7. Matice

Definice 7.15. *Maticí* typu $m \times n$ s prvky v tělese $\mathbf{T}$ rozumíme soubor čísel $a_{ij} \in \mathbf{T}$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Matice obvykle zapisujeme ve tvaru

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}).$$

Prvek a_{ij} nazýváme také prvek namístě (i, j) matice M. Je-li $m = n$, říkáme že M je *čtvercová matice* stupně n.

Vektor $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ nazýváme i-tý řádek matice M. Podobně vektor $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ nazýváme j-tý sloupec matice M. Sloupce budeme někdy zapisovat jako skutečné sloupce:

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

a pro zdůraznění, že máme na mysli takovýto zápis, budeme mluvit o sloupcovém vektoru. Sloupcový vektor je vlastně matice typu $m \times 1$.

Je-li dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$, nazýváme matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

maticí této soustavy, a matici

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

rozšířenou maticí této soustavy.

Jak souvisí matice s lineárními zobrazeními? Jsou-li $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ dva konečně dimenzionální prostory, $\dim \mathcal{U} = n$, $\dim \mathcal{V} = m$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze v $\mathcal{U}$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ báze ve $\mathcal{V}$, a $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, pak je A jednoznačně určené vektory $A(\mathbf{x}_j) \in \mathcal{V}$ pro $j = 1, \ldots, n$, podle Věty 6.25. Každý prvek $A(\mathbf{x}_j)$ lze jednoznačně vyjádřit jako lineární kombinaci prvků báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$:

$$A(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i.$$

Definice 7.16. Matici

$$M(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

nazýváme *matice lineárního zobrazení* A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$.

Matice lineárního zobrazení tedy závisí na zvolených bázích v prostorech $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$. Jedno a to samé lineární zobrazení může mít různé matice vzhledem k různým bázím. Všimněte si, že matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ závisí na pořadí prvků v těchto bázích.

Lemma 7.30. Je-li dána matice $M = (a_{ij})$ typu $m \times n$, báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ prostoru $\mathcal{U}$, báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ prostoru $\mathcal{V}$, pak existuje právě jedno lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takové, že jeho matice $M(A)$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ se rovná M. Je-li $\mathbf{x} = \sum_1^n b_j\mathbf{x}_j$ libovolný vektor prostoru $\mathcal{U}$, pak

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} a_i\mathbf{y}_i, \quad \text{kde} \quad a_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j.$$

Důkaz. Aby byla M maticí nějakého lineárního zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$, musí platit

$$A(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i$$

pro všechna $j = 1, \ldots, n$. Tímto požadavkem je zobrazení A určené jednoznačně podle Věty 6.25.

Je-li $\mathbf{x} = \sum_1^n b_j \mathbf{x}_j$ libovolný vektor prostoru $\mathcal{U}$, pak spočítáme hodnotu $A(\mathbf{x})$ následovně:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}) =& A(\sum_{j=1}^n b_j \mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^n b_j A(\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^n b_j (\sum_{i=1}^m a_{ij} \mathbf{y}_i) = \\ & \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m b_j a_{ij} \mathbf{y}_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j \mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^m (\sum_{j=1}^n a_{ij} b_j) \mathbf{y}_i. \end{aligned}$$

Platí tedy $a_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_j$ pro všechna $i = 1, \dots, m$. $\square$

Formulku pro výpočet a_i si zapamatujeme tak, že "skalárně" násobíme i-tý řádek matice M, tj. vektor $(a_{i1}, \dots, a_{in})$ s vektorem $(b_1, \dots, b_n)$ souřadnic $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$.

Všimněme si ještě toho, že matice M určuje jednoznačně lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ teprve tehdy, zvolíme-li bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ v $\mathcal{U}$ a bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ ve $\mathcal{V}$. Stejná matice M určuje při různých volbách bází $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ různá lineární zobrazení.

Je-li dána pouze matice M typu $m \times n$ s prvky v tělese $\mathbf{T}$, domluvíme se, že ji budeme považovat za matici lineárního zobrazení $A : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^m$ vzhledem ke standardním bázím $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ v $\mathcal{T}^n$ a $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ v $\mathcal{T}^m$. Standardní bází v $\mathcal{T}^n$ rozumíme bázi tvořenou prvky $\mathbf{x}_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, kde 1 je pouze na j-tém místě. Podobně $\mathbf{y}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathcal{T}^m$, kde 1 je pouze na i-tém místě. Podle Lemma 7.30 je potom hodnota lineárního zobrazení A v bodě $\mathbf{x} = (a_1, \dots, a_n)$ rovna vektoru $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m) \in \mathcal{T}^m$, kde

$$b_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_j.$$

Je-li tedy dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

označíme si M matici této soustavy a $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ vektor pravých stran této soustavy. Matice M určuje jednoznačně lineární zobrazení $A : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^m$ (vzhledem ke standardním bázím) a nějaký vektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{T}^n$ je řešením této soustavy právě když $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$.

Definice 7.17. Buď $M = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ s prvky v tělese $\mathbf{T}$. *Řádkovým prostorem* matice M nazýváme lineární obal řádkových vektorů $\mathbf{a}_i = (a_{i1}, \dots, a_{in})$, $i = 1, \dots, m$, a *řádkovou hodností* matice M nazýváme dimenzi tohoto lineárního obalu, tj. dimenzi řádkového prostoru matice M.

Podobně *sloupcovým prostorem* matice M nazýváme lineární obal sloupcových vektorů $\mathbf{b}_j = (b_{1j}, \dots, b_{mj}) \in \mathcal{T}^m$, $j = 1, \dots, n$, a *sloupcovou hodností* matice M nazýváme dimenzi sloupcového prostoru matice M.

Věta 7.31. Buď

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

soustava m lineárních rovnic o n neznámých s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$. Označme M její matici a buď $A : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^m$ příslušné lineární zobrazení (určené standardními bázemi v $\mathcal{T}^n$ a $\mathcal{T}^m$). Je-li $\mathbf{x}_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0) \in \mathcal{T}^n$, kde 1 je na j-tém místě, pak $A(\mathbf{x}_j) = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})$, tj. $A(\mathbf{x}_j)$ je j-tý sloupcový vektor matice M. Soustava má řešení právě když vektor pravých stran $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ leží ve sloupcovém prostoru matice M, což je právě když je sloupcová hodnost matice soustavy rovna sloupcové hodnosti rozšířené matice soustavy.

Důkaz. Rovnost $A(\mathbf{x}_j) = (a_{1j} \ldots, a_{mj})$ plyne z Lemma 7.30.

Je-li $\mathbf{x} = (a_1, \ldots, a_n)$ řešení soustavy, je $\mathbf{x} = \sum_1^n a_j \mathbf{x}_j$ a $\mathbf{b} = A(\mathbf{x}) = \sum_1^n x_j A(\mathbf{x}_j)$, tedy vektor $\mathbf{b}$ je lineární kombinací sloupců matice M a leží tedy v jejím sloupcovém prostoru.

Je-li naopak $\mathbf{b}$ prvek sloupcového prostoru matice M, tj. lineární kombinace sloupcových vektorů $A(\mathbf{x}_j)$, $j = 1, \ldots, n$, existují čísla $a_j \in \mathbf{T}$, $j = 1, \ldots, n$, taková že $\mathbf{b} = \sum_1^n a_j A(\mathbf{x}_j)$, neboli $\mathbf{b} = A(\sum_1^n a_j \mathbf{x}_j)$. Vektor $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{T}^n$ je tedy řešením soustavy.

Platí $l(A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)) \subseteq l(A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n), \mathbf{b})$. Dimenze obou podprostorů $\mathcal{T}^m$ se rovnají právě když se rovnají oba prostory a to je právě když je $\mathbf{b}$ lineární kombinací sloupcových vektorů $A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)$, což je právě když $\mathbf{b}$ leží ve sloupcovém prostoru matice M. $\square$

Věta 7.32. Buď

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

soustava m homogenních lineárních rovnic o n neznámých s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$. Označme M její matici a buď $A : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^m$ příslušné lineární zobrazení (určené standardními bázemi v $\mathcal{T}^n$ a $\mathcal{T}^m$). Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ je řešením této soustavy právě když platí $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Množina všech řešení soustavy je tedy podprostor $\mathcal{T}^n$. Jeho dimenze je rovna rozdílu mezi n (počtem neznámých) a sloupcovou hodností matice M.

Důkaz. Vektor $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ je řešení soustavy právě když $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ podle předchozí Věty 7.31. Množina všech řešení této soustavy je tedy jádro operátoru A a to je podprostor $\mathcal{T}^n$ podle Věty 6.22e. Podle Věty 6.27 platí $n = \dim \mathcal{U} = \dim Ker(A) + \dim Im(A)$. Obraz $Im(A)$ se rovná lineárnímu obalu vektorů $A(\mathbf{x}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, kde $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je standardní báze $\mathcal{T}^n$, neboli sloupcovému prostoru matice M. Dimenze podprostoru $Im(A)$ je tedy rovna sloupcové hodnosti matice M. $\square$

Věta 7.33. Buď

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

soustava m lineárních rovnic o n neznámých s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$. Buď $\mathbf{x}$ nějaké řešení této soustavy. Potom libovolné řešení této soustavy je tvaru $\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, kde $\mathbf{x}_0$ je libovolné řešení příslušné homogenní soustavy

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Naopak, každý vektor tvaru $\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, kde $\mathbf{x}_0$ je řešení homogenní soustavy, je řešením původní soustavy.

Důkaz. Je-li $\mathbf{y}$ nějaké řešení původní (nehomogenní) soustavy, je $A(\mathbf{y}) = \mathbf{b}$. Protože také $A(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$, platí $A(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Můžeme tedy položit $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y} - \mathbf{x}$.

Je-li naopak $\mathbf{x}_0$ libovolné řešení homogenní soustavy, platí $A(\mathbf{x}+\mathbf{x}_0) = \mathbf{b}+\mathbf{0} = \mathbf{b}$, tedy $\mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ je řešení původní (nehomogenní) soustavy. □

Poslední větu můžeme stručně vyjádřit tak, že množina všech řešení soustavy m lineárních rovnic o n neznámých s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$ je lineál v aritmetickém prostoru $\mathcal{T}^n$.

Definice 7.18. Jsou-li $M = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$ a $N = (b_{ki})$ matice typu $p \times m$, pak součinem matic N, M (v tomto pořadí) rozumíme matici $NM = (c_{kj})$ typu $p \times n$, kde prvek c_{kj} na místě (k, j) vypočteme ze vztahu

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki} c_{ij}.$$

Je důležité si uvědomit, že součin matic N a M je v tomto pořadí definován pouze v případě, kdy počet sloupců matice N se rovná počtu řádků matice M. V takovém případě je prvek c_{kj} na místě (k, j) součinu NM roven "skalárnímu součinu" k-tého řádku matice N s j-tým sloupcem matice M.

Následující věta je zdůvodněním, proč se součin matic definuje právě tímto způsobem.

Věta 7.34. Jsou-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a $B : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineární zobrazení, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze v $\mathcal{U}$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ báze ve $\mathcal{V}$, $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p$ báze v $\mathcal{W}$, $M(A) = (a_{ij})$ matice zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a $M(B) = (b_{ki})$ matice zobrazení B vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p$, pak matice $M(BA) = (c_{kj})$ složeného lineárního zobrazení z $\mathcal{U}$ do $\mathcal{W}$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_p$ se rovná součinu matic $M(B)$ a $M(A)$, tj.

$$M(BA) = M(B)M(A).$$

Důkaz. Buď $\mathbf{x}_j$ libovolný prvek dané báze v $\mathcal{U}$. Pak

$$A(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i.$$

Podobně

$$B(\mathbf{y}_i) = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathbf{z}_k.$$

Potom dostáváme

$$\begin{aligned} BA(\mathbf{x}_j) =& B(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\mathbf{y}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}B(\mathbf{y}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}(\sum_{k=1}^{p} b_{ki}\mathbf{z}_k) = \\ & \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} a_{ij}b_{ki}\mathbf{z}_k = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}\mathbf{z}_k = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij})\mathbf{z}_k. \end{aligned}$$

Tedy $c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ij}$. $\square$

Věta 7.35. Násobení matic je asociativní.

Důkaz. Nechť $M = (a_{ij})$ je matice tvaru $m \times n$, $N = (b_{jk})$ je matice tvaru $n \times p$ a $P = (c_{kl})$ je matice tvaru $p \times q$, všechny matice s prvky v tělese $\mathbf{T}$. Oba součiny $(MN)P$ a $M(NP)$ jsou tedy definované a musíme ukázat, že se rovnají jedné a téže matici tvaru $m \times q$. Ukážeme si dva důkazy, první "aritmetický" a druhý "geometrický".

V aritmetickém důkazu si označíme $E = (e_{ik})$ součin MN. Matice E je tedy tvaru $m \times p$ a

$$e_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk}.$$

Označíme-li dále $F = (f_{il})$ součin $EP = (MN)P$, platí potom

$$f_{il} = \sum_{k=1}^{p} e_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk})c_{kl} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})c_{kl}.$$

Podobně spočteme také součin $M(NP)$. Označme si tedy $G = (g_{jl}) = NP$. Potom

$$g_{jl} = \sum_{k=1}^{p} b_{jk}c_{kl}.$$

Dále si označíme $H = (h_{il}) = M(NP)$. Pak dále platí

$$h_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} g_{jl} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} a_{ij} (b_{jk} c_{kl}).$$

Vzhledem k tomu, že násobení v tělese $\mathbf{T}$ je asociativní, sčítáme ve vyjádřeních f_{il} a h_{il} stejné prvky tělesa $\mathbf{T}$, pouze v jiném pořadí. Protože je sčítání v $\mathbf{T}$ komutativní, platí rovnost $f_{il} = h_{il}$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$ a $l = 1, \ldots q$, tedy $(MN)P = F = H = M(NP)$.

V geometrickém důkazu vyjdeme z toho, že matice M je maticí lineárního zobrazení $A : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^m$ vzhledem ke standardním bázím $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$, matice N je maticí lineárního zobrazení $B : \mathcal{T}^p \to \mathcal{T}^n$ vzhledem ke standardním bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$, a matice P je maticí lineárního zobrazení $C : \mathcal{T}^q \to \mathcal{T}^p$ vzhledem ke standardním bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_p$. Opakovaným použitím Věty 7.34 dostaneme, že $(MN)P$ je matice lineárního zobrazení $(AB)C$ vzhledem ke standardním bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$, a matice $M(NP)$ je matice lineárního zobrazení $A(BC)$ vzhledem ke standardním bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$. Skládání zobrazení je ale asociativní, tj. $(AB)C = A(BC) = ABC$, a vzhledem k tomu, že matice lineárního zobrazení $ABC : \mathcal{T}^q \to \mathcal{T}^m$ je určena volbou bází $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$ a $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m$ jednoznačně, plyne odtud rovnost $(MN)P$ a $M(NP)$. $\square$

Považujeme-li sloupcové vektory za matice tvaru $n \times 1$, můžeme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

zapsat jednoduše ve tvaru

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

kde $M = (a_{ij})$ je matice soustavy, sloupcový vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

je vektor neznámých a

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

je vektor pravých stran.

Rovnice

$$M\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

je zápis původní soustavy v maticovém tvaru.