9. Transformace souřadnic a elementární transformace

Souřadnice vektoru $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ závisí na bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ tohoto prostoru. Vyjasníme si, jak souvisí souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ se souřadnicemi téhož vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k jiné bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ prostoru $\mathcal{U}$. Uvažujme identické lineární zobrazení $I : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ a najděme jeho matici vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. K tomu potřebujeme najít vyjádření vektorů $\mathbf{y}_j = I(\mathbf{y}_j)$ pomocí báze $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Nechť tedy

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Matice identického zobrazení vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ se tedy rovná

$$M(I) = (a_{ij}).$$

Definice 9.20. Jsou-li $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ dvě báze prostoru $\mathcal{U}$, pak matice identického zobrazení $I : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, se nazývá *matice přechodu* od báze $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$.

Vezmeme-li nyní libovolný vektor $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} b_j\mathbf{y}_j \in \mathcal{U}$, pak jeho souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ jsou $(b_1, \dots, b_n)$. Jeho souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ dostaneme po dosazení za $\mathbf{y}_j$ do vyjádření vektoru $\mathbf{x}$ pomocí báze $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Tedy

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} b_j\mathbf{y}_j = \sum_{j=1}^{n} b_j(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_j a_{ij}\mathbf{x}_i = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j)\mathbf{x}_i.$$

Tím jsme dokázali následující větu.

Věta 9.36. Nechť $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ jsou dvě báze vektorového prostoru $\mathcal{U}$, $(b_1, \dots, b_n)$ souřadnice nějakého vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ a

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

matice přechodu od báze $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Potom souřadnice $(a_1, \dots, a_n)$ vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ dostaneme pomocí vztahu

$$a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad \square$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Všimněte si, že považujeme-li $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ a $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ za sloupcové vektory, pak platí

$$\mathbf{a} = M\mathbf{b}.$$

Věta 9.36 je plně v souladu s tvrzením Lemma 7.30, protože matice M přechodu od báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ je maticí identického zobrazení $I : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Známe-li tedy souřadnice vektoru $\mathbf{y}$ vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, dostaneme souřadnice vektoru $\mathbf{y} = I(\mathbf{y})$ vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ také podle Lemma 7.30.

Příklad 9.16. V prostoru $\mathcal{R}^4$ uvažujme standardní bázi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ a bázi $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4$, kde tyto vektory mají vzhledem ke standardní bázi souřadnice $\mathbf{y}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{y}_2 = (1,1,1,0), \mathbf{y}_3 = (1,1,0,0)$ a $\mathbf{y}_4 = (1,0,0,0)$. Vektor $\mathbf{x}$ má vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4$ souřadnice $(1,0,1,0)$. Jaké jsou jeho souřadnice vzhledem ke standardní bázi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$?

Matice přechodu od standardní báze $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ k bázi $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4$ se rovná

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podle Věty 9.36 jsou potom souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem ke standardní bázi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ rovné

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vektor $\mathbf{x}$ má tedy vzhledem ke standardní bázi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ souřadnice $(2,2,1,1)$. Jak najít souřadnice nějakého vektoru $\mathbf{y}$ vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3, \mathbf{y}_4$, známe-li jeho souřadnice vzhledem ke standardní bázi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$, si ukážeme v příští kapitole.

Skutečnost, že matice přechodu od báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ je maticí identického zobrazení $I : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ využijeme také v důkazu následující věty.

Věta 9.37. Buď $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze prostoru $\mathcal{U}$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ dvě báze prostoru $\mathcal{V}$. Je-li $M(A) = (a_{ij})$ matice operátoru A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a $N = (b_{ki})$ matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$, pak matice zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ je rovná součinu matic $NM(A)$. Je-li dále $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ jiná báze prostoru $\mathcal{U}$ a $P = (c_j l)$ matice přechodu od báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ k bázi $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$, pak matice zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ je rovna součinu matice $M(A)P$.

Důkaz. Víme, že $N = M(I)$ je matice identického zobrazení $I : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$. Potom platí, že součin matic

$$NM(A) = M(I)M(A)$$

je matice složeného zobrazení $IA = A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$, podle Věty 7.34.

Zcela stejně dokážeme i druhou část věty. Matice P je maticí identického zobrazení $J : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ vzhledem k bázím $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Podle Věty 7.34 je tedy součin matic $M(A)P$ maticí složeného zobrazení $AJ = J$ vzhledem k bázím $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n$ a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. □

Definice 9.21. Buď $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ posloupnost vektorů prostoru $\mathcal{U}$. Elementární transformací této posloupnosti nazýváme každou z následujících tří transformací:

(I) prohození dvou vektorů $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{x}_j$,
(II) vynásobení některého z vektorů $\mathbf{x}_i$ nenulovým skalárem a,
(III) nahrazení vektoru $\mathbf{x}_i$ vektorem $\mathbf{x}_i + a\mathbf{x}_j$, kde a je skalár a $j \neq i$.

V další části si ukážeme, mimo jiné, že pomocí elementárních transformací lze modifikovat nějakou bázi prostoru $\mathcal{U}$ v jakoukoliv jinou bázi tohoto prostoru. Napřed si ale dokážeme několik jiných tvrzení. V části a) následující věty dokážeme, že ke každé elementární transformaci, existuje "inverzní" elementární transformace, kterou dostaneme zpět původní posloupnost $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.

Věta 9.38. Buď $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ posloupnost vektorů prostoru $\mathcal{U}$ a $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ posloupnost, kterou dostaneme z $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ některou z elementárních transformací. Potom platí

(a) posloupnost $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ lze dostat z $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ pomocí nějaké elementární transformace,
(b) $l(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = l(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$ a tedy také $\dim l(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \dim l(\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n)$,
(c) $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je lineárně nezávislý systém právě tehdy, je-li $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ lineárně nezávislý,
(d) $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je báze prostoru $\mathcal{U}$ právě když je $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ báze $\mathcal{U}$.

Buď dále $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ posloupnost vektorů prostoru $\mathcal{U}$, kterou dostaneme z $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ nějakou posloupností elementárních transformací. Potom platí

(e) posloupnost $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ lze dostat ze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ pomocí nějaké posloupnosti elementárních transformací,
(f) $l(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = l(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$ a tedy také $\dim l(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \dim l(\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n)$,
(g) $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je lineárně nezávislý systém právě když je $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ lineárně nezávislý systém,
(h) $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je báze $\mathcal{U}$ právě tehdy, je-li $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ báze $\mathcal{U}$.

Důkaz. a) Pokud jsme dostali $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ z posloupnosti $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ pomocí elementární transformace (I), pak dostaneme $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ zpátky z $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ pomocí prohození vektorů $\mathbf{y}_i$ a $\mathbf{y}_j$. Pokud jsme dostali $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ z $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ pomocí elementární transformace (II), tj. vynásobením vektoru $\mathbf{x}_i$ skalárem $a \neq 0$, pak dostaneme $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ z $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ vynásobením vektoru $\mathbf{y}_i = a\mathbf{x}_i$ skalárem $a^{-1} \neq 0$. A pokud jsme dostali $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ z $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ pomocí elementární transformace (III), tj. přičtením $a\mathbf{x}_j$ k vektoru $\mathbf{x}_i$, pak dostaneme $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ zpátky z $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ elementární transformací (III), při které přičteme k vektoru $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + a\mathbf{x}_j$ vektor $(-a)\mathbf{y}_j = (-a)\mathbf{x}_j$.

b) Je-li $\mathbf{x} \in l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, pak $\mathbf{x} = \sum_i a_i \mathbf{x}_i$. Dostaneme-li $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ z $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ transformací (I), pak stačí v sumě přehodit i-tý a j-tý člen a dostaneme, že $\mathbf{x} \in l(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$. Tedy $l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq l(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$. Protože také $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ dostaneme z $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ pomocí elementární transformace (I), platí rovněž $l(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n) \subseteq l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$.

Podobně v případě, že jsme dostali $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ z $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ pomocí elementární transformace (II) a $\mathbf{x} = \sum_j a_j \mathbf{x}_j$, platí rovněž $\mathbf{x} = \sum_{j \neq i} a_j \mathbf{x}_j + a_i a^{-1}(a\mathbf{x}_i)$, tedy $l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq l(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$. Ze stejného důvodu jako v případě elementární transformace (I) dostaneme i opačnou inkluzi $l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq l(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$.

Je-li $\mathbf{x} = \sum_k a_k \mathbf{x}_k$ a $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + a\mathbf{x}_j$, $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ pro $k \neq i$, pak také $\mathbf{x} = \sum_k a_k \mathbf{y}_k + (-a)\mathbf{y}_j$, tedy $l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) \subseteq l(\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n)$. Z již známého důvodu platí i opačná inkluze.

c) Předpokládejme, že $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně nezávislý systém. Dostaneme-li $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ z $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ pomocí elementární transformace (I) nebo (II), plyne tvrzení přímo z definic. Dostaneme-li $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ z $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ pomocí elementární transformace (III), není situace příliš obtížnější. V tomto případě platí $\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ pro $k \neq i$ a $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i + a\mathbf{x}_j$. Je-li tedy $\sum_k b_k \mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ pro nějaké skaláry $b_1, \ldots, b_n$, platí také

$$\sum_{k \neq i} b_k \mathbf{x}_k + b_i(\mathbf{x}_i + a\mathbf{x}_j) = \sum_{k \neq j} b_k \mathbf{x}_k + (b_i a + b_j)\mathbf{x}_j = \mathbf{0}.$$

Protože je systém $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislý, platí $b_k = 0$ pro $k \neq j$ a také $b_i a + b_j = b_j = 0$. Tedy také $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ je lineárně nezávislý systém. Protože opět můžeme dostat $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ z $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ pomocí elementární transformace (III), plyne z lineární nezávislosti $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ rovněž lineární nezávislost $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

d) To plyne okamžitě z částí b) a c).

Tvrzení e), f), g) a h) plynou okamžitě z odpovídajících tvrzení a), b), c) a d). □

Dále se budeme zabývat tím, jak vypadají matice přechodu od báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ prostoru $\mathcal{V}$ k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$, jestliže jsme novou bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ dostali z $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ pomocí nějaké elementární transformace.

Elementární transformace **(I)**. V tomto případě platí $\mathbf{z}_k = \mathbf{y}_k$ pro $k \neq i, j$, $\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_j$ a $\mathbf{z}_j = \mathbf{y}_i$. Matice přechodu $E_{ij} = (a_{pq})$ od $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ k $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ tak v tomto případě vypadá následovně

$$\begin{aligned} a_{ij} = a_{ji} &= 1, \\ a_{kk} &= 1, \qquad k \neq i, j, \end{aligned}$$

a všechny ostatní prvky matice E_{ij} jsou rovné 0.

Všimněme si ještě, že použijeme-li na bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ tutéž elementární transformaci typu (I), tj. přehození vektorů na místech i a j, dostaneme zpět původní bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. Matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ se tedy také rovná matici E_{ij}.

Elementární transformace **(II)**. V tomto případě platí $\mathbf{z}_k = \mathbf{y}_k$ pro $k \neq i$ a $\mathbf{z}_i = a\mathbf{y}_i$. Matice přechodu $E_i(a) = (a_{pq})$ od báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ tedy vypadá následovně

$$\begin{aligned} a_{ii} &= a, \\ a_{kk} &= 1, \qquad k \neq i, \end{aligned}$$

a všechny ostatní prvky matice $E_i(a)$ jsou rovné 0. Prvky na hlavní diagonále jsou různé od 0, zatímco všechny prvky mimo hlavní diagonálu jsou 0.

V tomto případě se od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ dostaneme zpět k původní bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ dostaneme elementární transformací (II), která prvek $\mathbf{z}_i = a\mathbf{y}_i$ vynásobí skalárem $a^{-1} \neq 0$. Matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ se tedy rovná matici $E_i(a^{-1})$.

Elementární transformace **(III)**. V tomto případě platí $\mathbf{z}_k = \mathbf{y}_k$ pro $k \neq i$ a $\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i + a\mathbf{y}_j$. Matice přechodu $M_{ij}(a) = (a_{pq})$ od $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ má proto následující tvar

$$\begin{aligned} a_{ij} &= a, \\ a_{kk} &= 1, \qquad k = 1, \dots, m, \end{aligned}$$

a všechny ostatní prvky jsou rovné 0. Matice $E_{ij}(a)$ má tedy na hlavní diagonále všechny prvky rovné 1 a mimo hlavní diagonálu jsou všechny prvky rovné 0 s možnou výjimkou prvku na místě (i, j), který se rovná a (a může být také nulový).

Od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ se můžeme vrátit k původní bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ pomocí elementární transformace (III), která k prvku $\mathbf{z}_i = \mathbf{y}_i + a\mathbf{y}_j$ přičítá $(-a)$-násobek prvku $\mathbf{z}_j = \mathbf{y}_j$. Matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ se tedy rovná matici $E_{ij}(-a)$.

Definice 9.22. Libovolnou čtvercovou matici E_{ij}, $E_i(a)$, kde $a \neq 0$, a $E_{ij}(a)$, kde $i \neq j$ a $a \in \mathbf{T}$, řádu m nazýváme *elementární matice* řádu m.

Ve Větě 9.36 jsme si ukázali, jak vypočítat souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$, známe-li jeho souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ a matici přechodu od báze $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$. Předchozí odstavce nám spolu s Větou 9.36 dávají možnost spočítat naopak souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$, známe-li jeho souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ a přejdeme-li od báze $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ nějakou elementární transformací. Ukázali jsme si totiž, jak v takovém případě vypadá matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$, a pak už můžeme Větu 9.36 použít.

Nechť má vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ souřadnice $(a_1, a_2, \dots, a_m)$. V případě elementární transformace (I) je matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ rovna matici E_{ij}. Označíme-li $\mathbf{a}$ souřadnice $\mathbf{x}$ zapsané sloupcově, rovnají se nové souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ součinu $E_{ij}\mathbf{a}$ a dostaneme je ze souřadnic vektoru $\mathbf{x}$ přehozením i-té a j-té složky.

Podobně je to s ostatními elementárními transformacemi. Pokud vynásobíme i-tý vektor báze $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ skalárem $a \neq 0$, je matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ rovna matici $E_i(a^{-1})$. Souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ tedy dostaneme jako součin $E_i(a^{-1})\mathbf{a}$. Jinak řečeno, souřadnice $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ dostaneme ze souřadnic $(a_1, \dots, a_m)$ vynásobením i-té souřadnice a_i číslem a^{-1}.

Pokud přičteme k vektoru $\mathbf{x}_i$ vektor $a\mathbf{x}_j$, je matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ rovna elementární matici $E_{ij}(-a)$. Součin $E_{ij}(-a)\mathbf{a}$ tedy vyjadřuje souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_m$ pomocí jeho souřadnic vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$. Dostaneme je tak, že k souřadnici a_i přičteme $(-a)$-násobek j-té souřadnice a_j. Nová i-tá souřadnice se tedy rovná $a_i - aa_j$ a všechny ostatní souřadnice zůstávají nezměněné.

Tím jsme v podstatě dokázali následující větu.

Věta 9.39. Buď $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze v $\mathcal{U}$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ báze ve $\mathcal{V}$. Jestliže bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ dostaneme z báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ pomocí nějaké elementární transformace a E je matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$, pak matice zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ se rovná součinu $EM(A)$, kde $M(A)$ je matice zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$.

Speciálně, je-li $E = E_{ij}$, pak matici $EM(A)$ dostaneme z $M(A)$ prohozením i-tého a j-tého řádku. Je-li $E = E_i(a)$, pak $EM(A)$ dostaneme z $M(A)$ vynásobením i-tého řádku skalárem a. A je-li $E = E_{ij}(a)$, pak $EM(A)$ dostaneme tak, že k i-tému řádku přičteme a-násobek j-tého řádku.

Důkaz. První část plyne z poznámek v odstavcích před formulací Věty 9.39. Druhá část plyne z tvaru elementárních matic a z definice součinu matic. $\square$

Definice 9.23. Je-li M matice tvaru $m \times n$ a E elementární matice řádu m, pak součin EM nazýváme *elementární řádkovou transformací* matice M. Dvě matice M, N tvaru $m \times n$ nazýváme *řádkově ekvivalentní*, jestliže jednu z druhé dostaneme nějakou posloupností elementárních řádkových transformací.

Věta 9.39 tedy říká, že známe-li matici M lineárního zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$, a změníme-li bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ prostoru $\mathcal{V}$ nějakou elementární transformací, pak dostaneme matici **téhož** zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ příslušnou elementární řádkovou transformací matice M. Je také důležité podívat se na předchozí větu z opačné strany. Libovolná matice M může být maticí nějakého lineárního zobrazení vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. Uděláme-li na matici M nějakou elementární transformaci, můžeme ji považovat za důsledek příslušné elementární transformace provedené na bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. Tato úvaha objasňuje geometrický význam následující věty.

Věta 9.40. Každá matice M tvaru $m \times n$ je řádkově ekvivalentní matici N, která má následující vlastnosti:

(a) prvních r řádků matice N je nenulových pro nějaké $r \geq 0$, $r \leq m$, a všechny zbývající řádky jsou nulové,
(b) v i-tém řádku (pro všechna $i = 1, \ldots, r$) je první nenulový prvek roven 1 a vyskytuje se v c_i-tém sloupci,
(c) $c_1 < c_2 < \cdots < c_r$,
(d) v c_i-tém sloupci je jediný nenulový prvek číslo 1 v i-tém řádku.

Důkaz. Označme si c_1 číslo prvního nenulového sloupce matice M. Pokud žádný takový sloupec neexistuje, jsou všechny prvky matice M rovné 0 a taková matice má všechny vlastnosti (a)-(d).

V c_1-tém sloupci je nějaký nenulový prvek v i-tém řádku a pokud to není první řádek, prohodíme i-tý řádek s prvním elementární řádkovou transformací (I). Nenulový prvek a je tedy nyní na místě $(1, c_1)$ naší matice. Vynásobením prvního řádku skalárem a^{-1} (elementární řádková transformace (II)) dosáhneme toho, aby se prvek na místě $(1, c_1)$ rovnal 1.

Je-li v c_1-tém sloupci ještě nějaký jiný nenulový prvek b v j-tém řádku, $j \neq 1$, odečteme od j-tého řádku b-násobek prvního řádku (elementární řádková transformace (III)). Opakováním tohoto triku docílíme toho, že všechny prvky v c_1-tém sloupci jsou rovné 0 až na prvek 1 v prvním řádku.

Tím jsme dostali matici M_1. Jsou-li v matici M_1 všechny řádky s výjimkou prvního nulové, má matice M_1 všechny požadované vlastnosti (a)-(d). Pokud jsou v M_1 ještě další nenulové řádky, najdeme první sloupec, který má nenulový prvek v jiném, než prvním řádku. Nechť c_2 je pořadí tohoto sloupce. Přehozením řádků docílíme toho, aby v c_2-tém sloupci byl nenulový prvek ve druhém řádku. Vynásobením druhého řádku vhodnou konstantou dosáhneme toho, aby byl prvek na místě $(2, c_2)$ roven 1. Odečtením vhodného násobku druhého řádku od ostatních řádků dosáhneme toho, že v c_2-tém sloupci jsou všechny prvky rovné 0 s výjimkou 1 ve druhém řádku. Během všech těchto transformací se c_1-tý sloupec nemění.

Opakováním tohoto postupu nakonec vede k situaci, kdy v c_r-tém sloupci jsou všechny prvky rovné 0 s výjimkou 1 v r-tém řádku a všechny zbývající řádky pod r-tým řádkem jsou nulové (nebo neexistují). Taková matice už má všechny vlastnosti (a)-(d). □

Definice 9.24. Splňuje-li matice N podmínky (a)-(d) Věty 9.40, říkáme, že je v *odstupňovaném tvaru.* Anglicky se tomu říká **reduced row echelon form.**

Věta 9.41. Buď M libovolná matice (typu $m \times n$) s prvky v tělese $\mathbf{T}$. Potom její řádková hodnost se rovná její sloupcové hodnosti.

Důkaz. Matice M je maticí nějakého lineárního zobrazení $A : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^m$ vzhledem ke standardním bázím. Označíme-li s sloupcovou hodnost matice M, tak potom podle Věty 6.27 (nebo Věty 7.32) platí rovnost $n - s = \dim Ker(A)$.

Podle Věty 9.40 je matice M řádkově ekvivalentní matici N, která splňuje podmínky (a)-(d) této věty. Platí tedy $N = E_k E_{k-1} \cdots E_1 M$, kde E_i, $i = i = 1, \ldots, k$, jsou elementární matice řádu m. Podle první části Věty 9.39 je tedy N maticí operátoru A vzhledem ke standardní bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ v $\mathcal{T}^n$ a nějaké jiné bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ v $\mathcal{T}^m$.

Řádková hodnost matice N je rovna řádkové hodnosti matice M podle Věty 9.38b) a rovná se počtu nenulových řádků matice N, tj. r. To plyne z tvaru sloupců $c_1, \ldots, c_r$. Z matice N také vyčteme dimenzi oboru hodnot $Im(A)$ operátoru A. Prostor $Im(A)$ se podle Věty 6.22b) rovná lineárnímu obalu vektorů $A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)$. Obraz vektoru $\mathbf{x}_i$ lineárním zobrazením A je v bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ dán i-tým sloupcem matice N. Sloupce $c_1, \ldots, c_r$ jsou lineárně nezávislé, jsou tedy lineárně nezávislé i vektory $A(\mathbf{x}_{c_1}), \ldots, A(\mathbf{x}_{c_r})$, prostor $Im(A)$ má tedy dimenzi aspoň r. Všechny ostatní sloupce matice N, tedy všechny vektory $A(x_j)$, $j \neq c_1, \ldots, c_r$, jsou dále lineárně závislé na vektorech $A(\mathbf{x}_{c_1}), \ldots, A(\mathbf{x}_{c_r})$, dimenze $Im(A)$ se tedy rovná přesně r.

Podle Věty 6.27 platí $n = \dim \mathcal{T}^n = \dim Ker(A) + \dim Im(A) = \dim Ker(A) + r$, tj. $n - r = \dim Ker(A)$. Srovnáním této rovnosti s rovností z konce prvního odstavce důkazu dostáváme $r = s$. □

Definice 9.25. *Hodností* (nebo také *rankem*) matice M nazýváme její řádkovou (sloupcovou) hodnost.

Zkuste si sami zformulovat a dokázat všechna tvrzení z této kapitoly týkající se elementárních řádkových transformací také pro elementární sloupcové transformace matic. Rozmyslete si geometrický význam těchto "sloupcových" tvrzení.