5. Podprostory

Definice 5.12. Neprázdná podmnožina $\mathcal{M}$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ se nazývá podprostor, jestliže množina $\mathcal{M}$ obsahuje spolu s každými dvěma vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ také jejich libovolnou lineární kombinaci $a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$.

Všimněte si, že každý podprostor obsahuje prvek $\mathbf{0} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x}$.

Příklad 5.11. a) Každý vektorový prostor $\mathcal{V}$ má dva triviální podprostory $\{\mathbf{0}\}$ a $\mathcal{V}$.

b) Jsou-li $m \le n \ne 0$ dvě přirozená čísla, pak množina $\mathcal{M}$ všech vektorů $(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n$ takových, že $x_1 = x_2 = \dots = x_m$ je podprostor prostoru $\mathcal{R}^n$.

c) Jsou-li $m \le n \ne 0$ dvě přirozená čísla a $t_1, \dots, t_m$ libovolná komplexní čísla, pak množina všech polynomů $\mathbf{x} \in \mathcal{P}_n$ takových, že $\mathbf{x}(t_1) = \dots = \mathbf{x}(t_m) = 0$ je podprostor prostoru $\mathcal{P}_n$.

Všimněte si, že na množině všech prvků nějakého podprostoru $\mathcal{M}$ je definováno sčítání vektorů a násobení vektorů skalárem a tyto operace mají všechny vlastnosti, které musí mít operace sčítání a násobení v libovolném vektorovém prostoru. Každý podprostor je tedy současně vektorovým prostorem.

Průnik systému $\{\mathcal{M}_k\}$ podprostorů $\mathcal{V}$ budeme označovat $\bigcap_k \mathcal{M}_k$. V případě konečného systému $\{\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_n\}$ označujeme průnik také $\mathcal{M}_1 \cap \dots \cap \mathcal{M}_n$. Platí-li $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \{\mathbf{0}\}(= \mathcal{O})$, říkáme, že podprostory $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$ jsou disjunktní.

Věta 5.15. Průnik libovolného systému podprostorů vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je opět podprostor $\mathcal{V}$.

Důkaz. Buď $\mathcal{M} = \bigcap_k \mathcal{M}_k$. Množina $\mathcal{M}$ je neprázdná, neboť $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_k$ pro každé k, a tedy také $\mathbf{0} \in \mathcal{M}$. Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ dva prvky $\mathcal{M}$ a $a, b \in \mathbf{T}$, pak je $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{M}_k$ pro každé k. Proto $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in \mathcal{M}_k$ pro všechna k, a tedy také $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in \mathcal{M}$. $\square$

Důsledek 5.16. Pro každou podmnožinu $\mathcal{S}$ prostoru $\mathcal{V}$ existuje nejmenší (vzhledem k inkluzi) podprostor $\mathcal{V}$ obsahující $\mathcal{S}$.

Důkaz. Buď $\mathcal{M}$ průnik všech podprostorů $\mathcal{V}$ obsahujících $\mathcal{S}$. Potom je $\mathcal{M}$ podprostor $\mathcal{V}$ podle Věty 5.15 a $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{M}$. Je-li $\mathcal{N}$ libovolný podprostor $\mathcal{V}$ obsahující $\mathcal{S}$, pak musí být $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. $\square$

Definice 5.13. Nejmenší podprostor $\mathcal{V}$ obsahující množinu $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ nazýváme *lineární obal* množiny $\mathcal{S}$ nebo také *podprostor generovaný* $\mathcal{S}$. Označovat jej budeme $l(\mathcal{S})$.

Věta 5.17. Lineární obal množiny $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ je tvořený všemi možnými lineárními kombinacemi prvků z $\mathcal{S}$.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Důkaz. Označme $\mathcal{M}$ množinu všech lineárních kombinací prvků z $\mathcal{S}$. Množina $\mathcal{M}$ je neprázdná, neboť obsahuje vektor $\mathbf{0}$ coby lineární kombinaci prázdné množiny prvků $\mathcal{S}$. Jsou-li $\mathbf{x} = \sum_1^n c_i\mathbf{z}_i$ a $\mathbf{y} = \sum_1^n d_i\mathbf{z}_i$ dva prvky $\mathcal{M}$ a $a, b \in \mathbf{T}$, pak

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = a\sum_1^n c_i\mathbf{z}_i + b\sum_1^n d_i\mathbf{z}_i = \sum_1^n (ac_i + bd_i)\mathbf{z}_i$$

pro nějaké prvky $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n \in \mathcal{S}$. Tedy také $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} \in \mathcal{M}$. Všimněte si, že ve vyjádřeních $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ můžeme použít stejnou množinu vektorů $\mathbf{z}_i \in \mathcal{S}$, v případě potřeby přidáme vektory s koeficientem 0.

Množina $\mathcal{M}$ všech lineárních kombinací prvků $\mathcal{S}$ je tedy podprostor $\mathcal{V}$ obsahující $\mathcal{S}$. Naopak každý podprostor $\mathcal{V}$ obsahující $\mathcal{S}$ musí obsahovat libovolnou lineární kombinaci prvků $\mathcal{S}$, tedy také množinu $\mathcal{M}$. $\square$

Báze prostoru $\mathcal{V}$ je tedy lineárně nezávislá množina, která generuje celý prostor $\mathcal{V}$.

Věta 5.18. Jsou-li $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ dva podprostory prostoru $\mathcal{V}$, pak podprostor generovaný sjednocením $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$ je tvořený všemi vektory $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, kde $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ a $\mathbf{y} \in \mathcal{N}$.

Důkaz. Důkaz je obdobný důkazu Věty 5.17. $\square$

Poslední věta napovídá následující označení. Jsou-li $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dva podprostory $\mathcal{V}$, pak $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ označuje podprostor $\mathcal{V}$ generovaný sjednocením $\mathcal{M} \cup \mathcal{N}$. Platí-li $\mathcal{M} + \mathcal{N} = \mathcal{V}$ a $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \mathcal{O}$, říkáme, že $\mathcal{M}$ je *doplněk* $\mathcal{N}$ v prostoru $\mathcal{V}$.

Věta 5.19. Podprostor $\mathcal{M}$ n-dimenzionálního vektorového prostoru $\mathcal{V}$ je vektorový prostor dimenze nejvýše n.

Důkaz. Jednoduchý zdánlivý důkaz by mohl vypadat takto. Každá množina tvořená $n+1$ vektory prostoru $\mathcal{V}$ je lineárně závislá podle Věty 4.12. Kdyby v podprostoru $\mathcal{M}$ existovala lineárně nezávislá množina s $n+1$ vektory, mohli bychom tuto množinu podle Věty 4.9 rozšířit do báze podprostoru $\mathcal{M}$. Tato báze by byla lineárně nezávislou množinou také ve $\mathcal{V}$ a měla by více než n prvků, což je ve sporu s Větou 4.10. Tedy každá lineárně nezávislá množina v $\mathcal{M}$ má nejvýše n prvků. Až potud je vše v pořádku, nyní ale nemůžeme učinit závěr, že dimenze $\mathcal{M}$ je nejvýše n, neboť jsme nedokázali, že v $\mathcal{M}$ existuje nějaká konečná báze.

To ukážeme takto. Je-li $\mathcal{M} = \mathcal{O}$, je prázdná množina bází v $\mathcal{M}$. Jestliže $\mathcal{M}$ obsahuje nějaký nenulový vektor $\mathbf{x}_1$, buď $\mathcal{M}_1$ podprostor generovaný $\mathbf{x}_1$. Je-li $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}$, je $\{\mathbf{x}_1\}$ bází $\mathcal{M}$. Je-li $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}_1$, buď $\mathbf{x}_2$ prvek rozdílu $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_1$ a označme $\mathcal{M}_2$ podprostor generovaný vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$. Je-li $\mathcal{M} = \mathcal{M}_2$, je množina $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ bází v $\mathcal{M}$. Je-li $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}_2$, buď $\mathbf{x}_3$ prvek množiny $\mathcal{M} \setminus \mathcal{M}_2$, atd. Po nejvýše n krocích dostaneme nějakou lineárně nezávislou množinu $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ prvků $\mathcal{M}$, která generuje celý prostor $\mathcal{M}$, neboť ve $\mathcal{V}$ neexistuje $n+1$ lineárně nezávislých vektorů. Tedy $\mathcal{M}$ má bázi tvořenou k vektory. Zbytek vyplývá z prvního odstavce důkazu. $\square$

Věta 5.20. Pro každý m-dimenzionální podprostor $\mathcal{M}$ libovolného n-dimenzionálního vektorového prostoru $\mathcal{V}$ lze najít bázi $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{x}_{m+1}, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ prostoru $\mathcal{V}$ takovou, že $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$ je báze $\mathcal{M}$.

Důkaz. Podle Věty 5.19 existuje v $\mathcal{M}$ nějaká báze $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m\}$. Ta je buď také bází $\mathcal{V}$ nebo ji lze podle Věty 4.9 rozšířit do báze $\mathcal{V}$. $\square$

Zkuste si sami dokázat následující tvrzení: *Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ jsou lineárně nezávislé, jestliže v posloupnosti podprostorů $\mathcal{M}_k = l(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$, $k = 1, \ldots, n$, jsou všechny podprostory navzájem různé.*

My si závěrem tohoto tématu dokážeme ještě jednu větu o dimenzích podprostorů.

Věta 5.21. Jsou-li $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ dva podprostory konečně-dimenzionálního vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak platí

$$\dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} = \dim (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) + \dim (\mathcal{M} + \mathcal{N}).$$

Důkaz. Podle Věty 5.19 jsou všechny podprostory $\mathcal{M}, \mathcal{N}, \mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ a $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ konečně-dimenzionální. Zvolíme tedy nějakou bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ podprostoru $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Podle Věty 5.20 ji rozšíříme do báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_m$ podprostoru $\mathcal{M}$ a podle téže věty také rozšíříme $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ do báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n$ podprostoru $\mathcal{N}$. Znamená to tedy, že $\dim (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) = k$, $\dim \mathcal{M} = m$ a $\dim \mathcal{N} = n$.

Dokážeme, že $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n$ je báze součtu $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ podprostorů $\mathcal{M}$ a $\mathcal{N}$. Každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ a každý prvek $\mathbf{y} \in \mathcal{N}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n$. Každý vektor tvaru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, kde $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ a $\mathbf{y} \in \mathcal{N}$ je tedy lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n$. Protože každý prvek prostoru $\mathcal{M} + \mathcal{N}$ lze vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, kde $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ a $\mathbf{y} \in \mathcal{N}$. Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_n$ tedy generují podprostor $\mathcal{M} + \mathcal{N}$. Zbývá dokázat, že jsou také lineárně nezávislé.

Vezměme tedy libovolnou lineární kombinaci

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m + b_{k+1}\mathbf{y}_{k+1} + \cdots + b_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0}.$$

Platí tedy

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m = -b_{k+1}\mathbf{y}_{k+1} - \cdots - b_n\mathbf{y}_n.$$

Vektor na levé straně leží v podprostoru $\mathcal{M}$ a vektor na pravé straně leží v podprostoru $\mathcal{N}$. Tyto dva vektory se rovnají (označme si tento vektor $\mathbf{z}$) a leží proto v průniku těchto dvou podprostorů $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$. Protože $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ je báze podprostoru $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$, existují skaláry $b_1, \ldots, b_k$ takové, že

$$\mathbf{z} = b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_k\mathbf{x}_k.$$

Potom ale

$$\mathbf{z} = b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_k\mathbf{x}_k = -b_{k+1}\mathbf{y}_{k+1} - \cdots - b_n\mathbf{y}_n,$$

neboli

$$b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_k\mathbf{x}_k + b_{k+1}\mathbf{y}_{k+1} + \cdots + b_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0}.$$

Vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \mathbf{y}_{k+1}, \dots, \mathbf{y}_n$ jsou ale lineárně nezávislé (tvoří bázi prostoru $\mathcal{N}$), platí proto $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. Proto

$$\mathbf{z} = b_{k+1}\mathbf{y}_{k+1} + \cdots + b_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0}.$$

Proto také

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m = \mathbf{0},$$

neboli $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 0$, neboť i vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$ jsou lineárně nezávislé coby báze podprostoru $\mathcal{M}$.

Dokázali jsme tak $a_1 = a_2 = \cdots = a_m = b_{k+1} = \cdots = b_n = 0$. Protože to jsou koeficienty libovolné lineární kombinace

$$a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_m\mathbf{x}_m + b_{k+1}\mathbf{y}_{k+1} + \cdots + b_n\mathbf{y}_n = \mathbf{0},$$

jsou vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{y}_{k+1}, \dots, \mathbf{y}_n$ lineárně nezávislé a tvoří tak bázi podprostoru $\mathcal{M} + \mathcal{N}$. Ukázali jsme tak, že $\dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = m + n - k$. Proto $\dim M + \dim N = m + n$ a také $\dim(\mathcal{M} \cap \mathcal{N}) + \dim(\mathcal{M} + \mathcal{N}) = k + (m + n - k) = m + n$. $\square$