3. Lineární závislost, báze a souřadnice vzhledem k bázi

Rozdíl mezi množinou a systémem vektorů.

Definice 3.5. Vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývají *lineárně závislé*, jestliže existují skaláry $a_1, a_2, \dots, a_n$ takové, že platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$$

a aspoň jeden ze skalárů $a_1, \dots, a_n$ je různý od 0. Pokud z rovnosti $\sum_1^n a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ plyne, že $a_i = 0$ pro všechna $i = 1, \dots, n$, pak říkáme, že jsou vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ *lineárně nezávislé.*

Co to znamená pro prázdný systém vektorů? Prázdný systém je lineárně nezávislý.

Lemma 3.5. a) Je-li $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$ pro nějaké $i = 1, \dots, n$, pak jsou vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ lineárně závislé.

b) Je-li $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_j$ pro nějaké $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, pak jsou vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ lineárně závislé.

c) Prázdný systém je lineárně nezávislý.

d) Každý podsystém lineárně nezávislého systému je lineárně nezávislý.

Důkaz. a) $0\mathbf{x}_1 + \dots + 0\mathbf{x}_{i-1} + 1\mathbf{x}_i + 0\mathbf{x}_{i+1} + \dots + 0\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$.

b) $0\mathbf{x}_1 + \dots + 0\mathbf{x}_{i-1} + 1\mathbf{x}_i + 0\mathbf{x}_{i+1} + \dots + 0\mathbf{x}_{j-1} + (-1)\mathbf{x}_j + 0\mathbf{x}_{j+1} + \dots + 0\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$.

c) Žádný nenulový skalár nemůže u prázdného systému existovat.

d) Pokud by $\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}$ byl nějaký lineárně závislý podsystém systému $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, existovaly by skaláry a_{i_j}, $j = 1, \dots, k$, které nejsou všechny rovné 0, a pro které by platilo

$$\mathbf{0} = \sum_{j=1}^{k} a_{i_j} \mathbf{x}_{i_j}.$$

Potom by stačilo zvolit $a_i = 0$ pro všechny ostatní indexy $i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus J$ a dostali bychom

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i.$$

Původní systém $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ by tedy byl také lineárně závislý. $\square$

Lineárně nezávislá tedy může být jenom *množina* vektorů, každé dva vektory v lineárně nezávislém systému vektorů musí být různé (a žádný z nich nesmí být $\mathbf{0}$). Část d) posledního tvrzení můžeme tedy formulovat také následovně: *každá podmnožina konečné*

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX *lineárně nezávislé množiny je lineárně nezávislá.* Podle části c) se to vztahuje i na prázdnou podmnožinu.

Příklad 3.5. Lineární závislost v prostoru $\mathcal{R}^3$. a) Dva vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ jsou lineárně závislé v prostoru $\mathcal{R}^3$ právě tehdy, leží-li body $(0,0,0)$, (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3) na téže přímce.

b) Tři vektory $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3), \mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ jsou lineárně závislé právě když body $(0,0,0), (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3)$ leží v jedné rovině.

Důkaz. a) Vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ jsou lineárně závislé právě když existují reálná čísla $a, b \in \mathbf{R}$, která nejsou obě rovná 0, a taková, že $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Nechť například $b \neq 0$. Potom $\mathbf{v} = -(a/b)\mathbf{u}$. Označíme-li $-(a/b) = k$, platí $v_1 = ku_1$, $v_2 = ku_2$ a $v_3 = ku_3$. Bod (v_1, v_2, v_3) tedy leží na přímce procházející počátkem a bodem (u_1, u_2, u_3).

Leží-li naopak body $(0,0,0), (u_1, u_2, u_3), (v_1, v_2, v_3)$ na jedné přímce a $(u_1, u_2, u_3) \neq (0,0,0)$, existuje konstanta $m \in \mathbf{R}$ taková, že $v_1 = mu_1, v_2 = mu_2, v_3 = mu_3$. Tedy $\mathbf{v} = m\mathbf{u}$, neboli $m\mathbf{u} + (-1)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Je-li $(u_1, u_2, u_3) = (0,0,0)$, platí $\mathbf{u} = 0\mathbf{v}$, neboli $1\mathbf{u} + 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

b) Za domácí úkol. □

Příklad 3.6. a) Libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{C}^1$ jsou lineárně závislé.

b) Následující tři vektory (polynomy) jsou závislé v prostoru $\mathcal{P}$: $\mathbf{x} = 1 - t$, $\mathbf{y} = t - t^2$, $\mathbf{z} = 1 - t^2$, neboť platí $\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$.

Naproti tomu každá konečná podmnožina vektorů $\mathbf{x}_i = t^i$, $i = 0, 1, \ldots$, je lineárně nezávislá.

Definice 3.6. Nějaká nekonečná množina X vektorů z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá *lineárně nezávislá*, jestliže je každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá. V opačném případě říkáme, že je množina X *lineárně závislá.*

Lemma 3.6. Každá podmnožina lineárně nezávislé množiny X je lineárně nezávislá.

Důkaz. a) V případě konečné množiny to je dokázáno v Lemma 3.6.d). Je-li X nekonečná množina, plyne to ihned z Definice 6. □

Definice 3.7. Je-li $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ systém vektorů z vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a

$$\mathbf{x} = \sum_i a_i \mathbf{x}_i,$$

pak říkáme, že $\mathbf{x}$ je *lineární kombinace* vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, a také, že $\mathbf{x}$ *lineárně závisí* na vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Co je lineární kombinací prázdného systému vektorů? Co je součtem prázdného systému vektorů? Co je součtem prázdného systému čísel?

Věta 3.7. Systém vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je lineárně závislý právě tehdy, když nějaký z vektorů $\mathbf{x}_k$, $k \geq 1$, je lineární kombinací ostatních vektorů tohoto systému.

Důkaz. Je-li systém $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ lineárně závislý, existují skaláry $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{T}$, které nejsou všechny rovné 0, a pro které platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}.$$

Je-li $a_k \neq 0$, platí

$$a_k \mathbf{x}_k = \sum_{i \neq k} -a_i \mathbf{x}_i$$

a tedy také

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i \neq k} (-\frac{a_i}{a_k}) \mathbf{x}_i.$$

Vektor $\mathbf{x}_k$ je tedy lineárně závislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_n$.

Je-li naopak vektor $\mathbf{x}_k$ lineárně závislý na ostatních vektorech systému $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, existují skaláry $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_n$ takové, že

$$\mathbf{x}_k = \sum_{i \neq k} a_i \mathbf{x}_i.$$

Potom ale platí

$$a_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + a_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + (-1) \mathbf{x}_k + a_{k+1} \mathbf{x}_{k+1} + \cdots + a_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Systém $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je tedy lineárně závislý. $\square$

Lze dokázat dokonce ještě silnější tvrzení, než vyjadřuje předchozí věta.

Věta 3.7'. Systém vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je lineárně závislý právě tehdy, když nějaký z vektorů $\mathbf{x}_k$, $k \geq 1$, je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$.

Důkaz. Jsou-li $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ lineárně závislé, označme k nejmenší (kladné) přirozené číslo takové, že $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$ je lineárně závislý systém. Potom je $k \geq 1$, neboť prázdný systém je lineárně nezávislý. Existují tedy skaláry $a_1, \dots, a_k$, které nejsou všechny rovné 0, a pro které platí

$$a_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + a_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Musí být $a_k \neq 0$, neboť by jinak byly také vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ lineárně závislé. Můžeme tedy z poslední rovnosti vypočítat $\mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_k = (-\frac{a_1}{a_k}) \mathbf{x}_1 + \cdots + (-\frac{a_{k-1}}{a_k}) \mathbf{x}_{k-1}$$

Vektor $\mathbf{x}_k$ je proto lineární kombinací předchozích vektorů.

Je-li naopak $\mathbf{x}_k$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$, existují skaláry $a_1, \dots, a_{k-1}$ takové, že $\mathbf{x}_k = \sum_1^{k-1} a_i \mathbf{x}_i$ a tedy

$$a_1 \mathbf{x}_1 + \cdots + a_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + (-1) \mathbf{x}_k = \mathbf{0}.$$

Vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jsou tedy lineárně závislé. Proto jsou i vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně závislé, podle Lemma 3.5.d). $\square$

Definice 3.8. *Bází (systémem souřadnic)* ve vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nazýváme libovolnou množinu X lineárně nezávislých vektorů takovou, že každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ je lineární kombinací nějakých prvků množiny X. Prostor $\mathcal{V}$ se nazývá *konečně-dimenzionální,* jestliže v něm existuje nějaká konečná báze.

Příklad 3.7. a) Prostor $\mathcal{P}$ není konečně-dimenzionální. Naopak prostor $\mathcal{P}^n$ je konečně-dimenzionální.

b) Vektory $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ tvoří bázi v prostoru $\mathcal{R}^3$.

c) Bázi ve vektorovém prostoru $\mathcal{T}^n$ tvoří vektory $\mathbf{x}_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, kde 1 je na místě s indexem i.

Je-li $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad $\mathbf{T}$ a $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ libovolný vektor, pak je $\mathbf{x}$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, tj.

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x}_i$$

pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_n$. Tyto skaláry jsou určené vektorem $\mathbf{x}$ jednoznačně. Je-li totiž

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} b_i \mathbf{x}_i$$

jiné vyjádření $\mathbf{x}$ jako lineární kombinace vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, pak odečtením druhé rovnosti od první dostaneme

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\mathbf{x}_i.$$

Protože jsou vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ lineárně nezávislé, platí $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Tento výsledek opravňuje následující definici.

Definice 3.9. Je-li $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze vektorového prostoru $\mathcal{V}$, $\mathbf{x}$ nějaký vektor z $\mathcal{V}$ a

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n,$$

pak skaláry $a_1, \ldots, a_n$, případně jejich uspořádanou n-tici $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ nazýváme *souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Příklad 3.8. Vzhledem k bázi $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$ prostoru $\mathcal{R}^3$ má vektor $\mathbf{x} = (3,4,5)$ souřadnice $(3,4,5)$, neboť

$$\mathbf{x} = 3(1,0,0) + 4(0,1,0) + 5(0,0,1).$$

Naproti tomu vzhledem k bázi $(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)$ má ten samý vektor $\mathbf{x}$ souřadnice $(3,1,1)$, protože

$$\mathbf{x} = (3,4,5) = 3(1,1,1) + 1(0,1,1) + 1(0,0,1).$$