4. Steinitzova věta a dimenze

Lemma 4.8. Předpokládejme, že vektor $\mathbf{x}$ je lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ prostoru $\mathcal{V}$. Je-li vektor $\mathbf{x}_i$ lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n$, pak je také vektor $\mathbf{x}$ lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n$.

Důkaz. Vektor $\mathbf{x}$ je lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Existují tedy skaláry $a_1, \dots, a_n$ takové, že platí

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n.$$

Kromě toho je také vektor $\mathbf{x}_i$ lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n$. Existují proto skaláry $b_1, \dots, b_{i-1}, b_{i+1}, \dots, b_n$, pro které platí

$$\mathbf{x}_i = b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + b_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + b_n\mathbf{x}_n.$$

Dosadíme-li poslední vyjádření za $\mathbf{x}_i$ do předcházející rovnosti, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathbf{x} =& a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_{i-1}\mathbf{x}_1 + a_i(b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_{i-1}\mathbf{x}_{i-1} + b_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + b_n\mathbf{x}_n) \\ &+ a_{i+1}\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + a_n\mathbf{x}_n \\ =&(a_1 + a_ib_1)\mathbf{x}_1 + (a_2 + a_ib_2)\mathbf{x}_2 + \cdots + (a_{i-1} + a_ib_{i-1})\mathbf{x}_{i-1} \\ &+ (a_{i+1} + a_ib_{i+1})\mathbf{x}_{i+1} + \cdots + (a_n + a_ib_n)\mathbf{x}_n.\end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{x}$ je tedy opravdu lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n$. □

Věta 4.9. Buď $\mathcal{V}$ konečně-dimenzionální vektorový prostor a $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$ nějaký systém lineárně nezávislých vektorů. Pokud netvoří bázi, tak potom existují vektory $\mathbf{y}_{m+1}, \cdots, \mathbf{y}_n$ takové, že systém $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \mathbf{y}_{m+1} \dots, \mathbf{y}_n$ je báze prostoru $\mathcal{V}$.

Důkaz. Použijeme Větu 3.7'. Prostor $\mathcal{V}$ je konečně-dimenzionální, existuje tedy nějaká báze $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ v prostoru $\mathcal{V}$. Budeme uvažovat systém vektorů

$$\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$$

a na ten použijeme Větu 3.7'.

Tento systém je lineárně závislý, protože každý z vektorů $\mathbf{y}_i$ je lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$. Některý z vektorů tohoto systému je tedy lineárně závislý na předchozích vektorech (podle Věty 3.7'). Nemůže to být žádný z vektorů $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m$, neboť ty jsou lineárně nezávislé. Je to tedy některý vektor $\mathbf{x}_i$.

Vektor $\mathbf{x}_i$ z našeho systému vypustíme a budeme uvažovat systém

$$\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_n.$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ je lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a vektor $\mathbf{x}_i$ je lineárně závislý na vektorech $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}$. Podle předchozího lemmatu je každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ lineárně závislý na vektorech

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n.$$

Tento systém je buď lineárně nezávislý a potom je to báze a důkaz končí, a nebo je lineárně závislý. Pak zopakujeme celý postup, použijeme opět Větu 3.7.' k nalezení vektoru $\mathbf{z}$ z posledního systému, který je lineárně závislý na předchozích vektorech. Vektor $\mathbf{z}$ je různý od všech $\mathbf{y}_j$, platí tedy, že $\mathbf{z} = \mathbf{x}_k$ pro nějaké k, atd.

Po konečně mnoha krocích najdeme lineárně nezávislou množinu obsahující vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$, která je bází $\mathcal{V}$. $\square$

Věta 4.10. Všechny báze konečně-dimenzionálního vektorového prostoru $\mathcal{V}$ mají stejný počet prvků.

Důkaz. Nechť $X = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ a $Y = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ jsou dvě množiny vektorů prostoru $\mathcal{V}$. Předpokládejme, že každý prvek $\mathcal{V}$ je lineárně závislý na vektorech z množiny X, a dále že vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ jsou lineárně nezávislé.

Nyní uvažujme systém vektorů

$$\mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n.$$

Tento systém je lineárně závislý, neboť $\mathbf{y}_m$ je lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Podle Věty 3.7' existuje vektor $\mathbf{x}_i$ lineárně závislý na předchozích vektorech. Stejně jako v důkazu Věty 4.9 z toho plyne, že množina vektorů

$$\mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$$

má tu vlastnost, že každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ je na ní lineárně závislý. Tedy i vektor $\mathbf{y}_{m-1}$. Proto systém

$$\mathbf{y}_{m-1}, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$$

je lineárně závislý. Opět podle Věty 3.7' existuje v tomto systému vektor $\mathbf{z}$, který je závislý na předchozích vektorech. Nemůže to být žádný z vektorů $\mathbf{y}_{m-1}, \mathbf{y}_m$, neboť množina $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ je lineárně nezávislá. Proto se vektor $\mathbf{z}$ rovná některému z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}$, $\mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Vektor $\mathbf{z}$ ze seznamu vynecháme a celou úvahu znovu opakujeme. Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ nemůžeme vyčerpat dříve než vyčerpáme vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. V opačném případě by totiž zbylé vektory z množiny Y byly lineárně závislé na těch vektorech z Y, které jsme už do našeho systému zařadili. A to se nemůže stát, neboť Y je lineárně nezávislá množina.

Opakujeme-li tedy celý postup m-krát, dostaneme systém n vektorů, který obsahuje všechny vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$, tedy musí platit $m \leq n$.

Jsou-li obě množiny X, Y báze, je každý prvek $\mathcal{V}$ lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, a vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ jsou lineárně nezávislé. Podle první části důkazu je tedy $m \leq n$. Stejn2 tak je ale ka6d7 vektor prostoru $\mathcal{V}$ lineárně závislý na vektorech $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jsou lineárně nezávislé. Proto platí také $m \geq n$ a tedy $m = n$. $\square$

Věta 4.11. Steinitzova věta. Buď $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m\}$ lineárně nezávislá množina vektorů konečně-dimenzionálního vektorového prostoru $\mathcal{V}$ a $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ báze prostoru $\mathcal{V}$. Je-li $m < n$, pak existuje vektor $\mathbf{x}_i$ takový, že $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m, \mathbf{x}_i\}$ je lineárně nezávislá množina.

Důkaz. Důkaz je skoro stejný jako důkaz Věty 4.9, použijeme při něm i Větu 4.10. Vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ seřadíme opět do souboru

$$\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m,\ \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$$

a postupně z něho vynecháváme vektory, které jsou lineárně závislé na předchozích vektorech. Vzhledem k tomu, že vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ jsou lineárně nezávislé, žádný z vektorů $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ nevypustíme. Nakonec nám zůstane báze prostoru $\mathcal{V}$, která má podle předchozí věty n prvků, protože i báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ má n prvků. Protože $m < n$, zůstane v poslední bázi spolu s vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ aspoň jeden z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. □

Definice 4.10. *Dimenze* konečně-dimenzionálního prostoru $\mathcal{V}$ je počet prvků nějaké (a tedy každé) báze $\mathcal{V}$.

Příklad 4.9. a) Prostor $\mathcal{R}^3$ má dimenzi 3.
b) Prostor $\mathcal{C}^1$ má dimenzi 1.
c) Prostor $\mathcal{O}$ má dimenzi 0.
d) Prostor $\mathcal{T}^n$ má dimenzi n.
e) Prostor $\mathcal{R}^2$ má dimenzi 2.

Věta 4.12. Buď $\mathcal{V}$ vektorový prostor dimenze n. Potom každá množina $n+1$ vektorů z $\mathcal{V}$ je lineárně závislá. Množina n vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{V}$ je báze prostoru $\mathcal{V}$ právě tehdy, když je lineárně nezávislá, a to je právě tehdy, když je každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ lineárně závislý na množině $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Důkaz. Důkaz plyne z vět 4.10 a 4.11. Kdyby totiž byla nějaká množina $n+1$ vektorů prostoru $\mathcal{V}$ lineárně nezávislá, šlo by ji podle Věty 4.10 rozšířit do báze, která by měla více než n prvků, což by byl spor s tím, že všechny báze prostoru $\mathcal{V}$ mají n prvků (Věta 4.11).

Lineárně nezávislou množinu n vektorů, která by nebyla báze, by bylo možné podle Věty 4.10 rozšířit do báze, a ta by opět měla více než n prvků, což by byl spor s Větou 4.11. Tedy lineárně nezávislá množina n vektorů je báze. Je-li množina $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze prostoru $\mathcal{V}$, pak je lineárně nezávislá podle definice báze.

Také zbývající tvrzení Věty 4.12 plynou přímo z definic. Je-li $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze, je každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ podle definice báze. Nechť je naopak každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Pokud by vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ nebyly lineárně nezávislé, našli bychom vektor $\mathbf{x}_i$, který by byl lineárně závislý na zbývajících vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$, podle Věty 3.7. Podle Lemma 4.9 by byla stále každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$. Takto bychom postupně vynechávali "přebytečné" vektory z množiny $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$, až bychom dostali lineárně nezávislou vlastní podmnožinu, na které by ale stále byly všechny vektory prostoru $\mathcal{V}$ lineárně závislé. Tato podmnožina by tedy byla báze $\mathcal{V}$ a měla by méně než n prvků, což je ve sporu s tím, že dimenze $\mathcal{V}$ se rovná n. □

Definice 4.11. Dva vektorové prostory $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ nad stejným tělesem $\mathbf{T}$ nazýváme *izomorfní*, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ takové, že

$$A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aA(\mathbf{x}) + bA(\mathbf{y})$$

pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$ a skaláry $a, b \in \mathbf{T}$. Zobrazení A se nazývá *izomorfizmus.*

Izomorfní konečně-dimenzionální prostory mají stejnou dimenzi. Plyne to například z toho, že obraz báze v $\mathcal{U}$ izomorfizmem A je báze ve $\mathcal{V}$ (dokažte si to). Opačné tvrzení plyne z následující věty.

Věta 4.13. Každý n-dimenzionální vektorový prostor $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je izomorfní s n-dimenzionálním aritmetickým vektorovým prostorem $\mathcal{T}^n$ nad $\mathbf{T}$.

Důkaz. Buď $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ báze prostoru $\mathcal{V}$. Každý vektor $x \in \mathcal{V}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i,$$

kde $a_i \in \mathbf{T}$.

Definujeme zobrazení $A : \mathcal{V} \to \mathcal{T}^n$ předpisem $A(\mathbf{x}) = (a_1, \ldots, a_n)$. Je-li $\mathbf{y} = b_1\mathbf{x}_1 + \cdots + b_n\mathbf{x}_n$ další vektor prostoru $\mathcal{V}$ a $a, b \in \mathbf{T}$, pak

$$a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = (aa_1 + bb_1)\mathbf{x}_1 + \cdots + (aa_n + bb_n)\mathbf{x}_n.$$

Tedy $A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aA(\mathbf{x}) + bA(\mathbf{y})$. $\square$

Příklad 4.10. Prostory $\mathcal{P}_n$ a $\mathcal{C}^n$ jsou izomorfní.

Bezprostředním důsledkem poslední věty je to, že každé dva prostory dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ jsou izomorfní.

Věta 4.14. Jsou-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ a $B : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ izomorfizmy vektorových prostorů $\mathcal{U}$ a $\mathcal{V}$ (v prvním případě) a $\mathcal{V}$ a $\mathcal{W}$ (ve druhém případě), pak také $BA : \mathcal{U} \to \mathcal{W}$ je izomorfizmus.

Důkaz. Jde o snadný výpočet:

$$\begin{aligned} BA(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) &= B(A(a\mathbf{x} + b\mathbf{y})) = B(aA(\mathbf{x}) + bA(\mathbf{y})) = aB(A(\mathbf{x})) + bB(A(\mathbf{y})) \\ &= aBA(\mathbf{x}) + bBA(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

pro každé dva skaláry a, b a každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{U}$. $\square$