6. Lineární zobrazení

Geometrická motivace lineárních zobrazení.

Definice 6.14. Jsou-li $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ vektorové prostory nad stejným tělesem $\mathbf{T}$ a $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ zobrazení, pak říkáme, že A je *lineární zobrazení,* platí-li

$$A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aA(\mathbf{x}) + bA(\mathbf{y})$$

pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ a každé dva skaláry $a, b \in \mathbf{T}$. Lineární zobrazení A je *prosté (monomorfizmus),* je-li zobrazení A prosté, je *na (epimorfizmus),* je-li A zobrazení na, a nazývá se *izomorfizmus,* je-li A vzájemně jednoznačné (tj. prosté a na) zobrazení.

Připomeňme, že co je to izomorfizmus dvou vektorových prostorů jsme definovali už v Definici 5.11. Srovnáním obou definic dostáváme, že izomorfizmus je lineární zobrazení, které je vzájemně jednoznačné.

Příklad 6.12. a) Identické zobrazení vektorového prostoru na sebe je lineární zobrazení.

b) Zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$, které každému $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ přiřazuje nulový vektor prostoru $\mathcal{V}$, je lineární zobrazení.

c) Zobrazení $\pi_i : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^{n-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$, definované předpisem

$$\pi_i(a_1, \dots, a_n) = (a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)$$

je lineární zobrazení.

d) Zobrazení $\rho_i : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}$, $i = 1, 2, \dots, n$, definované předpisem $\rho_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$ je lineární zobrazení.

Příklad 6.13. a) Dokažte, že jsou-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a $B : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ lineární zobrazení, pak také jejich složení $BA : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ je lineární zobrazení.

b) Dokažte, že jsou-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a $B : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ izomorfizmy, pak také $BA : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ je izomorfizmus.

c) Dokažte, že je-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ izomorfizmus, pak také inverzní zobrazení $A^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ je izomorfizmus.

d) Dokažte, že každé dva vektorové prostoty stejné konečné dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ jsou izomorfní.

Zavedeme ještě následující označení. Je-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, pak obraz prostoru $\mathcal{U}$ zobrazením A budeme označovat $A(\mathcal{U})$ nebo také $Im(A)$, je to množina $\{\mathbf{y} \in \mathcal{V} : a(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ pro nějaké $\mathbf{x} \in \mathcal{U}\}$. Obecněji, je-li $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$, pak obraz $A(\mathcal{S})$ množiny $\mathcal{S}$ zobrazením A je množina $\{\mathbf{y} \in \mathcal{V} : A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ pro nějaké $\mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$. *Jádro* lineárního zobrazení A je

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX podprostor $\{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$ prostoru $\mathcal{U}$. (Dokažte si, že je to opravdu podprostor $\mathcal{U}$.) A nakonec, je-li $\mathcal{S}$ podmnožina $\mathcal{U}$, pak $l(\mathcal{S})$ označuje lineární obal $\mathcal{S}$. Je-li $\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, pak píšeme také $l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$ místo $l(\mathcal{S})$.

Příklad 6.14. Soustava m lineárních rovnic o n neznámých coby lineární zobrazení. Uvažujme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned}$$

Koeficienty a_{ij} této soustavy jsou prvky nějakého tělesa $\mathbf{T}$. Levé strany rovnic této soustavy určují lineární zobrazení z prostoru $\mathcal{T}^n$ do prostoru $\mathcal{T}^m$. Skutečně, označme si $\mathbf{u}_j$ vektor $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ koeficientů u neznámé x_j. Pro názornost si jej můžeme zapsat ve sloupcovém tvaru:

$$\mathbf{u}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

Je-li nyní $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{T}^n$ libovolný vektor n-dimenzionálního aritmetického prostoru $\mathcal{T}^n$, můžeme vypočítat vektor

$$\mathbf{u}_1 a_1 + \cdots + \mathbf{u}_n a_n = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} a_1 + \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} a_2 + \cdots + \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} a_n.$$

Pokud se tento vektor bude rovnat vektoru pravých stran

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

naší soustavy, budou čísla $a_1, \ldots, a_n$ řešením této soustavy. Zobrazení $A : \mathcal{T}^n \to \mathcal{T}^m$, které každému vektoru $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{T}^n$ přiřazuje vektor

$$A(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_1 x_1 + \mathbf{u}_2 x_2 + \cdots \mathbf{u}_n x_n$$

je lineární zobrazení. Naše soustava má aspoň jedno řešení právě když vektor pravých stran $(b_1, \ldots, b_m)$ leží v obrazu $Im(A)$ operátoru A. Soustava má nejvýše jedno řešení právě když je operátor A prostý.

Věta 6.22. Základní vlastnosti lineárních zobrazení. Buď $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení. Potom platí

a) $A(a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n) = a_1A(\mathbf{x}_1) + \cdots + a_nA(\mathbf{x}_n)$ pro každé $n \geq 1$, libovolné vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{U}$ a libovolné skaláry $a_1, \ldots, a_n$.

b) $A(l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)) = l(A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n))$ pro libovolné vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{U}$.

c) $A(l(\mathcal{S})) = l(A(\mathcal{S}))$ pro každou podmnožinu $\mathcal{S}$ prostoru $\mathcal{U}$.

d) Je-li $\mathcal{S}$ podprostor vektorového prostoru $\mathcal{U}$, pak $A(\mathcal{S})$ je podprostor prostoru $\mathcal{V}$. Speciálně, $Im(A) = A(\mathcal{U})$ je podprostor $\mathcal{V}$.

e) Je-li $\mathcal{S}$ podprostor $\mathcal{V}$, pak $A^{-1}(\mathcal{S}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{U} : A(\mathbf{x}) \in \mathcal{S}\}$ je podprostor $\mathcal{U}$. Speciálně, jádro $Ker(A)$ lineárního zobrazení A je podprostor $\mathcal{U}$.

f) $A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Důkaz. a) Pro $n = 2$ to plyne přímo z definice. Je-li $n > 2$, platí $A(a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{n-1}\mathbf{x}_{n-1} + a_n\mathbf{x}_n) = A(a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{n-1}\mathbf{x}_{n-1}) + a_nA(\mathbf{x}_n) = \cdots = a_1A(\mathbf{x}_1) + \cdots a_nA(\mathbf{x}_n)$. Zbývá $n = 1$. V tomto případě $A(a_1\mathbf{x}_1) = A(a_1\mathbf{x}_1 + 0\mathbf{x}_2) = a_1A(\mathbf{x}_1) + 0A(\mathbf{x}_2) = a_1A(\mathbf{x}_1)$.

Formálnější důkaz lze udělat indukcí podle n.

b) Je-li $\mathbf{x} \in l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$, platí $\mathbf{x} = \sum_1^n a_i\mathbf{x}_i$ pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_n$ podle Věty 5.17. Potom dostáváme, že $A(\mathbf{x}) = A(\sum_1^n a_i\mathbf{x}_i) = \sum_1^n a_iA(\mathbf{x}_i)$ (podle části a)), a tedy také $A(\mathbf{x}) \in l(A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n))$.

Opačně, je-li $\mathbf{y} \in l(A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n))$, platí opět podle Věty 5.17, že $\mathbf{y} = \sum_1^n b_iA(\mathbf{x}_i)$ pro nějaká čísla $b_1, \ldots, b_n$. Podle části a) potom platí $\mathbf{y} = \sum_1^n b_iA(\mathbf{x}_i) = A(\sum_1^n b_i\mathbf{x}_i)$, tedy $\mathbf{y} \in A(l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n))$.

c) Jestliže je $\mathbf{x} \in l(\mathcal{S})$, potom existují podle Věty 5.17 prvky $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{S}$ takové, že $\mathbf{x} \in l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)$. Pak podle části b) platí $A(\mathbf{x}) \in A(l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)) = l(A(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)) \subseteq l(A(\mathcal{S}))$.

Naopak, je-li $\mathbf{y} \in l(A(\mathcal{S}))$, pak opět podle Věty 5.17 existují vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{S}$ takové, že $\mathbf{y} \in l(A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n))$. Podle části b) je potom $\mathbf{y} \in l(A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)) = A(l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n)) \subseteq A(l(\mathcal{S}))$.

d) Použijeme jednoduché tvrzení, že množina $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{U}$ je podprostor $\mathcal{U}$ právě když $l(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$, které si snadno dokážete přímo z definic 5.12 a 6.14. Potom $l(A(\mathcal{S})) = A(l(\mathcal{S})) = A(\mathcal{S})$, tedy $A(\mathcal{S})$ je podprostor $\mathcal{V}$.

e) Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ libovolné dva prvky $A^{-1}(\mathcal{S})$ a $a, b \in \mathbf{T}$, pak $A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y}) \in \mathcal{S}$, a vzhledem k tomu, že $\mathcal{S}$ je podprostor $\mathcal{V}$, také $aA(\mathbf{x}) + bA(\mathbf{y}) = A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \in \mathcal{S}$. Tedy $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in A^{-1}(\mathcal{S})$.

f) Platí $A(\mathbf{0}) = A(0\mathbf{x}) = 0A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, kde $\mathbf{x}$ je libovolný prvek $\mathcal{U}$. $\square$

Věta 6.23. Následující tvrzení o lineárním zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ jsou ekvivalentní:

a) Lineární zobrazení A je prosté.

b) $Ker(A) = \{\mathbf{0}\}$.

c) Obraz každé lineárně nezávislé množiny v $\mathcal{U}$ je lineárně nezávislá množina ve $\mathcal{V}$.

V případě, že $\mathcal{U}$ je konečně-dimenzionální vektorový prostor, jsou tato tvrzení ekvivalentní ještě s následujícím tvrzením.

d) Obraz nějaké báze v $\mathcal{U}$ je lineárně nezávislá množina ve $\mathcal{V}$.

Důkaz. a)$\Rightarrow$b) Buď $\mathbf{x} \in Ker(A)$. Potom $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = A(\mathbf{0})$. Zobrazení A je prosté, tedy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

b)⇒c). Buď $\mathcal{S}$ lineárně nezávislá množina, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{S}$. Je-li $\sum_1^n a_i A(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$ pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_n$, je také $A(\sum_1^n a_i \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$. Protože je $Ker(A) = \{\mathbf{0}\}$, platí $\sum_i^n a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$. Množina $\mathcal{S}$ je ale lineárně nezávislá, tedy $a_i = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Tedy i množina $\{A(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$ je lineárně nezávislá.

c)⇒a). Je-li $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{y})$ pro nějaké vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$, platí $A(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Obraz množiny $\{\mathbf{x} - \mathbf{y}\}$ zobrazením A tedy není lineárně nezávislý, to tedy znamená podle c), že ani množina $\{\mathbf{x} - \mathbf{y}\}$ není lineárně nezávislá. Proto $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, neboli $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

c)⇒d). Protože každá báze v $\mathcal{U}$ je lineárně nezávislá, je obraz každé báze v $\mathcal{U}$ zobrazením A lineárně nezávislý ve $\mathcal{V}$.

d)⇒b) za předpokladu, že $\mathcal{U}$ je konečně dimenzionální. Buď $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ ta báze v $\mathcal{U}$, jejíž obraz je lineárně nezávislý ve $\mathcal{V}$. Buď $\mathbf{x} \in Ker(A)$. Potom $\mathbf{x} = \sum_1^n a_i \mathbf{x}_i$ pro nějaké skaláry $a_i \in \mathbf{T}$. Potom $A(\mathbf{x}) = \sum_1^n a_i A(\mathbf{x}_i)$ podle Věty 6.22a. Protože $\mathbf{x} \in Ker(A)$, platí $\sum_1^n a_i A(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$. Protože je systém $A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)$ lineárně nezávislý ve $\mathcal{V}$, platí $a_i = 0$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, tedy $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\square$

Věta 6.24. Buď $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze v $\mathcal{U}$. Potom je A izomorfizmus právě když $A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)$ je báze v prostoru $\mathcal{V}$.

Důkaz. Buď A izomorfizmus. Potom je množina $\{A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)\}$ lineárně nezávislá ve $\mathcal{V}$ podle Věty 6.23, neboť A je prosté. Vezměme libovolné $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Vzhledem k tomu, že A je také zobrazení na celé $\mathcal{V}$, existuje $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ takový, že $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Prvky $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ tvoří bázi v $\mathcal{U}$, tedy $\mathbf{x} = \sum_1^n a_i \mathbf{x}_i$ pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_n$. Potom $\mathbf{y} = A(\mathbf{x}) = \sum_1^n a_i A(\mathbf{x}_i)$. Každý prvek $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ lze tedy vyjádřit jako lineární kombinaci prvků množiny $\{A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)\}$, tato množina je tedy bází $\mathcal{V}$.

Nechť je naopak množina $\{A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)\}$ báze ve $\mathcal{V}$. Potom je zobrazení A prosté, neboť splňuje podmínku d) Věty 6.23. Libovolný prvek $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci $\mathbf{y} = \sum_1^n a_i A(\mathbf{x}_i)$, neboť $\{A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n)\}$ je báze ve $\mathcal{V}$. Potom $\mathbf{y} = A(\sum_1^n a_i \mathbf{x}_i)$ a tedy je A rovněž zobrazení na celé $\mathcal{V}$. $\square$

Dále se budeme zabývat existencí lineárních zobrazení.

Věta 6.25. Jsou-li $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ vektorové prostory nad $\mathbf{T}$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze v $\mathcal{U}$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ libovolné prvky prostoru $\mathcal{V}$, pak existuje právě jedno lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takové, že $A(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Buď $\mathbf{x} = \sum_1^n a_i \mathbf{x}_i$ libovolný prvek $\mathcal{U}$. Definujme $A(\mathbf{x}) = \sum_1^n a_i \mathbf{y}_i$. Je-li $\mathbf{y} = \sum_1^n b_i \mathbf{x}_i$ další prvek $\mathcal{U}$ a $a, b \in \mathbf{T}$, pak $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \sum_1^n (aa_i + bb_i)\mathbf{x}_i$ a tedy

$$A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = \sum_1^n (aa_i + bb_i)\mathbf{y}_i = a \sum_1^n a_i \mathbf{y}_i + b \sum_1^n b_i \mathbf{y}_i = aA(\mathbf{x}) + bA(\mathbf{y}).$$

Zobrazení A je tedy lineární.

Je-li $B : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ libovolné lineární zobrazení takové, že $B(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$, potom pro každé $\mathbf{x} = \sum_1^n a_i \mathbf{x}_i \in \mathcal{U}$ platí

$$A(\mathbf{x}) = \sum_1^n a_i A(\mathbf{x}_i) = \sum_1^n a_i \mathbf{y}_i = \sum_1^n a_i B(\mathbf{x}_i) = B(\sum_1^n a_i \mathbf{x}_i) = B(\mathbf{x}).$$

Tím je dokázáno, že $A(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x})$ pro všechna $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$, neboli $A = B$. $\square$

Věta 6.26. Jsou-li $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ vektorové prostory nad $\mathbf{T}$, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze v $\mathbf{U}$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ báze ve $\mathcal{V}$, pak existuje právě jeden izomorfizmus $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takový, že $A(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Plyne to ze dvou předcházejících vět. Podle Věty 6.25 existuje právě jedno lineární zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takové, že $A(\mathbf{x}_i) = \mathbf{y}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Podle Věty 6.24 je toto zobrazení izomorfizmus.

Závěrem této obecné části o lineárních zobrazeních se budeme zabývat souvislostmi mezi dimenzí a lineárními zobrazeními. Dimenzi vektorového prostoru $\mathcal{U}$ budeme označovat $\dim\mathcal{U}$.

Věta 6.27. Buď $\mathcal{U}$ konečně dimenzionální vektorový prostor a $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení. Potom platí

$$\dim\mathcal{U} = \dim Ker(A) + \dim Im(A).$$

Důkaz. Jádro $Ker(A)$ zobrazení A je podprostor $\mathcal{U}$ podle Věty 6.22e. Podle Věty 5.19 má konečnou dimenzi $m \leq n$. Buď $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ libovolná báze v $Ker(A)$. Podle Věty 5.20 ji lze rozšířit do báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ prostoru $\mathcal{U}$. Dokážeme, že $A(\mathbf{x}_{m+1}), \ldots, A(\mathbf{x}_m)$ je báze obrazu $Im(A)$.

Je-li $\mathbf{y} \in Im(A)$, existuje $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ takové, že $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$. Protože je $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze v $\mathcal{U}$ platí $\mathbf{x} = \sum_1^n a_i \mathbf{x}_i$ pro vhodné skaláry $a_1, \ldots, a_n$. Potom

$$\mathbf{y} = A(\mathbf{x}) = \sum_1^n a_i A(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=m+1}^n a_i A(\mathbf{x}_i),$$

neboť $A(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$. Vektory $A(\mathbf{x}_{m+1}), \ldots, A(\mathbf{x}_n)$ tedy generují podprostor $Im(A)$ prostoru $\mathcal{V}$. Zbývá dokázat, že jsou lineárně nezávislé.

Nechť tedy

$$\sum_{i=m+1}^n b_i A(\mathbf{x}_i) = \mathbf{0}$$

pro nějaké skaláry $b_{m+1}, \ldots, b_n$. Potom platí také, že

$$A(\sum_{i=m+1}^n b_i \mathbf{x}_i) = \mathbf{0}.$$

Tedy

$$\sum_{i=m+1}^n b_i \mathbf{x}_i \in Ker(A).$$

Existují tedy skaláry $b_1, \ldots, b_m$ takové, že

$$\sum_{i=m+1}^{n} b_i \mathbf{x}_i = \sum_{1}^{m} b_i \mathbf{x}_i,$$

neboť $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ tvoří bázi v $Ker(A)$. Potom ale

$$\sum_{i=1}^{m} (-b_i)\mathbf{x}_i + \sum_{i=m+1}^{n} b_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Vzhledem k tomu, že $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je báze v $\mathcal{U}$, platí $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Proto jsou vektory $A(\mathbf{x}_{m+1}), \ldots, A(\mathbf{x}_n)$ lineárně nezávislé.

Dokázali jsme tak, že $\dim Im(A) = n - m$. $\square$

Důsledek 6.28. Je-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení na celý prostor $\mathcal{V}$ a $\mathcal{U}$ konečně dimenzionální, pak $\mathcal{V}$ je také konečně dimenzionální a $\dim\mathcal{V} \leq \dim\mathcal{U}$.

Důkaz. Podle předchozí věty $\dim\mathcal{V} = \dim Im(A) = \dim\mathcal{U} - \dim Ker(A) \leq \dim\mathcal{U}$. $\square$

Důsledek 6.29. Jsou-li $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ dva konečně dimenzionální prostory nad $\mathbf{T}$, pak $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ jsou izomorfní právě když mají stejnou dimenzi.

Důkaz. Mají-li $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ stejnou konečnou dimenzi, existuje mezi nimi izomorfizmus podle Věty 6.26.

Je-li naopak $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ izomorfizmus, je $Im(A) = \mathcal{V}$ a $Ker(A) = \{\mathbf{0}\}$. Tedy podle Věty 6.27, $\dim\mathcal{U} = \dim Ker(A) + \dim Im(A) = \dim\mathcal{V}$. $\square$

Příklad 6.15. Co říká věta 6.27 o řešení soustav m lineárních rovnic o n neznámých?