

Komplexní analýza a transformace 2024/2025

Domácí úkol 2

Úloha 1. Určete reálnou $u(x, y)$ a imaginární část $v(x, y)$ funkce

$$f(z) = |z - \bar{z}|^2 + \operatorname{Re}(iz) + z^2$$

a pomocí Cauchyových–Riemannových podmínek určete, zda je funkce diferencovatelná v bodě $z = \frac{i}{4}$.

Funkce komplexní proměnné, Cauchyovy-Riemannovy podmínky, harmonické funkce

Připomenutí.

- Je-li $z = x + iy$ a $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, kde u, v jsou reálné funkce, pak $u = \operatorname{Re}(f)$ (**reálná část funkce f**) a $v = \operatorname{Im}(f)$ (**imaginární část funkce f**).
- Mějme funkci $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ takovou, že funkce $u(x, y)$ a $v(x, y)$ mají spojitě parciální derivace. Potom $f'(z)$ existuje právě tehdy, když jsou splněny **Cauchyovy-Riemannovy podmínky**:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y)$$

a

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

V takovém případě platí

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y).$$

- Funkce $f(z)$ se nazývá **holomorfní** na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$, jestliže je diferencovatelná pro každé $z \in \Omega$. Funkce $f(z)$ je **celistvá**, jestliže je holomorfní na celém $\mathbb{C}$.
- Funkce $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **harmonická**, kde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, jestliže má spojitě druhé parc. derivace a platí

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0 \quad \text{na } \Omega.$$

Podstatné je, že součet $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ je nulový v každém bodě množiny Ω . Tj. neřešíme, pro jaké body $(x, y) \in \Omega$ je součet nulový, ale zda je nulový vždy nezávisle na $(x, y) \in \Omega$.

- Máme-li $u: \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonickou funkci, pak funkci $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nazveme **harmonicky sdruženou** k u na Ω , jestliže funkce $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ je holomorfní na Ω .
- Pro hledání harmonicky sdružené funkce používáme C-R podmínky a integraci podle různých proměnných. Pozor, konstanta po integraci podle jedné proměnné může záviset na druhé proměnné!