Cvičení 3

Téma: Lineárně lomené zobrazení, elementární funkce

Lineárně lomené zobrazení $\quad f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc\neq 0$

- platí limity: $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\dfrac{a}{c}$, $\lim\limits_{z\to -\frac{d}{c}} f(z)=\infty$ (můžeme psát $f(\infty)$ a $f(-\frac{d}{c})$)
- l.l.z. zobrazuje zobecněné kružnice (přímky a kružnice) na zobecněné kružnice a zachovává inverzní body
- inverzní body: u přímky p symetrické s osou p
  u kružnice $k(S,R)$: S a ∞, α a $\beta = S+\dfrac{R^2}{\overline{(\alpha-S)}}$

Strategie na zobrazování zobecněných kružnic a podobných množin

1) zaměříme se na hranici
   - je tam bod w zobrazující se na ∞ $\Rightarrow$ vyjde přímka
   - není tam bod w zobrazující se na ∞ $\Rightarrow$ vyjde kružnice

2)
- kružnice $\xrightarrow{f}$ přímka

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{inverzní}"'] & \cdot \arrow[d, phantom, "\text{symetrické body}"] \\ \infty \arrow[r, "f"] & \cdot \end{tikzcd}$$

- kružnice $\xrightarrow{f}$ kružnice

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{inverzní}"'] & \infty \arrow[d, leftrightarrow, "\text{inverzní}"] \\ S_1+\dfrac{R_1^2}{\overline{w-S_1}} \arrow[r, "f"] & S_2 \end{tikzcd}$$

- přímka $\xrightarrow{f}$ přímka

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, phantom, "\text{symetrické}"'] & \cdot \arrow[d, phantom, "\text{symetrické}"] \\ \cdot \arrow[r, "f"] & \cdot \end{tikzcd}$$

- přímka $\xrightarrow{f}$ kružnice

$$\begin{tikzcd} w \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{inverzní}"'] & \infty \arrow[d, leftrightarrow, "\text{inverzní}"] \\ \text{symetrický } w \arrow[r, "f"] & S_2 \end{tikzcd}$$

3) vnitřek (pokud existuje) – zobrazíme jeden bod

Příklady

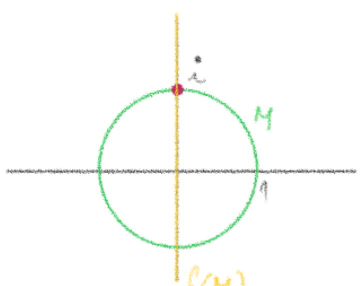
1) Je dáno zobrazení $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$.

   Nalezněte $f(M)$, jestliže a) $M=\{z\in\mathbb{C},\ |z|=1\}$
   b) $M=\{z\in\mathbb{C},\ |z+i|\leq 1\}$.

Řešení

Pozorování: $f(i)=\infty$

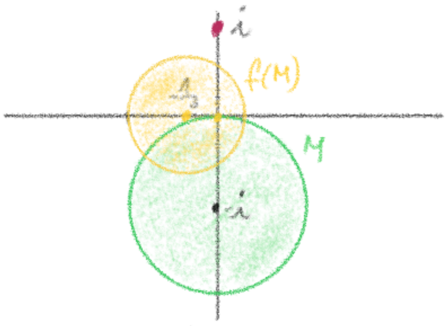
a) $M=K(0;1)$, $i\in M \Rightarrow f(M)$ bude přímka



$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow] & \dfrac{i}{-i}=-1 \\ \infty \arrow[r, "f"] & 1 \end{tikzcd}$$

$\left.\right\}$ -1 a 1 jsou symetrické přes výslednou přímku
$\Rightarrow f(M)=\{z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}\,z=0\}$

b) $M = B(-i;1)$



- zaměříme se na hranici $\partial M = K(-i;1)$

$i \notin \partial M \Rightarrow f(\partial M)$ je kružnice

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow] & \infty \arrow[d, leftrightarrow] \\ x \arrow[r, "f"] & S_2 \end{tikzcd}$$

vycházíme z toho, že hledáme S_2, ten je inverzní s ∞, na ∞ se zobrazí i, to je inverzní s x (které neznáme, ale spočítáme) a $f(x)$ tedy bude hledané S_2

$$x = S_1 + \frac{R_1^2}{\overline{w - S_1}} = -i + \frac{1}{\overline{i-(-i)}} = -i + \frac{1}{-2i} \cdot \frac{i}{i} = -i + \frac{i}{2} = -\frac{i}{2}$$

$$S_2 = f(x) = \frac{-\frac{i}{2} + i}{-\frac{i}{2} - i} = \frac{\frac{i}{2}}{-\frac{3i}{2}} = -\frac{1}{3}$$

Poloměr – vzdálenost mezi středem kružnice a body na kružnici

$0 \in \partial M \Rightarrow f(0) \in f(\partial M) \Rightarrow R_2 = |S_2 - f(0)| = \left| -\frac{1}{3} - \frac{i}{-i} \right| = \left| -\frac{1}{3} + 1 \right| = \frac{2}{3}$

Tedy $f(\partial M) = K\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

- Zaměříme se na vnitřek: $-i \in M \Rightarrow f(-i) = 0 \in f(M)$

$\Rightarrow M = B\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) = \left\{ z \in \mathbb{C},\ \left|z + \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3} \right\}$

2) Je dáno zobrazení $f(z) = \dfrac{2z-3}{z-2}$.

Naleznete $f(M)$, jestliže $M = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < \operatorname{Re} z < 2\}$.

Řešení

Pozorování: $f(2) = \infty$

zaměříme se na hranici

- přímka $\operatorname{Re} z = 0$

$2 \notin \{z, \operatorname{Re} z = 0\} \Rightarrow$ obraz $\operatorname{Re} z = 0$ je kružnice $k(S, R)$

$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{inverze}"'] & \infty \arrow[d, leftrightarrow] \\ -2 \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

-2 je symetrická k 2 přes přímku $\operatorname{Re} z = 0$

$$S = f(-2) = \frac{2\cdot(-2)-3}{-2-2} = \frac{7}{4}$$

$f(0) \in K(S,R) \Rightarrow R = |S - f(0)| = \left|\frac{7}{4} - \frac{3}{2}\right| = \frac{1}{4}$

- přímka $\operatorname{Re} z = 2$

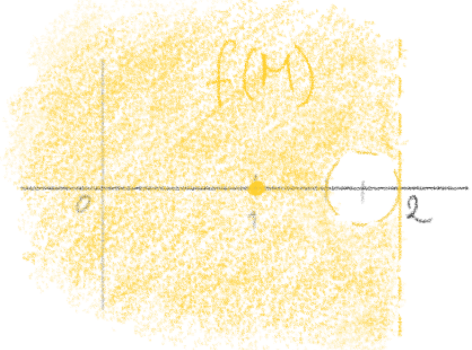
$2 \in \{z, \operatorname{Re} z = 2\} \Rightarrow$ obraz $\operatorname{Re} z = 2$ je přímka

Zvolíme 2 body symetrické přes $\operatorname{Re} z = 2$: $1, 3$

$$\left.\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow] & 1 \arrow[d, leftrightarrow] \\ 3 \arrow[r, "f"] & 3 \end{tikzcd}\right\} \text{symetrické přes výslednou přímku} \Rightarrow \operatorname{Re} z = 2$$

- Vnitřek : $1 \in M \Rightarrow f(1) = 1 \in M$

$f(M) = \{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z < 2 \} \setminus B\left(\frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$



3) Je dáno zobrazení $f(z) = \dfrac{\alpha z + 1}{z+1}$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

a) Stanovte inverzní zobrazení k f.

b) Určete α, aby existovala kružnice K se středem v -1 taková, že $f(K) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \}$. Dále určete poloměr K.

Řešení

a) $z' = \dfrac{\alpha z + 1}{z+1} \quad | \cdot (z+1)$

$$z'(z+1) = \alpha z + 1$$
$$z'z + z' = \alpha z + 1$$
$$z'z - \alpha z = 1 - z'$$
$$z(z' - \alpha) = 1 - z'$$
$$z = \frac{1-z'}{z'-\alpha} \Rightarrow f^{-1}(z') = \frac{1-z'}{z'-\alpha}$$

b) Chceme α, aby existovala $K = k(-1; R)$: $f(K) = k(0; 2)$

Pozorování: $f(-1) = \infty$, $f(\infty) = \alpha$. lze využít na inverze se středy

$$\begin{tikzcd} \infty \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\text{inverzní}"'] & \alpha \arrow[d, leftrightarrow] & \text{zároveň} & S_2 = 0 \arrow[d, leftrightarrow] \\ -1 \arrow[r, "f"] & \infty & & \infty \end{tikzcd} \quad \Bigg\} \quad \underline{\alpha = S_2 = 0}$$

Poloměr: $2 \in f(K) \Rightarrow f^{-1}(2) = \dfrac{1-2}{2-\alpha} = \dfrac{-1}{2} \in K$

$$R_1 = |S_1 - f^{-1}(2)| = \left|-1 - \frac{-1}{2}\right| = \underline{\frac{1}{2}}$$

Elementární funkce

$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ $\qquad \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

$\ln z = \ln|z| + i \arg z$ $\qquad \cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

4) Ukažte, že $e^{\bar{z}}$ není diferencovatelná v žádném bodě $\mathbb{C}$.

Řešení

sudost cos, lichost sin

$f(z) = e^{\bar{z}} = e^{\overline{x+iy}} = e^{x-iy} = e^x \cdot (\cos(-y) + i \sin(-y)) = e^x \cos y - i e^x \sin y$

$u(x,y) = e^x \cos y$

$v(x,y) = -e^x \sin y$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y$$

CR1 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$

$$e^x \cos y = -e^x \cos y$$
$$\cos y = -\cos y$$
$$\cos y = 0$$

CR2 $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$-e^x \sin y = -(-e^x \sin y)$$
$$\sin y = -\sin y$$
$$\sin y = 0$$

neexistuje $y \in \mathbb{R}: \cos y = \sin y = 0$

$\Rightarrow f(z)$ není diferencovatelná pro žádné $z \in \mathbb{C}$

5) Nalezněte algebraický tvar komplexního čísla, jestliže

a) $z = \sin\left(\frac{\pi}{2} + i \ln 2\right)$

Řešení

$$z = \frac{e^{i(\frac{\pi}{2}+i\ln 2)} - e^{-i(\frac{\pi}{2}+i\ln 2)}}{2i} = \frac{e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\ln 2} - e^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{\ln 2}}{2i} \cdot \frac{-i}{-i} = \frac{-i\left(i (e^{\ln 2})^{-1} - (-i) \cdot e^{\ln 2}\right)}{2}$$

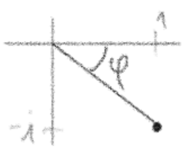
$$= \frac{2^{-1}+2}{2} = \frac{\frac{1}{2}+2}{2} = \frac{5}{4}$$

b) $z = \ln(1-i)$

Řešení

$$z = \ln|1-i| + i \arg(1-i) = \ln(\sqrt{2}) + i\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \ln(\sqrt{2}) - i\frac{\pi}{4}$$

$$|1-i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$



$$\varphi = -\frac{\pi}{4}$$

6) V oboru komplexních čísel řešte rovnice

a) $e^z = 1+i$

Řešení "postaru"

$$z = x+iy$$

$$e^x \cdot e^{iy} = \sqrt{2} \cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \overset{\text{cv1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \iff x = \ln\sqrt{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$z \in \left\{ \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Věta: $e^z = e^w \iff z = w + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$

Aternativní řešení

$$e^z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} = e^{\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4}} \iff z = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + i2k\pi$$

b) $e^{e^z}=1$

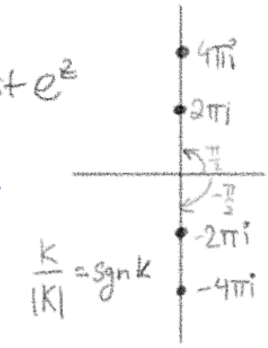
Řešení

$e^{e^z}=e^0$

$\iff e^z = 0+2k\pi i,\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ $e^z\neq 0$ je vlastnost e^z

$e^z = 2k\pi i = |2k\pi|\cdot e^{i\frac{\pi}{2}\frac{k}{|k|}} = e^{\ln|2k\pi| + i\frac{\pi}{2}\frac{k}{|k|}}$

$\iff z = \ln|2k\pi| + i\frac{\pi}{2}\frac{k}{|k|} + 2l\pi i,\ l\in\mathbb{Z}$



$\frac{k}{|k|} = \operatorname{sgn} k$

$z\in\left\{\ln|2k\pi| + i\frac{\pi}{2}\frac{k}{|k|} + 2l\pi i,\ l\in\mathbb{Z},\ k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}\right\}$

c) $\ln(z^2-1)=i\frac{\pi}{2}$

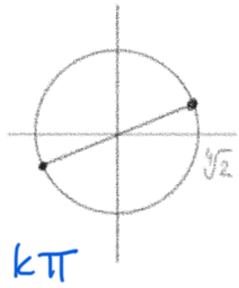
Řešení: exponenciála $e^{(\cdot)}$ $e^{\ln(z^2-1)} = e^{i\frac{\pi}{2}} \overset{!}{\Rightarrow} \ln(z^2-1) = i\frac{\pi}{2}+2k\pi i$ pro nějaké $k\in\mathbb{Z}$

$z^2-1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$z^2=1+i$

$z=|z|e^{i\varphi}$

$|z|^2 e^{i2\varphi} = \sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}} \iff \begin{cases}|z|^2=\sqrt{2} \iff |z|=\sqrt[4]{2}\\ 2\varphi = \frac{\pi}{4}+2k\pi \iff \varphi=\frac{\pi}{8}+k\pi\end{cases}$



$z\in\left\{\sqrt[4]{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{8}+k\pi)},\ k=0,1\right\}$ adepti na řešení

kontrola $\ln\left(\left(\sqrt[4]{2}\cdot e^{i(\frac{\pi}{8}+k\pi)}\right)^2-1\right) = \ln\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+2k\pi i}-1\right) = \ln(1+i-1) =$

$= \ln i = \ln|i| + i\arg(i) = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$ ✓ to jedno k je 0.

g) $\cos z = 4$

Řešení

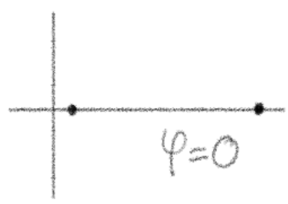
$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 4$

$e^{iz}+e^{-iz} = 8$ Položme $e^{iz}=x$. Pak $x\neq 0$.

$x + x^{-1} = 8 \quad |\cdot x$

$x^2+1-8x=0$

$x_{1,2} = \frac{+8\pm\sqrt{64-4}}{2} = 4\pm\sqrt{15} > 0$



$\Rightarrow e^{iz} = 4\pm\sqrt{15} = |4\pm\sqrt{15}|e^{0i} = e^{\ln(4\pm\sqrt{15})} \iff iz = \ln(4\pm\sqrt{15})+2k\pi i$
$k\in\mathbb{Z}$

$\iff z = -i\ln(4\pm\sqrt{15})+2k\pi$

$z\in\left\{-i\ln(4\pm\sqrt{15})+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$