II. Geometrie vektorů v prostoru

Vektory

Vektor (reálný, třídimenzionální) je uspořádaná trojice (x_1, x_2, x_3) reálných čísel x_1 ,x_2, x_3. Číslo x_1 nazýváme *první souřadnice* vektoru, číslo x_2 je *druhá souřadnice* vektoru, číslo x_3 je *třetí souřadnice* vektoru. Vektory v prostoru budeme opět označovat malými tučnými písmeny: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Kromě uvedeného řádkového zápisu budeme často používat také sloupcový zápis: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Pokud zvolíme v prostoru pravoúhlý systém souřadnic, můžeme vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ geometricky znázornit jako šipku (orientovanou úsečku), která má počáteční bod v počátku souřadnic $(0, 0, 0)$ a koncový bod v bodě o souřadnicích (x_1, x_2, x_3).

Jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dva vektory, pak definujeme *součet* vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ jako vektor $\mathbf{x} + \mathbf{u} = (x_1 + u_1, x_2 + u_2, x_3 + u_3)$. Podobně definujeme *součin* vektoru $\mathbf{x}$ a reálného čísla r jako vektor $r\mathbf{x} = (rx_1, rx_2, rx_3)$. Říkáme rovněž, že vektor $r\mathbf{x}$ je *skalárním násobkem* vektoru $\mathbf{x}$. Vektor $(-1)\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, -x_3)$ nazýváme *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{x}$ a označujeme jej také $-\mathbf{x}$.

Vektor $(0, 0, 0)$ nazýváme *nulový vektor* a označujeme jej $\mathbf{0}$. Vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ a $e_3 = (0, 0, 1)$ jsou vektory *standardní báze* v rovině.

Je-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \mathbf{0}$ nenulový vektor, pak všechny násobky $k\mathbf{x}$, kde $k \in \mathbf{R}$ je libovolné reálné číslo, leží na přímce procházející počátkem souřadnic a koncovým bodem (x_1, x_2, x_3) vektoru $\mathbf{x}$. A naopak každý bod této přímky můžeme vyjádřit ve tvaru $k\mathbf{x}$ pro vhodné reálné číslo k. Množinu vektorů

$$\{k\mathbf{x}; k \in \mathbf{R}\}$$

proto nazýváme *přímka určená vektorem* $\mathbf{x}$. Podobně definujeme (uzavřenou)polopřímku určenou vektorem $\mathbf{x}$ jako množinu $\{k\mathbf{x}; k \geq 0\}$. Otevřenou polopřímku definujeme analogicky. Polopřímka opačná k polopřímce určené vektorem $\mathbf{x}$ je polopřímka určená vektorem $-\mathbf{x}$. Podobně definujeme *uzavřenou úsečku* určenou vektorem $\mathbf{x}$ jako množinu vektorů

$$\{k\mathbf{x}; k \in [0, 1]\}.$$

Přímku určenou $\mathbf{e}_1$ (prvním vektorem standardní báze) nazýváme *první osa souřadnic*, zatímco přímka určená vektorem $\mathbf{e}_2$ je *druhá osa souřadnic* a přímka určená vektorem $\mathbf{e}_3$ je *třetí osa souřadnic*. Každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ můžeme jednoznačně vyjádřit jako součet

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

nějakého vektoru z první osy souřadnic, nějakého vektoru z druhé osy souřadnic a nějakého vektoru z třetí osy souřadnic.

Sčítání vektorů v prostoru a jejich násobení reálnými čísly má stejné vlastnosti jako operace s vektory v rovině:

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{x}$ pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$,
(2) $\mathbf{x} + (\mathbf{u} + \mathbf{a}) = (\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathbf{a}$ pro libovolné tři vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}$,
(3) existuje vektor $\mathbf{0}$ takový, že platí $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$,
(4) pro každý vektor $\mathbf{x}$ existuje vektor $-\mathbf{x}$ takový, že platí $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$,
(5) $r(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = r\mathbf{x} + r\mathbf{u}$ pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ a každé reálné číslo r,
(6) $(r + s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x}$ pro libovolná dvě reálná čísla r, s a každý vektor $\mathbf{x}$,
(7) $r(s(\mathbf{x})) = (rs)\mathbf{x}$ pro libovolná dvě reálná čísla r, s a každý vektor $\mathbf{x}$,
(8) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro každý vektor $\mathbf{x}$.

Všech osm vlastností si můžete sami dokázat, vyjádříte-li si všechny vektory pomocí souřadnic. Stejně tak si můžete dokázat, že $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$. *Rozdíl vektorů* $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$ definujeme jako vektor $\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{x} + (-\mathbf{u})$.

Definice II.1. Jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ dva vektory v prostoru, pak každý vektor tvaru

$$r\mathbf{a} + s\mathbf{b},$$

kde r, s jsou libovolná reálná čísla, nazýváme *lineární kombinace* vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Podobně jako v rovině říkáme, že dva vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou *lineárně závislé,* jestliže jeden z nich je skalárním násobkem druhého. Tři vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně závislé, jestliže jeden z nich je lineární kombinací zbylých dvou. Nejsou-li vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně závislé, říkáme rovněž, že jsou *lineárně nezávislé.*

Pokud jsou tři vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně nezávislé, znamená to že žádný z nich není lineární kombinací zbylých dvou. Speciálně tedy není žádný z nich nulový vektor. Dále žádný z nich není skalárním násobkem jiného, tj. každé dva z vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé.

Příklad Dokažte, že tři vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ jsou lineárně nezávislé, právě když z rovnosti $r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c} = \mathbf{0}$ plyne $r = s = t = 0$. Dokažte, že prvky standardní báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ jsou lineárně nezávislé.

Je-li $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, pak množina $\{k\mathbf{a}; k \in \mathbf{R}\}$ je *parametrické vyjádření přímky* v prostoru. Jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ dva lineárně nezávislé vektory, pak každá jejich lineární kombinace $r\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ leží v rovině určené vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Množinu $\{r\mathbf{a} + s\mathbf{b}; r, s \in \mathbf{R}\}$ nazýváme *parametrické vyjádření roviny.* Všimněte si, že jsou-li vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně nezávislé, pak žádný z nich neleží v rovině určené zbylými dvěma vektory.

Podobně jako v rovině, jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ dva vektory v prostoru, pak je množina $\{\mathbf{a} + k\mathbf{u}; k \in \mathbf{R}\}$ parametrické vyjádření přímky, která prochází bodem $\mathbf{a}$ a je rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u}$. Stejně tak jsou-li $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ dva lineárně nezávislé vektory a $\mathbf{a}$ libovolný vektor v prostoru, pak je množina $\{\mathbf{a} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}; r, s \in \mathbf{R}\}$ parametrické vyjádření roviny v prostoru, která prochází bodem $\mathbf{a}$ a je rovnoběžná s rovinou určenou vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$.

Skalární součin

Délkou vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ rozumíme vzdálenost bodů $(0,0,0)$ a (x_1, x_2, x_3), která se podle Pythagorovy věty rovná $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Délku vektoru $\mathbf{x}$ budeme označovat $|\mathbf{x}|$. Pro každé reálné číslo r platí

$$|r\mathbf{x}| = \sqrt{(rx_1)^2 + (ry_2)^2 + (rx_3)^2} = \sqrt{r^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)} = |r||\mathbf{x}|.$$

Vzdáleností vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ rozumíme délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{u}$, tj. reálné číslo $|\mathbf{x} - \mathbf{u}| = \sqrt{(x_1 - u_1)^2 + (x_2 - u_2)^2 + (x_3 - u_3)^2}$.

Je-li $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pak je délka $|\mathbf{x}| \neq 0$, vektor $|\mathbf{x}x|^{-1}|\mathbf{x}|$ leží na polopřímce určené vektorem $\mathbf{x}$ a má délku 1. Vektory délky 1 nazýváme *jednotkové vektory*. Jednotkové vektory leží na sféře se středem v počátku a poloměrem 1. Analogií polárního vyjádření vektorů v rovině jsou v prostoru *sférické souřadnice*. Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ jednotkový vektor v prostoru, platí $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$. Jelikož $|u_3| \leq 1$, existuje jednoznačně určený úhel $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ takový, že $u_3 = \sin\phi$. Potom $\sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{1 - u_3^2} = \sqrt{1 - \sin^2\phi} = \cos\phi$. Existuje tedy jednoznačně určený úhel $\theta \in [0, 2\pi)$ (polární úhel vektoru (u_1, u_2), pokud je nenulový, a 0, pokud $u_1 = u_2 = 0$) takový, že

$$u_1 = \cos\phi\cos\theta, \quad u_2 = \cos\phi\sin\theta.$$

Jde vlastně o zeměpisné souřadnice bodu $\mathbf{u}$, ϕ je zeměpisná šířka a θ je zeměpisná délka. Platí tedy, že každý nenulový vektor $\mathbf{x}$ v prostoru můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}|(\cos\phi\cos\theta, \cos\phi\sin\theta, \sin\phi).$$

Tomuto vyjádření říkáme *sférické souřadnice* bodu $\mathbf{x}$.

Skalárním součinem vektorů $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ a $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ nazýváme reálné číslo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = x_1u_1 + x_2u_2 + x_3u_3$.

Přímo z definice skalárního součinu v prostoru plyne, že pro každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ platí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = |\mathbf{x}|^2$. Stejně snadno jako v případě skalárního součinu vektorů v rovině si můžete sami ověřit následující vlastnosti skalárního součinu vektorů v prostoru:

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$,
(2) $(r\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ a libovolné reálné číslo r,
(3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ pro každé tři vektory $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}$.

Geometrický význam skalárního součinu dvou nenulových a lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ si ujasníme pomocí kosinové věty. V trojúhelníku s vrcholy $\mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{u}$ platí

$$|\mathbf{x} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{u}|\cos\theta,$$

kde θ je úhel, který svírají vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$.

Délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ můžeme spočítat také pomocí skalárního součinu:

$$|\mathbf{x} - \mathbf{u}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}).$$

Porovnáním obou výpočtů dostaneme rovnost $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{x}||\mathbf{u}|\cos\theta$. Skalární součin dvou nenulových vektorů se tedy rovná součinu jejich délek a cosinu úhlu, který svírají. Skalární součin dvou nenulových vektorů je tedy kladný, pokud oba vektory svírají ostrý úhel, a je záporný, pokud svírají tupý úhel. Skalární součin se rovná 0 právě když jsou oba vektory kolmé. Pokud je jeden z vektorů nulový, je skalární součin rovněž 0. Můžeme tedy definovat, že dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ jsou *kolmé (ortogonální)* pokud pro jejich skalární součin platí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$. Pomocí skalárního součinu můžeme stejně jako v rovině spočítat cosinus úhlu mezi dvěma vektory, případně zjistit, jsou-li ortogonální.

Dále se naučíme počítat ortogonální projekci $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ vektoru $\mathbf{u}$ na přímku určenou nenulovým vektorem $\mathbf{u}$. Libovolný bod na této přímce lze vyjádřit ve tvaru $t\mathbf{u}$, kde t je vhodné reálné číslo. Hledáme hodnotu parametru t, pro kterou je vektor $\mathbf{x} - t\mathbf{u}$ kolmý na $\mathbf{u}$, tj. pro kterou platí $(\mathbf{x} - t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$, neboli $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$. Odtud dostáváme

$$t = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}$$

a tedy

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{|\mathbf{u}|^2}\mathbf{u}.$$

Příklad Najděte souřadnice ortogonální projekce vektoru $\mathbf{b} = (3, 1, 1)$ na přímku určenou vektorem $\mathbf{a} = (1, 2, 1)$

Řešení dostaneme za použití právě odvozeného vzorce:

$$P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right)\mathbf{a} = \frac{6}{6}(1, 2, 1) = (1, 2, 1).$$

Dále se budeme zabývat výpočtem projekce $Q(\mathbf{x})$ vektoru $\mathbf{x}$ na rovinu kolmou k vektoru $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, pak je rovina dána (neparametrickou) rovnicí $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$. Vektor $\mathbf{x} - Q(\mathbf{x})$ má být kolmý k této rovině, neboli násobkem vektoru $\mathbf{u}$. Proto $\mathbf{x} - Q(\mathbf{x}) = t\mathbf{u}$ pro nějaké reálné číslo t. To znamená, že $\mathbf{x} - t\mathbf{u} = Q(\mathbf{x})$ leží v dané rovině, a proto $(\mathbf{x} - t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = 0$. Odtud vyplývá (podle odstavce před posledním příkladem), že $t\mathbf{u} = P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, neboli $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$.

Příklad Najděte projekci vektoru $\mathbf{x} = (3, 1, 1)$ na rovinu $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$.

Vzdálenost d vektoru $\mathbf{x}$ od roviny kolmé k vektoru $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ spočítáme snadno, neboť se rovná velikosti projekce $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ vektoru $\mathbf{x}$ na přímku určenou vektorem $\mathbf{u}$. Proto

$$d = |P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})| = \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|^2}|\mathbf{u}| = \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|}{|\mathbf{u}|}.$$

Jako další spočítáme vzdálenost d' vektoru $\mathbf{x}$ od přímky určené vektorem $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$. Tato vzdálenost se rovná velikosti vektoru $Q(\mathbf{x})$, který jsme spočítali výše. Protože vektory $\mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ a $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ jsou navzájem kolmé, platí

$$|Q(\mathbf{x})|^2 = |\mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})|^2 = |\mathbf{x}|^2 - |P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})|^2 = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}|^2}{|\mathbf{u}|^2}.$$

Platí proto

$$|Q(\mathbf{x})| = \sqrt{\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} - \frac{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})^2}{(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})^2}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{x}\cdot\mathbf{x})(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}) - (\mathbf{x}\cdot\mathbf{u})^2}}{|\mathbf{u}|}.$$

Toho dále využijeme při výpočtu plochy rovnoběžníku určeného dvěma nenulovými vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Právě jsme spočítali vzdálenost koncového bodu vektoru $\mathbf{a}$ od přímky určené vektorem $\mathbf{b}$. Tu vynásobíme délkou vektoru $\mathbf{b}$ a dostaneme tak plochu rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$:

$$|\mathbf{b}|\frac{1}{|\mathbf{b}|}\sqrt{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2} = \sqrt{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2}.$$

Vektorový součin

Pokusme se vyřešit soustavu dvou rovnic o třech neznámých

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0,\\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Označíme-li $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektory koeficientů a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ vektor neznámých, můžeme soustavu přepsat ve vektorovém tvaru

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} &= 0,\\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

Nějaký vektor $\mathbf{x}$ vyhovující soustavě můžeme najít třeba tak, že vynásobíme první rovnici číslem b_1, druhou rovnici a_1 a pak je odečteme. Dostaneme postupně

$$\begin{aligned} a_1b_1x_1 + a_2b_1x_2 + a_3b_1x_3 &= 0,\\ a_1b_1x_1 + a_1b_2x_2 + a_1b_3x_3 &= 0, \end{aligned}$$

a tedy

$$(a_2b_1 - a_1b_2)x_2 + (a_3b_1 - a_1b_3)x_3 = 0.$$

Stejně tak můžeme vynásobit první rovnici b_2, druhou a_2 a odečíst, dostaneme:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x_1 + (a_3b_2 - a_2b_3)x_3 = 0.$$

Podíváme-li se pozorně na obě nově získané rovnice, můžeme přímo napsat jedno možné řešení původní soustavy:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_2b_3 - a_3b_2,\\ x_2 &= a_3b_1 - a_1b_3,\\ x_3 &= a_1b_2 - a_2b_1. \end{aligned}$$

Definice II.2. Jsou-li $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dva vektory v prostoru, pak definujeme jejich *vektorový součin* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ jako vektor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

Přímým výpočtem se přesvědčíme, že vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je skutečně kolmý k vektorům $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Platí

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = a_1(a_2b_3 - a_3b_2) + a_2(a_3b_1 - a_1b_3) + a_3(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$$

Zcela stejně vyjde rovněž $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

Stejně snadno si můžete přímým výpočtem ověřit následující vlastnosti vektorového součinu:

(1) $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$ pro každý vektor $\mathbf{a}$,
(2) $\mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ pro libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$,
(3) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ pro všechny vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$,
(4) $(t\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = t(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ pro každý skalár t a libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Příklad Spočítejte vektorové součiny $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_3$ pro standardní bázi e_1, e_2, e_3.

Příklad Dokažte, že pro libovolné vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ platí $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Dále si dokážeme následující důležité tvrzení.

Věta II.1. Dva vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou lineárně závislé právě když $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Důkaz. Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, pak $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Pokud $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, pak z předpokladu lineární závislosti $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ vyplývá, že $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ pro nějaké číslo t. Potom $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (t\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = t(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}$.

Nechť naopak platí $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$. Označme $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$. Je-li $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, jsou vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárně závislé. Je-li $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, je aspoň jedna ze souřadnic, řekněme b_3, různá od 0. Potom z rovnosti $a_3b_2 - a_2b_3 = 0$ vyplývá $a_2 = (a_3/b_3)b_2$ a z rovnosti $a_3b_1 - a_1b_3 = 0$ vyplývá $a_1 = (a_3/b_3)b_1$. Protože rovněž $a_3 = (a_3/b_3)b_3$, platí $\mathbf{a} = (a_3/b_3)\mathbf{b}$. Vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou proto lineárně závislé. $\square$

Pomocí této věty a předcházejícího příkladu snadno vyřešíte následující příklad.

Příklad Jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně závislé vektory, pak platí $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

Příklad Plocha rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, kde $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, se rovná $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.

Návod. Využijte toho, že užvíme, že druhá mocnina plochy rovnoběžníku se rovná $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$. Úpravami tohoto výrazu dostanete druhou mocninu délky vektorového součinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

Věta II.1 a poslední příklad do velké míry vyjasňují geometrický význam vektorového součinu dvou vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Jsou-li tyto vektory lineárně nezávislé, pak $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$

je nenulový vektor kolmý jak k vektoru $\mathbf{a}$ tak i k vektoru $\mathbf{b}$. Jeho délka se rovná obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Tyto vlastnosti má kromě vektorového součinu $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ také opačný vektor $-(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$. Geometrický význam znaménka si ujasníme později. Jsou-li vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárně závislé, pak podle Věty II.1 je $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ a tedy i v tomto případě je vektorový součin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ roven obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Následující cvičení obsahuje zajímavé třídimenzionální zobecnění Pythagorovy věty. Dokážete jej snadno pomocí příkladu před Větou II.1.

Příklad Nechť $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ jsou dva vektory v prostoru. Označme Γ rovnoběžník určený těmito vektory. Dále označme Γ_{12} projekci tohoto rovnoběžníku do roviny určené vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ standardní báze, tj. rovnoběžník určený vektory $(a_1, a_2, 0)$ a $(b_1, b_2, 0)$. Podobně označíme Γ_{23} rovnoběžník určený vektory $(0, a_2, a_3)$ a $(0, b_2, b_3)$ (projekce Γ do roviny určené $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$) a Γ_{13} rovnoběžník určený vektory $(a_1, 0, a_3)$ a $(b_1, 0, b_3)$ (projekce Γ do roviny určené vektory $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3$). Potom platí, že čtverec obsahu rovnoběžníku Γ se rovná součtu čtverců obsahů rovnoběžníků Γ_{12}, Γ_{13} a Γ_{23}. Dokažte.

Dále si ukážeme, jak spočítat obsah rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ v prostoru. Tyto vektory určují rovnoběžnostěn $\Delta = \{r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}; r, s, t \in [0, 1]\}$. Jsou-li vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně nezávislé, pak se vzdálenost vektoru $\mathbf{c}$ od roviny určené vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ rovná délce projekce vektoru $\mathbf{c}$ do přímky určené vektorovým součinem $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Tato vzdálenost se tedy rovná

$$\frac{|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}.$$

Základna rovnoběžnostěnu, tj. rovnoběžník určený vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$, má plochu $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Objem Δ se proto rovná $|\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})|$.

Jsou-li vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně závislé, leží všechny tři v jedné rovině a objem rovnoběžnostěnu Δ je proto $0 = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, jak vyplývá z jednoho z předchozích příkladů.

Věta II.2. Jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ tři lineárně nezávislé vektory v prostoru, pak lze každý vektor $\mathbf{y}$ vyjádřit jednoznačně ve tvaru $\mathbf{y} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$, tj. jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

Důkaz. Vektor $\mathbf{c}$ není lineární kombinací vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ a proto neleží v rovině určené těmito vektory. Přímka $\{\mathbf{y} - t\mathbf{c}; t \in \mathbf{R}\}$ procházející bodem $\mathbf{y}$ rovnoběžně s vektorem $\mathbf{c}$ proto není rovnoběžná s rovinou určenou vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Existují proto hodnoty parametrů r, s, t, které vyjadřují průsečík této přímky a roviny určené $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Pro tyto hodnoty parametrů r, s, t pak platí

$$\mathbf{y} - t\mathbf{c} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b},$$

tj. $\mathbf{y} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$.

Toto vyjádření je jednoznačné. Je-li totiž $\mathbf{y} = r'\mathbf{a} + s'\mathbf{b} + t'\mathbf{c}$ jiné vyjádření $\mathbf{y}$ jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, pak odečtením obou vyjádření dostaneme rovnost

$$\mathbf{0} = (r - r')\mathbf{a} + (s - s')\mathbf{b} + (t - t')\mathbf{c}.$$

Z lineární nezávislosti vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ ale vyplývá, že $r = r'$, $s = s'$ a $t = t'$. $\square$

Jako poslední si v části o vektorovém součinu ukážeme nutnou a postačující podmínku pro existenci nenulového řešení soustavy rovnic

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 &= 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 &= 0, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Řešením soustavy jsou takové vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, které jsou kolmé k vektorům $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Věta II.2 naznačuje, že k existenci netriviálního řešení této soustavy je nutné, aby byly vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně závislé, neboli ležely v jedné rovině. Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, neboli (smíšený) součin $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$, musí být roven 0. Dokážeme si nyní, že netriviální řešení soustavy skutečně existuje právě když $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$.

Nechť jsou tedy vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárně závislé, neboli $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$. Jsou-li už vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárně závislé, leží všechny tři vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ v jedné rovině a proto existuje nenulový vektor $\mathbf{x}$, který je k této rovině kolmý. Tento vektor $\mathbf{x}$ je potom nenulovým řešením dané soustavy.

Jsou-li vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárně nezávislé, je $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ nenulový vektor, který je kolmý k $\mathbf{a}$ i k $\mathbf{b}$. Na základě předpokladu $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ je vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ rovněž kolmý k $\mathbf{c}$ a je tedy nenulovým řešením dané soustavy.

Je-li naopak $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \neq 0$, musí být $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, a tedy vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ jsou lineárně nezávislé. Vektor $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ je potom nenulový vektor kolmý k rovině určené $\mathbf{a}, \mathbf{b}$. Každý jiný vektor kolmý k této rovině je pak skalárním násobkem $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Je-li tedy vektor $\mathbf{x}$ řešením naší soustavy, je kolmý k rovině určené $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ a existuje tedy skalár t takový, že $\mathbf{x} = t(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$. Protože rovněž $\mathbf{x} \cdot \mathbf{c} = 0$, platí $t(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot c = t((\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}) = t(\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})) = 0$. Protože předpokládáme $\mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \neq 0$, musí být $t = 0$ a tedy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Lineární transformace v prostoru

Na začátek opět několik příkladů.

Příklad Popište zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ v prostoru přiřadí jeho pravoúhlou projekci na přímku určenou vektorem $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$.

Řešení. V předchozí části jsme si ukázali, že označíme-li toto zobrazení $P_{\mathbf{u}}$, pak platí

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u} = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) (1, 1, 1).$$

Pro souřadnice (y_1, y_2, y_3) vektoru $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ pak platí

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ y_2 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3, \\ y_3 &= \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3. \end{aligned}$$

Příklad Popište osovou symetrii $S_{\mathbf{u}}$ vzhledem k přímce určené vektorem $\mathbf{u} = (1,1,1)$.

Řešení. Stejně jako v rovině je vektor $S_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ charakterizován podmínkou, že projekce $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ je středem úsečky s koncovými body $\mathbf{x}$ a $S_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$. Proto $S_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 2P_{\mathbf{u}}(x) - \mathbf{x}$, tj. označíme-li (y_1, y_2, y_3) souřadnice vektoru $S_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, pak platí

$$\begin{aligned}
y_1 &= (-\frac{1}{3})x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3,\\
y_2 &= \frac{2}{3}x_2 + (-\frac{1}{3})x_2 + \frac{2}{3}x_3,\\
y_3 &= \frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + (-1)\frac{1}{3}x_3.
\end{aligned}$$

Příklad Popište projekci Q na rovinu kolmou k vektoru $\mathbf{u} = (1,1,1)$.

Řešení. Ukázali jsme si už, že pro každý vektor $\mathbf{x}$ platí $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, a tedy

$$Q\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad Popište symetrii R vzhledem k rovině kolmé k vektoru $\mathbf{u} = (1,1,1)$.

Řešení. Stejně jako v rovině platí, že projekce $Q(\mathbf{x})$ vektoru $\mathbf{x}$ na rovinu kolmou k vektoru $\mathbf{u} = (1,1,1)$ je středem úsečky s krajními body $\mathbf{x}$ a $R(\mathbf{x})$. Z rovnosti $Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + R(\mathbf{x}))$ vyplývá $R(\mathbf{x}) = 2Q(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$. Proto

$$R\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\\ -\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3\\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3\\ -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_3\\ -\frac{2}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad Dilatace D_r se středem v počátku souřadnic a koeficientem r je popsána rovností

$$D_r\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} rx_1\\ rx_2\\ rx_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad Rotace R^1_θ kolem osy určené vektorem $\mathbf{e}_1$ (prvním vektorem standardní báze) o úhel θ v kladném směru je popsána rovností

$$R^1_\theta\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\\ (\cos\theta)x_2 - (\sin\theta)x_3\\ (\sin\theta)x_2 + (\cos\theta)x_3 \end{pmatrix}.$$

Na tomto místě je nutné podrobněji se zmínit o tom, co se myslí kladným směrem rotace v třídimenzionálním prostoru. Rotace v rovině určené vektory $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ je proti směru nebo ve směru hodinových ručiček podle toho, ze kterého poloprostoru určeného rovinou $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se na tuto rovinu díváme. Díváme-li se z poloprostoru, ve kterém leží vektor $\mathbf{e}_1$, pak je úhel mezi vektory $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$ roven $\pi/2$. Díváme-li se z poloprostoru, ve kterém leží vektor $-\mathbf{e}_1$, pak je úhel mezi vektory $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$ roven $-\pi/2$. Otočením kolem osy určené vektorem $\mathbf{e}_1$ o úhel θ v kladném směru se rozumí otočení proti směru hodinových ručiček, díváme-li se na rovinu určenou $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ z poloprostoru obsahujícího vektor $\mathbf{e}_1$.

Nyní si můžete sami ověřit správnost popisu následujících dvou rotací.

Příklad Rotace R^3_θ kolem osy určené vektorem $\mathbf{e}_3$ o úhel θ v kladném směru je popsána rovností

$$R^3_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)x_1 - (\sin\theta)x_2 \\ (\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Příklad Rotace R^2_θ kolem osy určené vektorem $\mathbf{e}_2$ o úhel θ v kladném směru je popsána rovností

$$R^2_\theta \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\cos\theta)x_1 + (\sin\theta)x_2 \\ x_2 \\ (-\sin\theta)x_1 + (\cos\theta)x_3 \end{pmatrix}.$$

Lineární transformace v prostoru a matice

Všechny transformace, které jsme si uvedli v předcházející části, měly podobný tvar:

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Definice II.3. Zobrazení v prostoru, které každému vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ přiřazuje vektor $T(\mathbf{x})$ definovaný předcházející rovností, kde a_{ij} jsou libovolná reálná čísla pro $i, j = 1, 2, 3$, se nazývá *lineární zobrazení (transformace)* v prostoru. Matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

se nazývá *matice zobrazení* T a označuje se $m(T)$.

Prvek a_{ij} se nachází v i-tém řádku a v j-tém sloupci matice, první index i je *řádkový index*, druhý index j je *sloupcový index*.

Matice identického zobrazení $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ se rovná

$$m(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a nazývá se *jednotková matice* řádu 3. Podobně matice nulového zobrazení $O(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ se nazývá *nulová matice* řádu 3. Její prvky jsou samé nuly. Matice dalších lineárních zobrazení vyčtete z příkladů v předchozí části.

Dále si ukážeme dvě základní vlastnosti lineárních transformací. Je-li T lineární transformace v prostoru, pak platí

(1) $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$,
(2) $T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x}$ a libovolné reálné číslo k.

Ukážeme si například vlastnost (2). Je-li

$$m(T) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, pak platí

$$\begin{aligned} T(k\mathbf{x}) = T\begin{pmatrix} kx_1 \\ kx_2 \\ kx_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11}kx_1 + a_{12}kx_2 + a_{13}kx_3 \\ a_{21}kx_1 + a_{22}kx_2 + a_{23}kx_3 \\ a_{31}kx_1 + a_{32}kx_2 + a_{33}kx_3 \end{pmatrix} = \\ &= k\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = kT(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Následující věta ukazuje, že podmínky (1) a (2) lineární zobrazení charakterizují.

Věta II.3. Zobrazení T, které každému vektoru $\mathbf{x}$ v prostoru přiřazuje vektor $T(\mathbf{x})$, je lineární právě tehdy, když splňuje podmínky (1), (2).

Důkaz. To, že každé lineární zobrazení splňuje také podmínku (1), si můžete dokázat sami. Nechť naopak má zobrazení T vlastnosti (1) a (2). Každý vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ si můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$. Z podmínek (1) a (2) pak plyne

$$T(\mathbf{x}) = T(x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3) = x_1T(\mathbf{e}_1) + x_2T(\mathbf{e}_2) + x_3T(\mathbf{e}_3).$$

Označme si vektory

$$T(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad T(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

Potom platí

$$T(\mathbf{x}) = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 \\ a_{21}x_1 \\ a_{31}x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 \\ a_{32}x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{13}x_3 \\ a_{23}x_3 \\ a_{33}x_3 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}.$$

Zobrazení T je proto lineární. $\square$

Stejně jako v rovině je důležité si všimnout, že první sloupec matice $m(T)$ se rovná obrazu $T(\mathbf{e}_1)$ prvního vektoru standardní báze zobrazením T, druhý sloupec se rovná vektoru $T(\mathbf{e}_2)$ a třetí sloupec $m(T)$ se rovná vektoru $T(\mathbf{e}_3)$. To je důležité, hledáme-li matici nějakého lineárního zobrazení.

Příklad Najděte matici projekce $P_\mathbf{u}Q$ na přímku určenou vektorem $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Řešení. Víme už, že pro každý vektor $\mathbf{x}$ platí

$$P_\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{u}}{\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}}\right)\mathbf{u}.$$

Potom

$$P_\mathbf{u}(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{u_1^2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ \frac{u_1u_2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ \frac{u_1u_3}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \end{pmatrix}, \quad P_\mathbf{u}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} \frac{u_2u_1}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ \frac{u_2^2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ \frac{u_2u_3}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \end{pmatrix}, \quad P_\mathbf{u}(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} \frac{u_3u_1}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ \frac{u_3u_2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ \frac{u_3^2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \end{pmatrix}.$$

Proto

$$m(P_\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{u_1^2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} & \frac{u_2u_1}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} & \frac{u_3u_1}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ \frac{u_1u_2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} & \frac{u_2^2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} & \frac{u_3u_2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \\ \frac{u_1u_3}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} & \frac{u_2u_3}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} & \frac{u_3^2}{u_1^2+u_2^2+u_3^2} \end{pmatrix}.$$

Stejně jako v rovině platí následující věta.

Věta II.4. Buď T lineární zobrazení v prostoru. Obraz $T(L)$ libovolné přímky L je buď bod nebo přímka. Obraz $T(P)$ libovolné roviny P je buď bod, přímka nebo rovina.

Důkaz. Ukážeme si jej pouze v případě roviny. Pro přímku je důkaz zcela stejný jako důkaz Věty I.2. Nechť

$$P = \{\mathbf{a} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}; r, s \in \mathbf{R}\}$$

je parametrické vyjádření roviny procházející bodem $\mathbf{a}$ a rovnoběžné se dvěma lineárně nezávislými vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Potom platí (protože T má vlastnosti (1), (2)):

$$T(P) = \{T(\mathbf{a}) + rT(\mathbf{u}) + sT(\mathbf{v}); r, s \in \mathbf{R}\}.$$

Jsou-li vektory $T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})$ lineárně nezávislé, je $T(P)$ parametrické vyjádření roviny procházející bodem $T(\mathbf{a})$ a rovnoběžné s rovinou určenou vektory $T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})$. Je-li naopak $T(\mathbf{u}) = T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, rovná se obraz $T(P)$ jedinému bodu $T(\mathbf{a})$. A nakonec, jsou-li vektory $T(\mathbf{u}), T(\mathbf{v})$ lineárně závislé a např. $T(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, pak $T(\mathbf{v}) = kT(\mathbf{u})$ pro nějaké reálné číslo k a

$$T(P) = \{T(\mathbf{a}) + (r + ks)\mathbf{u}; r, s \in \mathbf{R}\}$$

je parametrické vyjádření přímky procházející bodem $T(\mathbf{a})$ rovnoběžné s vektorem $T(\mathbf{u})$. Všimněte si, že jeden a ten samý bod této přímky můžeme dostat různými volbami parametrů r, s. To odpovídá tomu, že do jednoho bodu přímky $T(P)$ se zobrazí různé body roviny P. $\square$

Součet a součin matic a lineárních zobrazení

Stejně jako v případě roviny definujeme *součet* dvou lineárních transformací S, T v prostoru jako transformaci $S + T$, která každému vektoru $\mathbf{x}$ přiřazuje vektor $(S+T)(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) + T(\mathbf{x})$. Podobně *součin* lineární transformace T a reálného čísla k je transformace kT, která vektor $\mathbf{x}$ zobrazuje do vektoru $(kT)(\mathbf{x}) = k(T(\mathbf{x}))$.

Podobně definujeme součet matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

a matice

$$N = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

jako matici

$$M + N = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}$$

a součin matice M se skalárem k jako matici

$$kM = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem si snadno dokážete, že pro matice lineárních zobrazení v prostoru platí

$$m(S + T) = m(S) + m(T), \quad m(kT) = km(T).$$

Součet lineárních zobrazení je tedy rovněž lineární zobrazení, stejně tak součin lineárního zobrazení a skaláru je také lineární zobrazení.

Součin lineárních transformací S, T je zobrazení $(ST)(\mathbf{x}) = S(T(\mathbf{x}))$. Jsou-li $m(S) = (a_{ij})$ a $m(T) = (b_{jk})$ matice těchto lineárních transformací, můžeme podobně jako v rovině spočítat matici $m(ST)$ součinu zobrazení ST:

$$M(ST) = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Tuto matici nazýváme *součin matic* $m(S)$ a $m(T)$. Všimněte si, že prvek na místě (ij) v součinu je roven skalárnímu součinu i-tého řádku matice $m(S)$ a j-tého řádku matice $m(T)$. Platí proto věta

Věta II.5. Jsou-li S, T lineární transformace v prostoru, pak platí

$$m(ST) = m(S)m(T).$$

□

Věta II.6. Pro každé tři lineární transformace R, S, T v prostoru platí $R(ST) = (RS)T$ a

$$m(R)(m(S)m(T)) = (m(R)m(S))m(T).$$

□

Důkaz je opět zcela stejný jako v rovině. Platí proto i

Důsledek Násobení matic je asociativní. □

Je-li $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ jednotkový vektor, pak projekce $P_\mathbf{u}$ na přímku určenou vektorem $\mathbf{u}$ má matici

$$m(P_\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_2u_1 & u_3u_1 \\ u_1u_2 & u_2^2 & u_3u_2 \\ u_1u_3 & u_2u_3 & u_3^2 \end{pmatrix}.$$

Matice osové symetrie $Q_\mathbf{u}$ vzhledem k ose určené vektorem $\mathbf{u}$ se tedy rovná

$$m(2P_\mathbf{u} - I) = 2m(P_\mathbf{u}) - m(I) = \begin{pmatrix} 2u_1^2 - 1 & 2u_2u_1 & 2u_3u_1 \\ 2u_1u_2 & 2u_2^2 - 1 & 2u_3u_2 \\ 2u_1u_3 & 2u_2u_3 & 2u_3^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně si můžete spočítat matice projekce na rovinu kolmou k vektoru $\mathbf{u}$ a symetrie určené touto rovinou.

Matice zkosení E_{ij}^s, kde $i \neq j$, je matice, která má na hlavní diagonále prvky 1 a na místě (i, j) prvek s. Např.

$$E_{12}^s = \begin{pmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_{31}^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Permutační matice P_{ij}, kde $i \neq j$ je matice, kterou dostaneme z jednotkové matice prohozením i-tého a j-tého řádku. Např.

$$P_{12}^s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13}^s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Těmto dvěma typům matic se říká *elementární matice.* Elementární matice jsou rovněž matice

$$D_1^r = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_2^s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D_3^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Tyto matice jsou rovněž speciálním případem *diagonálních matic:*

$$\begin{pmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Vyzkoušejte si, jak vypadají matice $E_{ij}^s M$, ME_{ij}^s, $P_{ij}M$, MP_{ij}, $D_i^t M$, MD_i^t, jak souvisejí s maticí M.

Inverzní zobrazení a matice

Stejně jako v případě lineárních transformací v rovině říkáme, že lineární transformace S v prostoru je inverzní k lineární transformaci T, jestliže platí $ST = I = TS$. Důkaz, že inverzní transformace k T, pokud existuje, je určená jednoznačně, lze přenést z roviny do prostoru beze změny. Pokud tedy inverzní transformace k T existuje, budeme ji značit T^{-1}.

Příklad Dokažte, že $D_r^{-1} = D_{1/r}$ a že inverzní transformace k R_θ^1 se rovná $R_{-\theta}^1$. Najděte inverzní transformaci k transformaci A, jejíž matice $m(A)$ se rovná

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Je-li T lineární transformace v prostoru a $\mathbf{u}$ vektor, můžeme uvažovat rovnici $T(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$. Je to vlastně soustava tří lineárních rovnic o třech neznámých. Existuje-li transformace S inverzní k T, pak platí

$$\mathbf{x} = I(\mathbf{x}) = ST(\mathbf{x}) = S(\mathbf{u}).$$

Vektor $S(\mathbf{u})$ je tedy jediným možným řešením rovnice $T(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$. Skutečně jím také je, jak se přesvědčíme dosazením:

$$T(S(\mathbf{u})) = (TS)(\mathbf{u}) = I(\mathbf{u}) = \mathbf{u}.$$

Pokud tedy existuje inverzní transformace k T, má rovnice $T(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ právě jedno řešení pro každou pravou stranu $\mathbf{u}$.

Nechť má naopak rovnice $T(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ právě jedno řešení pro jakoukoliv pravou stranu $\mathbf{u}$. Označme toto řešení $S(\mathbf{u})$. Platí proto $T(S(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u}$, neboli $TS = I$. Je-li naopak $\mathbf{x}$ libovolný vektor, označme $\mathbf{u} = T(\mathbf{x})$. Tento vektor $\mathbf{x}$ je tedy jediným řešením rovnice $T(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$. Proto $\mathbf{x} = S(\mathbf{u})$ a $\mathbf{x} = S(\mathbf{u}) = S(T(\mathbf{x})) = (ST)(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x}$, tedy $ST = I$.

Zobrazení S je proto inverzní k transformaci T. Je ale také *lineární?* Zvolme libovolné dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$. Potom platí (protože T lineární je):

$$T(S(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v})) = T(S(\mathbf{u})) + T(S(\mathbf{v})) = (TS)(\mathbf{u}) + (TS)(\mathbf{v}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

Proto je $S(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v})$ řešením rovnice $T(\mathbf{x}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, neboli $S(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = S(\mathbf{u}) + S(\mathbf{v})$. Podobně ukážeme, že

$$T(kS(\mathbf{u})) = kT(S(\mathbf{u})) = kI(\mathbf{u}) = k\mathbf{u}$$

a tedy $S(k\mathbf{u}) = kS(\mathbf{u})$. Zobrazení S je tedy opravdu lineární transformace v prostoru. Dokázali jsme tak následující větu.

Věta II.7. K lineární transformaci T existuje inverzní transformace právě když rovnice

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$$

má právě jedno řešení pro jakoukoliv pravou stranu $\mathbf{u}$. $\square$

Dokážeme si nyní třídimenzionální analogii Věty I.5, která charakterizuje invertibilní lineární transformace v rovině.

Věta II.8. Nechť T je lineární transformace v prostoru s maticí

$$m(T) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Označme postupně $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$ řádkové vektory matice $m(T)$. Potom inverzní transformace k T existuje právě tehdy když $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$.

Důkaz. Nechť existuje inverzní transformace k T. Potom z Věty II.7 a rovnosti $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, která platí pro každou lineární transformaci, plyne, že homogenní soustava $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ má pouze nulové řešení. V závěru části o vektorovém součinu jsme si ukázali, že pak platí $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$.

Nechť naopak $\Delta = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq 0$. Chceme vypočítat matici

$$m(T^{-1}) = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Potom musí platit

$$T^{-1}(\mathbf{e}_1) = T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, \quad T^{-1}(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}, \quad T^{-1}(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}.$$

Rovnosti

$$T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

jsou ekvivalentní a ta druhá znamená najít řešení soustavy

$$\begin{aligned} a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 &= 1,\\ b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 &= 0,\\ c_1u_1 + c_2u_2 + c_3u_3 &= 0. \end{aligned}$$

Protože platí

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= \Delta,\\ \mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= 0,\\ \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= 0, \end{aligned}$$

je

$$\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\Delta}$$

řešením naší soustavy. Proto

$$\frac{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\Delta} = T^{-1}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Podobně pomocí rovností $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ dokážeme

$$\frac{(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{\Delta} = T^{-1}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

a

$$\frac{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\Delta} = T^{-1}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Z definice vektorového součinu dostáváme

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & b_3\\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} b_3 & b_1\\ c_3 & c_1 \end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} b_1 & b_2\\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{c}\times\mathbf{a}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}c_3 & c_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}\end{pmatrix},$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}.$$

Pro matici inverzního zobrazení proto platí

$$m(T^{-1})=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}c_2 & c_3\\ a_2 & a_3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}c_3 & c_1\\ a_3 & a_1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}c_1 & c_2\\ a_1 & a_2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\end{pmatrix}.$$

$\square$

Spočítejte si sami inverzní matice k elementárním a diagonálním maticím.

Determinant

V rovině platí, že k lineární transformaci T s maticí $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ existuje inverzní transformace právě když $ad-bc\neq 0$. Toto číslo jsme nazvali determinantem matice $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, viz Definice I.5.

Definice II.4. Jsou-li $\mathbf{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2,b_3)$ a $\mathbf{c}=(c_1,c_2,c_3)$ tři vektory v prostoru, pak *determinantem* matice

$$M=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}$$

nazýváme číslo $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ a značíme jej $|M|$.

Přímým výpočtem přímo z definice dostaneme, že

$$\begin{aligned}|M| &= a_1\begin{vmatrix}b_2 & b_3\\ c_2 & c_3\end{vmatrix}+a_2\begin{vmatrix}b_3 & b_1\\ c_3 & c_1\end{vmatrix}+a_3\begin{vmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{vmatrix}\\ &= a_1b_2c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3-a_3b_2c_1.\end{aligned}$$

K lineární transformaci T tak podle Věty II.8 existuje inverzní transformace T^{-1} právě když $|m(T)| \neq 0$. Spočítejte si determinanty elementárních matic a diagonálních matic. Stejně tak si můžete přímým výpočtem (jednoduchým ale pracným) dokázat, že pro každé dvě matice M, N (řádu 3) platí $|NM| = |N| \cdot |M|$.

Závěrem části o geometrii vektorů v prostoru si ukážeme geometrický význam determinantu a znaménka vektorového součinu. Jsou-li $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ dva vektory v prostoru, pak velikost vektoru $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Jsou-li tyto vektory lineárně nezávislé, pak je $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ nenulový vektor kolmý k rovině určené vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Díváme-li se na tuto rovinu z poloprostoru obsahujícího vektor $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$, je úhel mezi vektory $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ měřený v kladném směru menší než π. V rovině jsme tomu říkali, že vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ jsou kladně orientované. Díváme-li se na rovinu určenou vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ z poloprostoru obsahujícího vektor $-(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)$, je úhel mezi vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ měřený v kladném směru (proti směru hodinových ručiček) v intervalu $(\pi, 2\pi)$, vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ jsou v tomto případě orientované záporně.

Definice II.5. Je-li trojice vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ lineárně nezávislá, pak říkáme, že je *kladně orientovaná,* jestliže $(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}_3 > 0$. Je-li $(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}_3 < 0$, říkáme, že je trojice vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ *orientovaná záporně.*

Jinými slovy, znaménko vektoru $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ je zvoleno tak, aby trojice vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ byla orientovaná kladně (podle pravé ruky). Obecná lineárně nezávislá trojice vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ je orientovaná kladně, leží-li vektory $\mathbf{x}_3$ a $\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$ v témže poloprostoru definovaném rovinou určenou vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Je orientovaná záporně, leží-li v opačných poloprostorech.

Nyní si zavedeme pomocné označení. Jsou-li dány vektory

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix},$$

pak symbolem $(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3)$ budeme značit matici

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{22} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Přímým výpočtem si můžete dokázat, že platí

$$|(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3)| = (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}_3.$$

Tím dokážete následující tvrzení.

Věta II.9. Trojice $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ je kladně orientovaná právě když $|(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3)| > 0$ a je orientovaná záporně právě když $|(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3)| < 0$.

Definice II.6. Říkáme, že lineární transformace v prostoru T *zachovává orientaci*, jestliže pro každou kladně orientovanou trojici $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ platí, že také trojice

$T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), T(\mathbf{x}_3)$ je rovněž kladně orientovaná. Transformace T *obrací orientaci*, je-li pro každou kladně orientovanou trojici $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ trojice $T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), T(\mathbf{x}_3)$ záporně orientovaná.

Ve Větě I.6 jsme dokázali, že lineární transformace roviny zachovává orientaci právě když je determinant její matice kladný, a že orientaci obrací právě když je determinant její matice záporný. Přímým výpočtem (tentokrát o něco delším) si můžete dokázat třídimenzionální analogii Věty I.6.

Věta II.10. Buď T lineární transformace v prostoru. Potom T zachovává orientaci právě když $|m(T)| > 0$ a obrací orientaci právě když $|m(T)| < 0$. $\square$

Před Větou II.2 jsme si ukázali, že objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ se rovná absolutní hodnotě smíšeného součinu $\mathbf{x}_3 \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) = (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{x}_3$. Pokud jste si provedli výpočet před Větou II.9, dokázali jste rovněž následující tvrzení.

Věta II.11. Objem rovnoběžnostěnu Π určeného vektory $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ a $\mathbf{x}_3$ se rovná $|(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3)|$. $\square$

Tím jsme si plně ozřejmili geometrický význam determinantu matice $(\mathbf{x}_1|\mathbf{x}_2|\mathbf{x}_3)$. Absolutní hodnota tohoto determinantu se rovná objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$. Je-li tento determinant nenulový, tj. jsou-li vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ lineárně nezávislé, pak je determinant kladný právě když je trojice $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ kladně orientovaná a je záporný právě když je záporně orientovaná.

Obrazem rovnoběžnostěnu Π určeného vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ lineární transformací T rozumíme rovnoběžnostěn určený vektory $T(\mathbf{x}_1), T(\mathbf{x}_2), T(\mathbf{x}_3)$. Stejný výpočet, který vede k důkazu Věty II.9 dokazuje také následující tvrzení.

Věta II.12. Je-li T lineární transformace v prostoru a Π rovnoběžnostěn určený vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$, pak objem obrazu $T(\Pi)$ tohoto rovnoběžnostěnu transformací T se rovná součinu absolutní hodnoty determinantu $m(T)$ a objemu rovnoběžnostěnu Π, tj.

$$\text{objem}(T(\Pi)) = |m(T)| \cdot \text{objem}(\Pi).$$

$\square$