Téma: Residuová věta a její aplikace

Residuová věta: pro kladně orientovanou Jordanovu křivku C platí

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{w \in \{z \in \text{Int } C, z \text{ i.z.s.f}\}} \text{res}_w f(z).$$



$$\int_C f(z) dz = 2\pi i (\text{res}_{w_1} f(z) + \text{res}_{w_2} f(z) + \dots)$$

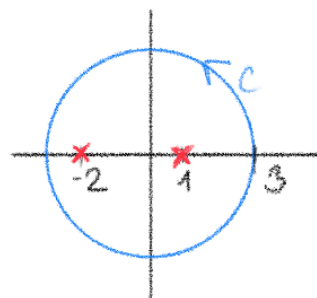
1) Spočítejte $\int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} dz$,

kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z|=3$.

Řešení

i.z.s. 1... pól řádu 2

2... pól řádu 1, 1-násobný kořen jmenovatele



$$\int_C \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} dz = 2\pi i \left(\text{res}_{-2} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} + \text{res}_1 \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} \right) = 2\pi i \left(\frac{5}{9} + \frac{4}{9} \right) = \underline{\underline{2\pi i}}$$

$\text{res}_{-2} \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{\frac{z^2+1}{(z-1)^2} \Big|_{z=-2}}{(z+2)' \Big|_{z=-2}} = \frac{\frac{4+1}{9}}{1} = \frac{5}{9}$

holomorfni
1-nás.k.

$\text{res}_1 \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} = \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[(z-1)^2 \frac{z^2+1}{(z-1)^2(z+2)} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z(z+2) - (z^2+1) \cdot 1}{(z+2)^2} = \frac{6-2}{9} = \frac{4}{9}$

2) Spočítejte $\int_C \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} dz$, kde C je kladně orientovaná

hranice obdélníka s vrcholy $-\frac{1}{2} - \frac{i}{2}, 2 - \frac{i}{2}, \frac{1}{2} + i, 2 + i$.

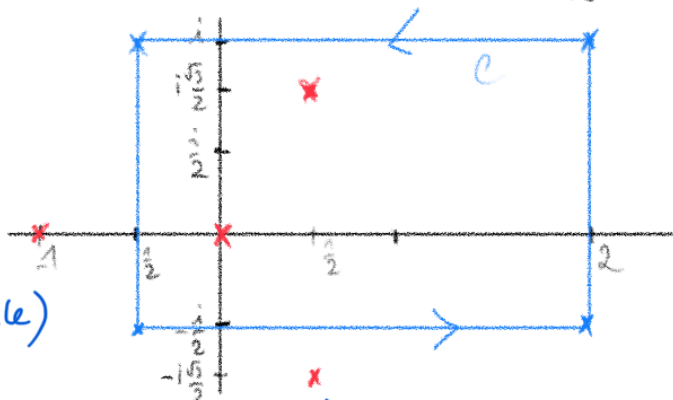
Řešení: $z^3+1 = (z+1)(z^2-z+1) = (z+1)(z - (\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}))(z - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}))$

$z^2-z+1=0$
 $z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$

i.z.s. 0... pól řádu 2

$-1, \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$... póly řádu 1
(jednonásobné kořeny jmenovatele)



$$\int_C \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} dz = 2\pi i \left(\text{res}_0 \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} + \text{res}_{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} \right) = 2\pi i \left(2 + \frac{i\sqrt{3}}{3(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^4} \right)$$

$$\text{res}_0 \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} \stackrel{k=2}{=} \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[z^2 \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} \right]' = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2z^3+2-3z^2(2z-1)}{(z^3+1)^2} = \frac{2}{1} = 2$$

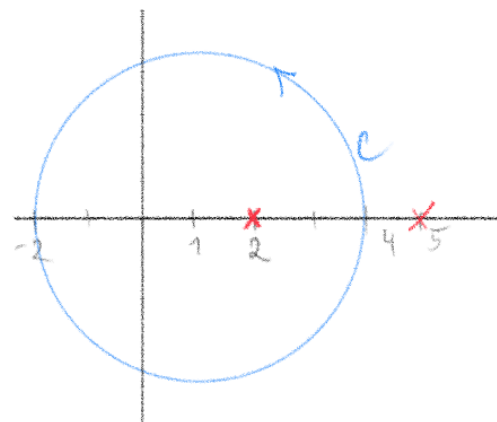
$$\text{res}_{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{2z-1}{z^2(z^3+1)} = \frac{\frac{2z-1}{z^2} \Big|_{z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}}{3z^2 \Big|_{z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{\frac{1+i\sqrt{3}-1}{(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2}}{3(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = \frac{i\sqrt{3}}{3(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})^4}$$

holomorfni
↪ 1-nás. k.

3) Spočítejte $\int_C \left(e^{\frac{4}{z-2}} + \sin\left(\frac{1}{z-5}\right) \right) dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z-1|=3$.

Řešení iz.s. 2, 5

$$\int_C \sin\left(\frac{1}{z-5}\right) dz = 0 \text{ z Cauchyovy věty (holomorfni na } \Omega_1(C \cap \Omega) \text{)}$$



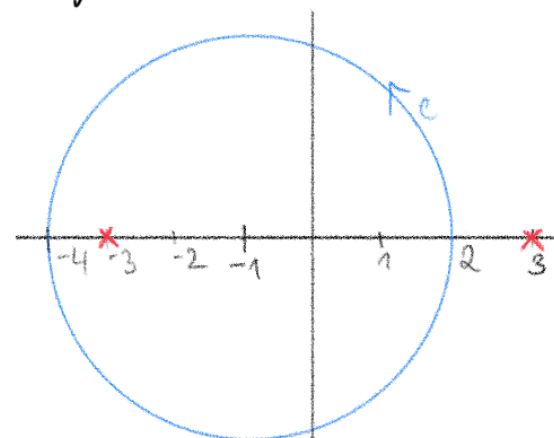
$$\int_C \left(e^{\frac{4}{z-2}} + \sin\left(\frac{1}{z-5}\right) \right) dz = \int_C e^{\frac{4}{z-2}} dz = 2\pi i \text{res}_2 e^{\frac{4}{z-2}} = 2\pi i \cdot 4 = \underline{8\pi i}$$

potřebujeme střed $z_0=2$: $e^{\frac{4}{z-2}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4^m}{(z-2)^m} = \sum_{m=0}^{\infty} 4^m (z-2)^{-m}$ $-m=-1 \Rightarrow m=1$
 $4^1 = \text{res}_2 e^{\frac{4}{z-2}}$

4) Spočítejte $\int_C \left(\frac{2}{(z+3)^5} + \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+3} \right) dz$, kde C je kladně orientovaná kružnice o rovnici $|z+1|=3$.

Řešení iz.s. -3, 3

$$\int_C \frac{3}{z-3} dz = 0 \text{ z Cauchyovy věty (holomorfni na } \Omega_1(C \cap \Omega) \text{)}$$



$$\int_C \left(\frac{2}{(z+3)^5} + \frac{3}{z-3} + \frac{4}{z+3} \right) dz = \int_C \left(\frac{2}{(z+3)^5} + \frac{4}{z+3} \right) dz = 2\pi i \cdot \text{res}_{-3} \left(\frac{2}{(z+3)^5} + \frac{4}{z+3} \right) = 2\pi i \cdot 4 = \underline{8\pi i}$$