I. Geometrie vektorů v rovině

Vektory

Vektor (reálný, dvoudimenzionální) je uspořádaná dvojice (x, y) reálných čísel x, y. Číslo x nazýváme *první souřadnice* vektoru, číslo y je *druhá souřadnice* vektoru. Vektory obvykle označujeme malými tučnými písmeny: $\mathbf{x} = (x, y)$. Kromě uvedeného řádkového zápisu budeme často používat také sloupcový zápis: $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Pokud zvolíme v rovině pravoúhlý systém souřadnic, můžeme vektor $\mathbf{x} = (x, y)$ geometricky znázornit jako šipku (orientovanou úsečku), která má počáteční bod v počátku souřadnic a koncový bod v bodě o souřadnicích (x, y).

Jsou-li $\mathbf{x} = (x, y)$ a $\mathbf{u} = (u, v)$ dva vektory, pak definujeme *součet* vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ jako vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x + u, y + v)$. Podobně definujeme *součin* vektoru $\mathbf{x}$ a reálného čísla r jako vektor $r\mathbf{x} = (rx, ry)$. Říkáme rovněž, že vektor $r\mathbf{x}$ je *skalárním násobkem* vektoru $\mathbf{x}$. Vektor $(-1)\mathbf{x} = (-x, -y)$ nazýváme *opačný vektor* k vektoru $\mathbf{x}$ a označujeme jej také $-\mathbf{x}$.

Vektor $(0, 0)$ nazýváme *nulový vektor* a označujeme jej $\mathbf{0}$. Vektory $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ a $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ jsou vektory *standardní báze* v rovině.

Je-li $\mathbf{x} = (x, y) \neq \mathbf{0}$ nenulový vektor, pak všechny násobky $k\mathbf{x}$, kde $k \in \mathbf{R}$ je libovolné reálné číslo, leží na přímce procházející počátkem souřadnic a koncovým bodem (x, y) vektoru $\mathbf{x}$. A naopak každý bod této přímky můžeme vyjádřit ve tvaru $k\mathbf{x}$ pro vhodné reálné číslo k. Množinu vektorů

$$\{k\mathbf{x}; k \in \mathbf{R}\}$$

proto nazýváme *přímka určená vektorem* $\mathbf{x}$. Podobně definujeme (uzavřenou)polopřímku určenou vektorem $\mathbf{x}$ jako množinu $\{k\mathbf{x}; k \geq 0\}$. Otevřenou polopřímku definujeme analogicky. Polopřímka opačná k polopřímce určené vektorem $\mathbf{x}$ je polopřímka určená vektorem $-\mathbf{x}$. Podobně definujeme *uzavřenou úsečku* určenou vektorem $\mathbf{x}$ jako množinu vektorů

$$\{k\mathbf{x}; k \in [0, 1]\}.$$

Přímku určenou $\mathbf{e}_1$ (prvním vektorem standardní báze) nazýváme *první osa souřadnic,* zatímco přímka určená vektorem $\mathbf{e}_2$ je *druhá osa souřadnic*. Každý vektor $\mathbf{x} = (x, y)$ můžeme jednoznačně vyjádřit jako součet

$$\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$$

jednoho vektoru z první osy souřadnic a jednoho vektoru z druhé osy souřadnic.

Následuje přehled základních vlastností operací sčítání vektorů a násobení vektoru reálným číslem"

(1) $\mathbf{x} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{x}$ pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$,

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TeX

(2) $\mathbf{x} + (\mathbf{u} + \mathbf{a}) = (\mathbf{x} + \mathbf{u}) + \mathbf{a}$ pro libovolné tři vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}$,
(3) existuje vektor $\mathbf{0}$ takový, že platí $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$,
(4) pro každý vektor $\mathbf{x}$ existuje vektor $-\mathbf{x}$ takový, že platí $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x})+\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
(5) $r(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = r\mathbf{x} + r\mathbf{u}$ pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ a každé reálné číslo r,
(6) $(r + s)\mathbf{x} = r\mathbf{x} + s\mathbf{x}$ pro libovolná dvě reálná čísla r, s a každý vektor $\mathbf{x}$,
(7) $r(s(\mathbf{x})) = (rs)\mathbf{x}$ pro libovolná dvě reálná čísla r, s a každý vektor $\mathbf{x}$,
(8) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro každý vektor $\mathbf{x}$.

Všech osm vlastností si můžete sami dokázat, vyjádříte-li si všechny vektory pomocí souřadnic. Stejně tak si můžete dokázat, že $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$. *Rozdíl vektorů* $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$ definujeme jako vektor $\mathbf{x} - \mathbf{u} = \mathbf{x} + (-\mathbf{u})$.

Dvojice vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ je *lineárně závislá,* jestliže jeden z vektorů $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ je skalárním násobkem druhého. Pokud je jeden z těchto vektorů, např. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, je dvojice $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ lineárně závislá, neboť $\mathbf{a} = \mathbf{0} = 0\mathbf{b}$. Jsou-li oba vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ nenulové a lineárně závislé, platí $\mathbf{a} = t\mathbf{b}$ a $\mathbf{b} = t^{-1}\mathbf{a}$, oba vektory tedy určují stejnou přímku (procházející počátkem). Pokud vektory $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ nejsou lineárně závislé, říkáme také, že jsou *lineárně nezávislé.*

Jsou-li $\mathbf{a}, \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ dva vektory, nazýváme množinu vektorů

$$\{\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{u}; t \in \mathbf{R}\}$$

přímka procházející $\mathbf{a}$ a rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u}$. Uvedené vyjádření přímky nazýváme *parametrické vyjádření,* neboť souřadnice jednotlivých bodů přímky závisejí na reálném parametru t.

Podobně, máme-li dány dva vektory $\mathbf{u} \neq \mathbf{v}$, je množina

$$\{\mathbf{u} + t(\mathbf{v} - \mathbf{u}); t \in \mathbf{R}\}$$

parametrické vyjádření přímky procházející $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$. Najděte hodnoty parametru t, které dokazují, že oba vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ na přímce leží.

Skalární součin

Délkou vektoru $\mathbf{x} = (x, y)$ rozumíme vzdálenost bodů $(0, 0)$ a (x, y), která se podle Pythagorovy věty rovná $\sqrt{x^2 + y^2}$. Délku vektoru $\mathbf{x}$ budeme označovat $|\mathbf{x}|$. Pro každé reálné číslo r platí

$$|r\mathbf{x}| = \sqrt{(rx)^2 + (ry)^2} = \sqrt{r^2(x^2 + y^2)} = |r||\mathbf{x}|.$$

Vzdáleností vektorů $\mathbf{x} = (x, y)$ a $\mathbf{u} = (u, v)$ rozumíme délku vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{u}$, tj. reálné číslo $|\mathbf{x} - \mathbf{u}| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$.

Je-li $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, pak je délka $|\mathbf{x}| \neq 0$, vektor $|x|^{-1}|\mathbf{x}|$ leží na polopřímce určené vektorem $\mathbf{x}$ a má délku 1. Vektory délky 1 nazýváme *jednotkové vektory.* Jednotkové vektory leží na kružnici se středem v počátku a poloměrem 1. Každý vektor na jednotkové kružnici můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru $(\cos\theta, \sin\theta)$, kde úhel

$\theta \in [0, 2\pi)$ nazýváme polární úhel tohoto vektoru. Každý nenulový vektor $\mathbf{x}$ pak můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = |\mathbf{x}|(|\mathbf{x}|^{-1}\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|(\cos\theta, \sin\theta)$$

pro nějaký úhel $\theta \in [0, 2\pi)$ (polární úhel jednotkového vektoru $|\mathbf{x}|^{-1}\mathbf{x}$). Tomuto vyjádření říkáme *polární tvar* vektoru $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.

Definice I.1. *Skalárním součinem* vektorů $\mathbf{x} = (x, y)$ a $\mathbf{u} = (u, v)$ nazýváme reálné číslo $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = xu + yv$.

Přímo z definice plyne, že pro každý vektor $\mathbf{x} = (x, y)$ platí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = x^2 + y^2 = |\mathbf{x}|^2$. Stejně snadno si můžete sami ověřit následující vlastnosti skalárního součinu:

(1) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{x}$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$,
(2) $(r\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u} = r(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u})$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ a libovolné reálné číslo r,
(3) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{u}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$ pro každé tři vektory $\mathbf{a}, \mathbf{x}, \mathbf{u}$.

Důkaz si ukážeme pro poslední vlastnost. Jsou-li tedy $\mathbf{a} = (a, b), \mathbf{x} = (x, y)$ a $\mathbf{u} = (u, v)$ tři vektory, pak platí

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{u}) = (a, b) \cdot (x + u, y + v) = a(x + u) + b(y + v) = (ax + by) + (au + bv) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}.$$

Vyjasníme si teď geometrický význam skalárního součinu dvou nenulových vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$. Oba vektory si vyjádříme v polárním tvaru, $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|(\cos\theta, \sin\theta)$ a $\mathbf{u} = |\mathbf{u}|(\cos\phi, \sin\phi)$. Potom platí

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{x}||\mathbf{u}|((\cos\theta, \sin\theta) \cdot (\cos\phi, \sin\phi)) = (\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi) = |\mathbf{x}||\mathbf{u}|\cos(\theta - \phi).$$

Skalární součin dvou nenulových vektorů se tedy rovná součinu jejich délek a cosinu úhlu, který svírají. Skalární součin dvou nenulových vektorů je tedy kladný, pokud oba vektory svírají ostrý úhel, a je záporný, pokud svírají tupý úhel. Skalární součin se rovná 0 právě když jsou oba vektory kolmé. Pokud je jeden z vektorů nulový, je skalární součin rovněž 0. Můžeme tedy definovat, že dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ jsou *kolmé (ortogonální)* pokud pro jejich skalární součin platí $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Skalární součin úzce souvisí s kosinovou větou. Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ dva různé nenulové vektory, pak podle kosinové věty platí

$$|\mathbf{x} - \mathbf{u}|^2 = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{u}|\cos\psi,$$

kde ψ je úhel mezi vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$. Pomocí skalárního součinu spočítáme druhou mocninu délky vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{u}$ ještě jiným způsobem (s použitím vlastností skalárního součinu):

$$|\mathbf{x} - \mathbf{u}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2 + |\mathbf{u}|^2 - 2|\mathbf{x}||\mathbf{u}|.$$

Srovnáním obou výpočtů dostáváme ještě jednou, že

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{x}||\mathbf{u}|\cos\psi.$$

Nejsou-li obě čísla a, b rovná 0, pak rovnice

$$ax + by = 0$$

popisuje všechny vektory $\mathbf{x} = (x, y)$, které jsou kolmé k (nenulovému) vektoru $\mathbf{a} = (a, b)$. Jsou to všechny vektory ležící na přímce určené vektorem $(-b, a)$.

Nyní si ukážeme jak spočítat souřadnice projekce vektoru na přímku procházející počátkem. Nechť $\mathbf{u}$ je nenulový vektor. Chceme najít souřadnice ortogonální projekce nějakého vektoru $\mathbf{x}$ na přímku určenou vektorem $\mathbf{u}$. Projekce, kterou si označíme $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, se musí rovnat jednomu z vektorů $t\mathbf{u}$, kde t je vhodné reálné číslo. Vektor $\mathbf{x} - t\mathbf{u}$ musí být kolmý na vektor $\mathbf{u}$ (protože hledáme ortogonální projekci), proto musí platit

$$0 = (\mathbf{x} - t\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} - t(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}).$$

Odtud dostáváme

$$t = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}},$$

a tedy

$$P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}.$$

Příklad Najděte souřadnice ortogonální projekce vektoru $\mathbf{b} = (3, 1)$ na přímku určenou vektorem $\mathbf{a} = (1, 2)$

Řešení dostaneme za použití právě odvozeného vzorce:

$$P_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \left(\frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right) \mathbf{a} = \frac{5}{5}(1, 2) = (1, 2).$$

Dále se budeme zabývat výpočtem vzdálenosti d vektoru $\mathbf{x} = (x_0, y_0)$ od přímky určené rovnicí $ax + by = 0$, kde aspoň jedno z čísel a, b je různé od 0. Rovnice $ax + by = 0$ popisuje přímku určenou vektorem $(-b, a) \neq (0, 0)$, zatímco (a, b) je nenulový vektor kolmý k této přímce. Vzdálenost vektoru $\mathbf{x}$ od přímky $ax + by = 0$ se tedy rovná ortogonální projekci tohoto vektoru na přímku určenou vektorem $\mathbf{a} = (a, b)$. Platí proto

$$d = |P_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})| = \left|\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}\right| |\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|^2} |\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}|}{|\mathbf{a}|} = \frac{ax_0 + by_0}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Podobně můžeme spočítat obsah rovnoběžníku určeného nenulovými vektory $\mathbf{a} = (a, c)$ a $\mathbf{b} = (b, d)$. Zbylé dva vrcholy tohoto rovnoběžníku jsou $\mathbf{0}$ a $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Délka výšky v tomto rovnoběžníku z vrcholu $\mathbf{a}$ na stranu $\mathbf{b}$ se rovná vzdálenosti vektoru $\mathbf{a}$ od přímky určené vektorem $\mathbf{b}$. Tato přímka je popsána rovnicí $dx - by = 0$. Výška má potom délku

$$\frac{|ad - bc|}{\sqrt{b^2 + d^2}}.$$

Po vynásobení délkou vektoru $\mathbf{b}$ dostáváme, že obsah rovnoběžníku se rovná $|ad - bc|$.

A závěrem části o skalárním součinu si řekneme o geometrické interpretaci soustavy lineárních rovnic

$$
\begin{aligned}
ax + by &= 0,\\
cx + dy &= 0.
\end{aligned}
$$

Budeme předpokládat, že v každé rovnici je aspoň jeden z koeficientů nenulový. První rovnice popisuje všechny vektory kolmé k (a, b), druhá pak vektory kolmé k (c, d). Samozřejmě, $x = 0, y = 0$ je řešením soustavy. Jsou-li vektory (a, b) a (c, d) lineárně nezávislé, určují různé přímky a soustava žádné jiné řešení nemá, neboť jediný vektor v rovině kolmý ke dvěma různým přímkám je nulový vektor. Jsou-li vektory (a, b) a (c, d) lineárně závislé, určují stejnou přímku a naše soustava pak má nekonečně mnoho řešení, všechna řešení leží na přímce procházející počátkem kolmo k přímce určené vektory $(a, b), (c, d)$.

Lineární transformace v rovině

Na začátek několik příkladů.

Příklad 1. Popište zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{x} = (x, y)$ v rovině přiřadí jeho pravoúhlou projekci na přímku určenou vektorem $\mathbf{u} = (1, 2)$.

Řešení. V předchozí kapitole jsme si ukázali, že označíme-li toto zobrazení $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (x', y')$, pak platí

$$
P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \left(\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u} = \left(\frac{x + 2y}{5}\right)(1, 2).
$$

Proto

$$
\begin{aligned}
x' &= \frac{x + 2y}{5},\\
y' &= \frac{2}{5}(x + 2y).
\end{aligned}
$$

Příklad 2. Popište osovou symetrii vzhledem k přímce určené vektorem $\mathbf{u} = (u, v) = (1, 2)$.

Řešení. Označme obraz vektoru $\mathbf{x} = (x, y)$ vzhledem k této symetrii $S_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = (x', y')$. Pravoúhlá projekce $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ vektoru $\mathbf{x}$ na přímku určenou vektorem $\mathbf{u}$ je středem úsečky s krajními body $\mathbf{x}$ a $S_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$. Platí proto

$$
P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} + S_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})).
$$

Odtud vypočítáme

$$
S_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = 2P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}.
$$

Dosadíme za $P_{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$ vyjádření nalezené v minulém příkladu a najdeme

$$\begin{aligned} x' &= \frac{2}{5}(x-2y) - x = -\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \\ y' &= \frac{4}{5}x + \frac{8}{5}y - y = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y. \end{aligned}$$

Příklad 3. Popište dilataci se středem v počátku souřadnic a koeficientem r.

Řešení. Označme hodnotu dilatace v bodě $\mathbf{x}$ jako $D_r(\mathbf{x}) = (x', y')$. Potom platí

$$\begin{aligned} x' &= rx \\ y' &= ry. \end{aligned}$$

Příklad 4. Popište otočení se středem v počátku souřadnic o úhel θ v kladném směru.

Označme opět hodnotu této rotace v bodě $\mathbf{x}$ jako $R_\theta(\mathbf{x}) = (x', y')$. Vyjádříme $\mathbf{x}$ v polárním tvaru jako $\mathbf{x} = |\mathbf{x}|(\cos\phi, \sin\phi)$. Potom

$$R_\theta(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|(\cos(\phi+\theta), \sin(\phi+\theta)) = |\mathbf{x}|(\cos\phi\cos\theta - \sin\phi\sin\theta, \sin\phi\cos\theta + \cos\phi\sin\theta).$$

Nyní stačí si uvědomit, že $|\mathbf{x}|\cos\phi = x$ a $|\mathbf{x}|\sin\phi = y$. Platí tedy

$$\begin{aligned} x' &= (\cos\theta)x - (\sin\theta)y \\ y' &= (\sin\theta)x + (\cos\theta)y. \end{aligned}$$

Příklad 5. Posledním příkladem transformace roviny, který si nyní uvedeme, je zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{x} = (x, y)$ přiřazuje vektor (x', y'), kde

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= x^2 + y. \end{aligned}$$

První čtyři zobrazení jsou podobného typu. Všechny přiřazují libovolnému vektoru $\mathbf{x}$ vektor (x', y'), kde

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy, \end{aligned}$$

a a, b, c, d jsou vhodná reálná čísla. Taková zobrazení se v geometrii roviny vyskytují velmi často a zaslouží si samostatný název.

Definice I.2. *Lineární zobrazení (transformace)* roviny je zobrazení $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}' = (x', y')$, které každému vektoru $\mathbf{x} = (x, y)$ přiřazuje vektor (x', y'), kde

$$\begin{aligned} x' &= ax + by, \\ y' &= cx + dy, \end{aligned}$$

a a, b, c, d jsou reálná čísla. Koeficienty obvykle zapisujeme v následující podobě

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

kterou nazýváme *matice* zobrazení A a označujeme $m(A)$.

Tak například matice *identického zobrazení*, které každému vektoru $\mathbf{x}$ přiřazuje vektor $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, se rovná *jednotkové matici*

$$m(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podobně matice *nulového zobrazení*, které každému vektoru $\mathbf{x}$ přiřazuje vektor $O(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, má matici

$$m(O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

kterou nazýváme *nulová matice*.

Při výpočtu hodnoty lineárního zobrazení A s maticí $m(A)$ v bodě $\mathbf{x} = (x, y)$ obvykle používáme sloupcový zápis vektorů:

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

První souřadnici vektoru $A(\mathbf{x})$ tedy dostaneme tak, že skalárně vynásobíme první řádek matice $m(A)$ se sloupcovým zápisem vektoru $\mathbf{x}$, zatímco druhou souřadnici vektoru $A(\mathbf{x})$ dostaneme jako skalární součin druhého řádku matice $m(A)$ se sloupcovým zápisem vektoru $\mathbf{x}$.

Následující vlastnosti lineárních zobrazení si opět může každý ověřit sám z definice.

(1) $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,
(2) $A(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{u})$ pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$,
(3) $A(t\mathbf{x}) = tA(\mathbf{x})$ pro libovolný vektor $\mathbf{x}$ a každé reálné číslo t.

Následující věta ukazuje, že podmínky (2) a (3) lineární zobrazení charakterizují.

Věta I.1. Transformace roviny A je lineární právě když zobrazení A splňuje podmínky (2) a (3) nebo ekvivalentně, splňuje-li podmínku
$A(t\mathbf{x} + s\mathbf{u}) = tA(\mathbf{x}) + sA(\mathbf{u})$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ a libovolná čísla t, s.

Důkaz. Označme $\mathbf{x} = (x, y)$ a $\mathbf{u} = (u, v)$ souřadnice vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ a nechť matice zobrazení A je

$$m(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Potom $A(\mathbf{x} + \mathbf{u}) = (a(x+u) + b(y+v), c(x+u) + d(y+v)) = (ax + by, cx + dy) + (au + bv, cu + dv) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{u})$. Druhou vlastnost (3) dokážeme podobně.

Nechť naopak zobrazení A splňuje podmínky (2) a (3). Víme už, že každý vektor $\mathbf{x} = (x, y)$ můžeme jednoznačně vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$. Z podmínek (2) a (3) potom plyne

$$A(\mathbf{x}) = A(x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2) = A(x\mathbf{e}_1) + A(y\mathbf{e}_2) = xA(e_1) + yA(e_2).$$

Označíme-li vektory $A(e_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ a $A(e_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$, platí pro vektor $A(\mathbf{x}) = (x', y')$

$$\begin{aligned} x' &= ax + by \\ y' &= cx + dy. \end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že podmínky (2) a (3) jsou ekvivalentní linearitě zobrazení A. Dokážeme ještě, že jsou tyto dvě podmínky ekvivalentní jediné podmínce ze znění věty. Jsou-li podmínky (2), (3) splněné, platí pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ a reálná čísla t, s, že $A(t\mathbf{x} + s\mathbf{u}) = A(t\mathbf{x}) + A(s\mathbf{u}) = tA(\mathbf{x}) + sA(\mathbf{u})$.

Platí-li naopak podmínka ze znění věty, dostaneme podmínku (2) volbou $t = s = 1$, zatímco podmínku (3) dostaneme volbou $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. $\square$

Z důkazu Věty I.1. vyplývá jedna důležitá věc. Matice zobrazení A je jednoznačně určená hodnotami zobrazení A na vektorech $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ standardní báze. Této vlastnosti lineárních zobrazení využijeme při řešení následujícího příkladu.

Příklad 6. Najděte matici projekce $P_\mathbf{u}$ na přímku určenou libovolným nenulovým vektorem $\mathbf{u} = (u, v)$.

Řešení. Najdeme hodnotu projekce $P_\mathbf{u}$ v prvcích standardní báze. Platí

$$P_\mathbf{u}(\mathbf{e}_1) = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \mathbf{u} = \frac{u}{u^2 + v^2}(u, v) = (\frac{u^2}{u^2 + v^2}, \frac{uv}{u^2 + v^2}).$$

Podobně dostaneme

$$P_\mathbf{u}(\mathbf{e}_2) = (\frac{uv}{u^2 + v^2}, \frac{v^2}{u^2 + v^2}).$$

Pro matici $m(P_\mathbf{u})$ tak dostáváme vyjádření

$$m(P_\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{u^2}{u^2+v^2} & \frac{uv}{u^2+v^2} \\ \frac{uv}{u^2+v^2} & \frac{v^2}{u^2+v^2} \end{pmatrix}.$$

Speciálně, je-li $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ jednotkový vektor, pak platí

$$m(P_\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}.$$

Je-li $L = \{\mathbf{a} + t\mathbf{u}; t \in R\}$ přímka procházející bodem $\mathbf{a}$ a rovnoběžná s vektorem $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ a A lineární zobrazení, pak obrazem přímky L zobrazením A rozumíme množinu

$$A(L) = \{A(\mathbf{a} + t\mathbf{u}); t \in R\}$$

obrazů všech vektorů ležících na přímce L. Pro obrazy přímek lineárními transformacemi platí následující tvrzení.

Věta I.2. Je-li A lineární transformace v rovině, pak obraz každé přímky je přímka nebo bod.

Důkaz. Stačí použít Větu I.1. Pro množinu $A(L)$ platí

$$A(L) = \{A(\mathbf{a}) + tA(\mathbf{u}); t \in R\}.$$

Je-li $A(\mathbf{u}) \neq \mathbf{0}$, je $A(L)$ přímka procházející bodem $A(\mathbf{a})$ a rovnoběžná s vektorem $A(\mathbf{u})$. Je-li $A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$, je $A(L) = \{A(\mathbf{a})\}$, neboli obrazem přímky L je jediný bod $A(\mathbf{a})$. $\square$

Jsou-li dány dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ v rovině, nazýváme množinu

$$\Gamma = \{r\mathbf{x} + s\mathbf{u}; r, s \in [0, 1]\}$$

rovnoběžník určený vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$. Pokud jsou vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ lineárně nezávislé, je Γ skutečný rovnoběžník s vrcholy $\mathbf{0}, \mathbf{x}, \mathbf{u}$ a $\mathbf{x} + \mathbf{u}$. Pokud jsou vektory $\mathbf{x}, \mathbf{u}$ lineárně závislé, je Γ úsečka nebo bod $\mathbf{0}$ (degenerovaný rovnoběžník).

Je-li navíc A lineární zobrazení, je obraz rovnoběžníku Γ zobrazením A roven množině

$$A(\Gamma) = \{rA(\mathbf{x}) + sA(\mathbf{u}); r, s \in [0, 1]\}.$$

Množina $A(\Gamma)$ je tedy opět rovnoběžník, nedegenerovaný v případě lineární nezávislosti vektorů $A(\mathbf{x})$ a $A(\mathbf{u})$.

Zobrazení v rovině můžeme skládat. Jsou-li A, B nějaká dvě (nemusí být nutně lineární) zobrazení, pak *složením* AB nazýváme zobrazení v rovině, které každému vektoru $\mathbf{x}$ přiřazuje vektor $A(B(\mathbf{x}))$. Platí tedy

$$(AB)(\mathbf{x}) = A(B(\mathbf{x})).$$

Složení dvou zobrazení závisí na pořadí, ve kterém je skládáme. Snadno si najdete příklad dvou lineárních zobrazení A, B, pro která platí $AB \neq BA$. Například dvě osové symetrie určené různými neortogonálními přímkami. Pokud jsou osy symetrie ortogonální, je složení $AB = BA$ středovou symetrií vzhledem k počátku souřadnic. Snadno si také ukážete, že pro každé lineární zobrazení A v rovině platí $AI = IA = A$ a $AO = OA = O$.

Složení dvou lineárních zobrazení nejlépe spočítáme za použití matic obou zobrazení. Nechť je zobrazení A určené maticí $m(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a zobrazení B maticí $m(B) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Potom se obraz vektoru $\mathbf{x} = (x, y)$ zobrazením B rovná vektoru $B(\mathbf{x}) = (x', y')$, kde $x' = px + qy, y' = rx + sy$. Zobrazíme-li dále vektor $B(\mathbf{x}) = (x', y')$ zobrazením A, dostaneme vektor $A(B(\mathbf{x}) = (x'', y'')$, kde

$$\begin{aligned} x'' &= ax' + by' = a(px + qy) + b(rx + sy) = (ap + br)x + (aq + bs)y \\ y'' &= cx' + dy' = c(px + qy) + d(rx + sy) = (cp + dr)x + (cq + ds)y. \end{aligned}$$

Matice složeného zobrazení AB se tedy rovná

$$m(AB) = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}.$$

Výpočet, který jsme právě uvedli, motivuje následující definici.

Definice I.1. Jsou-li $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a $N = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ dvě matice, pak jejich *součinem* nazýváme matici

$$MN = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}.$$

Matice násobíme podle pravidla *řádek krát sloupec.* To znamená, že v prvním řádku a prvním sloupci součinu matic je skalární součin prvního řádku levé matice a prvního sloupce pravé matice, v prvním řádku a druhém sloupci součinu matic je skalární součin prvního řádku a druhého sloupce, atd.

Příklad Zobrazení U je dáno maticí $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Jaký je jeho geometrický význam? Pomocí násobení matic dokažte, že $UU = I$.

Ještě před definicí součinu matic jsme dokázali následující tvrzení.

Věta I.3. Pro libovolná dvě lineární zobrazení A, B platí $m(AB) = m(A)m(B)$. $\square$

Příklad Dokažte, že pro libovolné dva úhly θ, ψ platí $R_\theta R_\psi = R_{\theta+\psi}$.

Příklad Označme S_θ osovou symetrii vzhledem k ose určené vektorem $(\cos\theta, \sin\theta)$. Jaké zobrazení dostaneme složením $S_\theta S_\psi$?

Věta I.4. Pro libovolná tři lineární zobrazení A, B, C platí $A(BC) = (AB)C$ a

$$m(A)(m(B)m(C)) = (m(A)m(B))m(C).$$

Důkaz. Pro každý vektor $\mathbf{x}$ platí

$$(A(BC))(\mathbf{x}) = A(BC(\mathbf{x})) = A(B(C(\mathbf{x}))) = (AB)(C(\mathbf{x})) = ((AB)C)(\mathbf{x}),$$

proto jsou si zobrazení $A(BC)$ a $(AB)C$ rovná. Opakovaným použitím Věty I.3 pak dostáváme rovněž

$$m(A)(m(B)m(C)) = (m(A)m(B))m(C).$$

Důsledek Násobení matic je asociativní.

Důkaz. Každá z matic K, L, M je maticí nějakého lineárního zobrazení: $K = m(A)$, $L = m(B)$ a $M = m(C)$. Podle druhé části předchozí věty platí

$$K(LM) = m(A)(m(B)m(C)) = (m(A)m(B))m(C) = (KL)M.$$

$\square$

Můžete si zkusit dokázat poslední důsledek přímo podle definice násobení matic. Náš důkaz s využitím skládání lineárních zobrazení umožnil vyhnout se složitějšímu výpočtu.

Lineární zobrazení můžeme také sčítat a násobit reálným číslem. Jsou-li A, B dvě lineární zobrazení, pak definujeme *součet* těchto zobrazení $A + B$ jako zobrazení, které každému vektoru $\mathbf{x}$ přiřazuje vektor $(A + B)(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x})$. Stejně tak pro reálné číslo k definujeme zobrazení kA předpisem $(kA)(\mathbf{x}) = k(A(\mathbf{x}))$ pro každý vektor $\mathbf{x}$ a nazýváme jej součin zobrazení A s reálným číslem k.

Příklad Dokažte, že platí $S_{\mathbf{u}} = 2P_{\mathbf{u}} - I$ pro každý nenulový vektor $\mathbf{u}$.

Jaká je matice součtu zobrazení $A + B$? Je-li $m(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a $m(A) = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$, pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} = (x, y)$ platí $A(\mathbf{x}) = (ax + by, cx + dy)$ a $B(\mathbf{x}) = (px + qy, rx + sy)$. Proto

$$A(\mathbf{x}) + B(\mathbf{x}) = ((a + p)x + (b + q)y, (c + r)x + (d + s)y).$$

Zobrazení $A + B$ je tedy lineární a určené maticí

$$m(A + B) = \begin{pmatrix} a + p & b + q \\ c + r & d + s \end{pmatrix}.$$

Tuto matici nazýváme *součet matic* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$.

Podobně si můžete dokázat, že $m(kA) = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$. Tato matice se nazývá *součin* matice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ s reálným číslem k.

Příklad Dokažte, že osová symetrie vzhledem k ose určené vektorem $\mathbf{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ má matici

$$m(S_{\mathbf{u}}) = \begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta r & -\cos 2\theta \end{pmatrix}.$$

Využijte toho, že víme, že $S_{\mathbf{u}} = 2P_{\mathbf{u}} - I$ a že známe matici $m(P_{\mathbf{u}})$.

A závěrem části o operacích s maticemi ještě několik příkladů matic. Matice

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

nazýváme *diagonální matice. Permutační matice* je matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Následující dva typy matic se nazývají *matice zkosení* nebo také *trojúhelníkové matice:*

$$\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice

Soustavu rovnic

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ cx + dy &= v \end{aligned}$$

můžeme chápat jako jedinou rovnici

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{u},$$

kde A je lineární operátor určený maticí $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}$ je neznámý vektor, a $\mathbf{u} = (u, v)$ je vektor pravých stran. Na první pohled podobnou rovnici $ax = u$, kde $a \neq 0, u$ jsou reálná čísla a x je neznámé reálné číslo, vyřešíme snadno tak, že ji vynásobíme číslem a^{-1}. K tomu, abychom stejně mohli vyřešit rovnici $A(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$, potřebujeme najít lineární transformaci B takovou, že platí $BA = I$. Pokud takovou transformaci B najdeme, můžeme ji aplikovat na obě strany rovnice $A(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ (obě strany jsou vektory!) a dostaneme tak postupně

$$\begin{aligned} BA(\mathbf{x}) &= B(\mathbf{u}) \\ I(\mathbf{x}) &= B(\mathbf{u}) \\ \mathbf{x} &= B(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Řešením rovnice $A(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ tak může být pouze vektor $B(\mathbf{u})$. Je-li jím skutečně, zjistíme zkouškou. Musí platit $AB(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$. Abychom to mohli dokázat, musíme navíc předpokládat, že $AB = I$. Tyto úvahy motivují následující definici.

Definice I.4. Je-li A lineární transformace, pak lineární transformaci B nazýváme *inverzní transformace* k transformaci A, platí-li $BA = AB = I$.

Později si ukážeme, že stačí předpokládat pouze jednu z rovností $BA = I$ nebo $AB = I$, neboť z kterékoliv z těchto rovností plyne ta druhá.

Pokud existuje inverzní zobrazení k lineární transformaci A, je určené jednoznačně. Nechť jsou B, C dvě lineární transformace inverzní k A. Potom platí

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Inverzní zobrazení k A, pokud existuje, označujeme A^{-1}.

Příklad Pomocí matice zobrazení dokažte, že $D_r^{-1} = D_{r^{-1}}$ a $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$.

Příklad Dokažte, že neexistuje inverzní zobrazení k projekci P na první osu souřadnic. (Návod: jakou hodnotu by mělo mít lineární zobrazení P^{-1} v bodě $\mathbf{0}$?)

Následující věta udává nutnou a postačující podmínku pro existenci inverzních lineárních zobrazení.

Věta I.5. Buď A lineární transformace v rovině s maticí $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Potom jsou následující dvě podmínky ekvivalentní:

(1) existuje inverzní transformace A^{-1},
(2) $ad - bc \neq 0$.

Pokud jsou tyto podmínky splněné, platí pro matici inverzního zobrazení

$$m(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}.$$

Důkaz. (2)⇒(1). Nejdříve ukážeme, že pokud k A existuje inverzní zobrazení, pak z rovnosti $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ plyne $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Pokud na obě strany rovnosti $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ aplikujeme inverzní zobrazení A^{-1}, dostaneme rovnost $A^{-1}(A(\mathbf{x})) = A^{-1}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Protože $A^{-1}A = I$, platí $(A^{-1}A)(\mathbf{x}) = I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.

Protože předpokládáme, že inverzní zobrazení A^{-1} existuje, platí $A(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$, proto aspoň jedno z čísel a, c musí být různé od 0. Podobně z rovnosti $A(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \neq \mathbf{0}$ plyne, že také aspoň jedno z čísel b, d je nenulové. Dále platí

$$A \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -bc + ad \end{pmatrix}.$$

Protože $(-b, a) \neq (0, 0)$ a $A((-b, a)) \neq (0, 0)$, musí platit $ad - bc \neq 0$.

(1)⇒(2). Ukážeme, že

$$m(A^{-1}) = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

je skutečně maticí inverzního zobrazení k A. Vynásobením matic dostaneme

$$m(A^{-1}A) = m(A^{-1})m(A) = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vynásobíme-li obě matice v opačném pořadí, dostaneme také

$$m(AA^{-1}) = m(A)m(A^{-1}) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Platí proto $A^{-1}A = AA^{-1} = I$. □

Matici inverzního zobrazení k A můžete snadno vypočítat řešením soustavy rovnic, kterou dostaneme z rovnosti

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Z ní totiž plyne soustava rovnic

$$\begin{aligned} ap + br &= 1 \\ cp + dr &= 0 \\ aq + bs &= 0 \\ cq + ds &= 1. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy dostaneme prvky matice $m(A^{-1})$ ze znění Věty I.5.

Determinant

Příklad Jsou-li $\mathbf{a} = (a, c) = |\mathbf{a}|(\cos\theta, \sin\theta)$ a $\mathbf{b} = (b, d) = |\mathbf{b}|(\cos\phi, \sin\phi)$ dva vektory, dokažte že

$$\sin(\phi - \theta) = \frac{ad - bc}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Výraz $ad - bc$ se také objevil v matici inverzního zobrazení a rovněž při výpočtu obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\mathbf{a} = (a, c)$ a $\mathbf{b} = (b, d)$.

Definice I.5. Je-li $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matice, pak výraz $ad - bc$ nazýváme *determinant* matice M. Značíme jej $|M|$ nebo také $\det(M)$.

Známe už geometrický význam absolutní hodnoty determinantu matice M. Je to obsah rovnoběžníku definovaného vektory $\mathbf{a} = (a, c)$ a $\mathbf{b} = (b, d)$. Zbývá tedy vyjasnit geometrický význam znaménka determinantu matice. Z prvního příkladu části o determinantu vyplývá, že znaménko determinantu $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ je kladné právě když orientovaný úhel mezi vektory (a, c) a (b, d) leží v intervalu $(0, \pi)$ a je záporné právě když orientovaný úhel mezi oběma vektory leží v intervalu $(\pi, 2\pi)$.

Definice I.6. Uspořádaná dvojice lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ a $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ se nazývá *kladně orientovaná,* jestliže

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} > 0,$$

a nazývá se *záporně orientovaná,* je-li tento determinant záporný.

Příklad Standardní báze $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ je kladně orientovaná. Dvojice $(1, 2), (-1, 2)$ je rovněž kladně orientovaná. Dvojice $(-1, 2), (1, 2)$ je orientovaná záporně.

Ukážeme si ještě, co říká znaménko determinantu matice lineárního zobrazení.

Definice I.7. Říkáme, že lineární zobrazení A *zachovává orientaci,* jestliže pro každou kladně orientovanou dvojici vektorů $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ platí, že také dvojice $A(\mathbf{x}_1), A(\mathbf{x}_2)$ je kladně orientovaná. Pokud pro každou kladně orientovanou dvojici $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ platí, že $A(\mathbf{x}_1), A(\mathbf{x}_2)$ je záporně orientovaná, říkáme že A *obrací orientaci.*

Věta I.6. Lineární zobrazení A s maticí $m(A) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ zachovává orientaci právě když $\det(m()A) > 0$ a obrací orientaci právě když $\det(m(A)) < 0$.

Důkaz. Nechť A zachovává orientaci. Potom je dvojice vektorů $A(\mathbf{e}_1) = (a, c)$ a $A(\mathbf{e}_2) = (b, d)$ kladně orientovaná a tedy

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \det(m(A)) > 0.$$

Nechť naopak $\det(m(A)) > 0$. Pro libovolnou kladně orientovanou dvojici $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1)$ a $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2)$ platí

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 + by_1 \\ cx_1 + dy_1 \end{pmatrix}$$

a rovněž

$$A\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_2 + by_2 \\ cx_2 + dy_2 \end{pmatrix}.$$

Orientaci dvojice $A(\mathbf{x}_1), A(\mathbf{x}_2)$ poznáme podle znaménka determinantu

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ax_1 + by_1 & ax_2 + by_2 \\ cx_1 + dy_1 & cx_2 + dy_2 \end{vmatrix} &= (ax_1 + by_1)(cx_2 + dy_2) - (cx_1 + dy_1)(ax_2 + by_2) \\ &= (ad - bc)(x_1y_2 - x_2y_1) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Oba determinanty jsou podle předpokladu kladné, dvojice $A(\mathbf{x}_1), A(\mathbf{x}_2)$ je tedy kladně orientovaná.

Druhé tvrzení věty dokážeme zcela analogicky, jediná změna je ve znaménku $ad - bc$. $\square$