

Cvičení 5

Téma: Mocninné řady a násobnost kořenů

Mocninna řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \dots a_n \in \mathbb{C}, z_0$ střed kruhu konvergence

$R \in [0, \infty]$ poloměr kruhu konvergence

1) Určete koeficienty u $(z-i)^0, (z-i)^1, (z-i)^3$ a $(z-i)^4$
v mocninné řadě $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} (z-i)^{2n-3}$.

Řešení

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{2^n} (z-i)^{2n-3} = \frac{1}{2^2} (z-i)^1 + \frac{2}{2^3} (z-i)^3 + \frac{3}{2^4} (z-i)^5 + \dots \text{vyšší mocniny}$$

Tedy $a_0 = 0, a_1 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{4}, a_4 = 0$.

Znamé řady: exponenciální $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z, z \in \mathbb{C}$

geometrická $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, |z| < 1$

2) Naleznete součet mocninné řady a určete parametry kruhu konvergence.

a) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z+i)^{2n+1}$

Řešení "připodobníme" ke známé řadě $\rightarrow$ geometrická

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z+i)^{2n+1} = (z+i) \sum_{n=0}^{\infty} 3^n (z+i)^{2n} = (z+i) \sum_{n=0}^{\infty} (3(z+i)^2)^n =$$

pouze tehdy $\uparrow = (z+i) \cdot \frac{1}{1-3(z+i)^2}$

$$|3(z+i)^2| < 1 \Rightarrow |(z+i)^2| < \frac{1}{3} \Rightarrow |z+i|^2 < \frac{1}{3} \Rightarrow |z+i| < \frac{1}{\sqrt{3}} = R$$

Řada konverguje na kruhu se středem $z_0 = -i$ a poloměrem $R = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^{2n+3}$

Řešení závorčka v čitateli $\rightarrow$ použijeme integraci, aby se vykrátila

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^{2n+3} = z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^{2n} = \star$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^{2n} \xrightarrow{\int} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = z \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z^2)^n}{n!} = z \cdot e^{z^2}, z \in \mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)}{n!} z^{2n} = (z \cdot e^{z^2})' = e^{z^2} + z \cdot e^{z^2} \cdot 2z = e^{z^2} (1 + 2z^2)$$

$$\star = z^3 e^{z^2} (1 + 2z^2), z \in \mathbb{C}.$$

Řada konverguje na kruhu se středem $z_0 = 0$ a poloměrem $R = \infty$.

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) 5^{n+1}} z^{n+3}$$

Řešení! závorčka ve jmenovateli $\rightarrow$ použijeme derivaci, aby se vykrátila

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) 5^{n+1}} z^{n+3} = \frac{z^2}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) 5^n} z^{n+1} = \star$$

$$\bullet \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) 5^n} z^{n+1} \xrightarrow{dz} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) 5^n} (n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{z}{5}\right)^n = \frac{1}{1 + \frac{z}{5}} = \frac{5}{5+z}$$

$|\frac{z}{5}| < 1 \Rightarrow |z| < 5$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) 5^n} z^{n+1} = \int \frac{5}{5+z} dz = 5 \ln(5+z) + C, C \in \mathbb{C}$$

Dosadíme střed $z_0 = 0$:

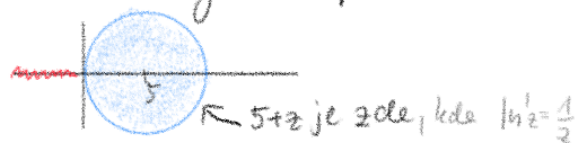
$$0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1) 5^n} 0^{n+1} = 5 \ln(5) + C \Rightarrow C = -5 \ln 5$$

$$\star = \frac{z^2}{5} (5 \ln(5+z) - 5 \ln 5) = z^2 (\ln(5+z) - \ln 5), |z| < 5.$$

Řada konverguje na kruhu se středem $z_0 = 0$ a poloměrem $R = 5$.

Poznámky: 1) nederivovali jsme konstantu, "počítadlo" samy se reposit

$$2) (5 \ln(5+z))' = \frac{5}{5+z} \text{ pro } |z| < 5$$



3) Rozviňte funkci f do mocninové řady se středem z_0 .

$$a) f(z) = \frac{1}{3z-2}, z_0 = 1$$

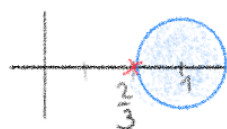
✓
Řešení! zařídíme $(z-1)$ do geometrické řady

$$\frac{1}{3z-2} = \frac{1}{3(z-1)-2+3} = \frac{1}{1+3(z-1)} = \frac{1}{1-(-3(z-1))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3(z-1))^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 3^n (z-1)^n$$

$$|-3(z-1)| < 1$$

$$|z-1| < \frac{1}{3} \dots \text{ kruh konvergence má poloměr } R = \frac{1}{3}$$

Poznámka: $\frac{1}{3z-2}$ má singularitu v $\frac{2}{3}$



$$b) f(z) = \frac{1}{z(z+1)}, z_0 = i$$

Řešení

$$\frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} + \frac{-1}{z+1}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{i+z-i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{z-i}{i})} = \frac{1}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i^n} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i^{n+1}} (z-i)^n, \quad \left| -\frac{z-i}{i} \right| < 1 \Rightarrow \underline{|z-i| < 1}$$

$$\frac{-1}{z+1} = \frac{-1}{1+i+z-i} = -\frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{z-i}{1+i})} = -\frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^n} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n, \quad \left| -\frac{z-i}{1+i} \right| < 1$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{i^{n+1}} (z-i)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{i^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{(1+i)^{n+1}} \right) (z-i)^n, \quad \underline{|z-i| < |1-i| = \sqrt{2}}$$

Poznámka: $|z-i| < 1$ je přísnější podmínka než $|z-i| < \sqrt{2}$, tedy konverguje obě!

c) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z_0 = 0$

Řešení

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)' = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{geometrická řada, } |z| < 1$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot z^{n-1}, \quad |z| < 1.$$

Poznámka: pokud se při derivaci řady derivují konstanty, mění se dolní mez

d) $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}, \quad z_0 = 0$

Řešení

$$\left(\frac{1}{(1-z)^2} \right)' = \frac{-2(1-z)(-1)}{(1-z)^4} = \frac{2}{(1-z)^3}$$

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1-z)^2} \right)' \stackrel{c)}{=} \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \right)' = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) \cdot z^{n-2}, \quad |z| < 1.$$

e) $f(z) = z^2, \quad z_0 = 1$

Řešení doplňujeme $(z-1)$

$$z^2 = (z-1)^2 + 2z-1 = (z-1)^2 + 2(z-1) + 1, \quad z \in \mathbb{C} \Rightarrow R = \infty$$

f) $f(z) = \ln \frac{1+z}{1-z}, \quad z_0 = 0$

Řešení

$$\begin{aligned} \left(\ln \frac{1+z}{1-z} \right)' &= \frac{1-z}{1+z} \cdot \frac{1-z+1+z}{(1-z)^2} = \frac{2}{(1+z)(1-z)} = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n + 1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2 z^{2n} \end{aligned} \quad |z| < 1$$

$$\ln \frac{1+z}{1-z} = \int \sum_{n=0}^{\infty} 2 z^{2n} dz = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + C, \quad |z| < 1$$

Dosadíme $z_0 = 0$

$$0 = \ln \frac{1}{1} = \sum_{n=0}^{\infty} 2 \cdot \frac{0^{2n+1}}{2n+1} + C \Rightarrow C = 0$$

Násobnost kořenů - pro výpočet

(nikoli definice)

- pro polynom $(z-z_0)^k$ je z_0 k -násobným kořenem
- pro funkci $f(z)$ je z_0 k -násobný kořen, jestliže $f(z_0)=f'(z_0)=\dots=f^{(k-1)}(z_0)=0$ a $f^{(k)}(z_0)\neq 0$.
- při součinu funkcí se násobnosti sčítají

4) Určete násobnosti všech kořenů funkce $f(z)=(z-\frac{2}{\pi})^2 \cos(\frac{1}{z})$.

Řešení

- $\frac{2}{\pi}$ je 2-násobný kořen $(z-\frac{2}{\pi})^2$

• $\cos(\frac{1}{z})=0$

$$\frac{e^{i\frac{1}{z}} + e^{-i\frac{1}{z}}}{2} = 0$$

$$x = e^{i\frac{1}{z}} \neq 0$$

$$x + \frac{1}{x} = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \pm i$$

$$e^{i\frac{1}{z}} = i = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow z = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$e^{i\frac{1}{z}} = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow z = \frac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$$

$$\left\{ \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$z = \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{včetně } \frac{2}{\pi}$$

Kolik násobné jsou to kořeny?

$$\cos\left(\frac{1}{z}\right) \Big|_{z=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}} = 0$$

$$\left(\cos\left(\frac{1}{z}\right) \right)' \Big|_{z=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}} = -\sin\left(\frac{1}{z}\right) \cdot \frac{-1}{z^2} \Big|_{z=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}} = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \frac{1}{(k\pi+\frac{\pi}{2})^2} = \pm \frac{1}{(k\pi+\frac{\pi}{2})^2} \neq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}} \text{ jsou 1-násobné kořeny } \cos\left(\frac{1}{z}\right)$$

- $\frac{1}{k\pi + \frac{\pi}{2}}, k \neq 0$, jsou 1-násobné kořeny $f(z)$

$$\frac{2}{\pi} \text{ je 3-násobný kořen } f(z) \quad \left(2\text{-násobný } (z-\frac{2}{\pi})^2 + 1\text{-násobný } \cos\frac{1}{z} \right)$$