## 20. Jordanův normální (kanonický) tvar - nepovinné

Ve Větě 16.91 jsme dokázali, že každý lineární operátor na komplexním vektorovém prostoru nenulové dimenze má nějaký vlastní vektor. Teď si ukážeme příklad operátoru na komplexním vektorovém prostoru, který nemá dva lineárně nezávislé vlastní vektory. Buď tedy $\mathcal{V}$ vektorový prostor nad komplexními čísly a předpokládejme, že dimenze prostoru $\mathcal{V}$ je $p \geq 2$. Označme $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_p$ nějakou bázi prostoru $\mathcal{V}$ a definujme lineární operátor $A$ na prostoru $\mathcal{V}$ předpisem

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{z}_1) &= \lambda \mathbf{z}_1, \\
A(\mathbf{z}_2) &= \mathbf{z}_1 + \lambda \mathbf{z}_2, \\
&\vdots \\
A(\mathbf{z}_{p-1}) &= \mathbf{z}_{p-2} + \lambda \mathbf{z}_{p-1}, \\
A(\mathbf{z}_p) &= \mathbf{z}_{p-1} + \lambda \mathbf{z}_p.
\end{aligned}$$

Operátor $A$ je svými hodnotami na prvcích báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_p$ určený jednoznačně. Předpokládejme nyní, že

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{z}_1 + c_2 \mathbf{z}_2 + \cdots + c_p \mathbf{z}_p$$

je nějaký vlastní vektor operátoru $A$, tj. $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, a existuje komplexní číslo $\mu$ takové, že $A(\mathbf{x}) = \mu \mathbf{x}$. Potom platí

$$A(\mathbf{x}) = \mu \mathbf{x} = \mu c_1 \mathbf{z}_1 + \cdots + \mu c_p \mathbf{z}_p.$$

Využitím definice operátoru $A$ dostaneme jiné vyjádření vektoru $A(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{x}) &= c_1 A(\mathbf{z}_1) + c_2 A(\mathbf{z}_2) + \cdots + c_{p-1} A(\mathbf{z}_{p-1}) + c_p A(\mathbf{z}_p) = \\
&= c_1 \lambda \mathbf{z}_1 + c_2(\mathbf{z}_1 + \lambda \mathbf{z}_2) + \cdots + c_{p-1}(\mathbf{z}_{p-2} + \lambda \mathbf{z}_{p-1}) + c_p(\mathbf{z}_{p-1} + \lambda \mathbf{z}_p) = \\
&= (\lambda c_1 + c_2)\mathbf{z}_1 + (\lambda c_2 + c_3)\mathbf{z}_2 + \cdots + (\lambda c_{p-1} + c_p)\mathbf{z}_{p-1} + \lambda c_p \mathbf{z}_p.
\end{aligned}$$

Srovnáním koeficientů u vektorů $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_p$ v obou vyjádřeních vektoru $A(\mathbf{x})$ dostáváme soustavu lineárních rovnic pro koeficienty $c_1, \dots, c_p$

$$\begin{aligned}
\lambda c_1 + c_2 &= \mu c_1, \\
\lambda c_2 + c_3 &= \mu c_2, \\
&\vdots \\
\lambda c_{p-1} + c_p &= \mu c_{p-1}, \\
\lambda c_p &= \mu c_p.
\end{aligned}$$

Pokud by bylo $\mu \neq \lambda$, dostali bychom z poslední rovnosti $c_p = 0$, potom z předposlední rovnosti $c_{p-1} = 0$, a tak dále, až nakonec z první rovnosti $c_1 = 0$. Pak by ale platilo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, což je ve sporu s předpokladem, že $\mathbf{x}$ je vlastní vektor operátoru $A$. Musí tedy být $\mu = \lambda$. Potom ale z první rovnosti dostáváme $c_2 = 0$, z druhé $c_3 = 0$, a tak dále, až nakonec z předposlední rovnosti plyne $c_p = 0$. Platí tedy, že $\mathbf{x} = c_1\mathbf{z}_1$, neboli každý vlastní vektor operátoru $A$ je násobkem vlastního vektoru $\mathbf{z}_1$.

Zajímavá je matice operátoru $A$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_p$:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Tato matice má na hlavní diagonále všechny prvky rovné vlastnímu číslu $\lambda$ a nad nimi jednotky. Všechny ostatní prvky matice jsou nulové. Této matici se říká *Jordanova buňka*. Poznamenejme ještě, že $\lambda$ se může rovnat 0.

Jordanův kanonický tvar je stručný název tvrzení, které říká, že pro každý operátor $A$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ lze najít bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, vzhledem ke které má operátor $A$ matici, která je blokově diagonální, a navíc každý diagonální blok je Jordanova buňka. Matice operátoru $A$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ má následující podobu:

$$\begin{pmatrix}
\begin{matrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_1 \end{matrix} & & & \\
& \begin{matrix} \lambda_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_2 \end{matrix} & & \\
& & \ddots & \\
& & & \begin{matrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k \end{matrix}
\end{pmatrix}$$

Diagonální prvky $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ nemusí být nutně různé. Existenci báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, ve které má matice operátoru $A$ Jordanův normální tvar, si dokážeme v této části přednášky.

Je-li $\lambda$ vlastní číslo operátoru $A$ na prostoru $\mathcal{V}$, pak invariantní podprostory operátorů $A$ a $B = A - \lambda I$ jsou stejné. O tom se snadno přesvědčíme. Je-li $\mathcal{P}$ invariantní podprostor operátoru $A$, pak $A(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$. Potom také $B(\mathbf{x}) = A(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$, neboli $\mathcal{P}$ je invariantní podprostor operátoru $B$. Je-li naopak $\mathcal{Q}$ invariantní podprostor operátoru $B$, pak vzhledem k tomu, že $A = B + \lambda I$, dostáváme pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{Q}$, že $A(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) + \lambda\mathbf{x} \in \mathcal{Q}$, čili $\mathcal{Q}$ je invariantní podprostor operátoru $A$. Toto pozorování nám zjednoduší důkaz následující věty.

**Věta 20.113.** Buď $\lambda$ vlastní číslo operátoru $A$ na prostoru $\mathcal{V}$ dimenze $n$. Potom existuje invariantní podprostor $\mathcal{P}_\lambda$ operátoru $A$ takový, že $A$ má v prostoru $\mathcal{P}_\lambda$ jediné vlastní číslo $\lambda$. Dále existuje doplněk $\mathcal{Q}_\lambda$ prostoru $\mathcal{P}_\lambda$, který je rovněž invariantní podprostor operátoru $A$. Platí dále, že $A$ nemá na prostoru $\mathcal{Q}_\lambda$ vlastní číslo $\lambda$.

**Důkaz.** Na základě pozorování uvedeného v odstavci před formulací věty můžeme předpokládat, že $\lambda = 0$. V opačném případě bychom nahradili operátor $A$ operátorem $B = A - \lambda I$, který má stejné invariantní podprostory.

Uvažujme nyní posloupnost operátorů

$$A, A^2, A^3, \ldots, A^m, \ldots$$

a jejich jader

$$\mathcal{P}^1 = Ker(A), \mathcal{P}^2 = Ker(A^2), \ldots, \mathcal{P}^m = Ker(A^m), \ldots$$

Pro každé přirozené číslo $i$ a každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}^i = Ker(A^i)$ platí $A^i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ a proto také $A^{i+1}(\mathbf{x}) = A(A^i(\mathbf{x})) = A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, neboli $\mathcal{P}^i \subseteq \mathcal{P}^{i+1}$. Všechny podprostory

$$\mathcal{P}^1 \subseteq \mathcal{P}^2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{P}^m \subseteq \cdots$$

jsou částí prostoru $\mathcal{V}$, který má konečnou dimenzi. Musí tedy existovat exponent $i$ takový, že $\mathcal{P}^i = \mathcal{P}^{i+1}$.

Označme $p$ nejmenší přirozené číslo takové, že $\mathcal{P}^p = Ker(A^p) = Ker(A^{p+1}) = \mathcal{P}^{p+1}$. Dokážeme, že potom pro každé kladné přirozené číslo $m \geq p$ platí $\mathcal{P}^p = \mathcal{P}^m$. Předpokládejme opak, tj. že pro nějaké kladné přirozené číslo $i$ platí

$$\mathcal{P}^p = \mathcal{P}^{p+1} = \cdots = \mathcal{P}^{p+i} \neq \mathcal{P}^{p+i+1}.$$

Existuje tedy nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}^{p+i+1}$ takový, že $\mathbf{x} \notin \mathcal{P}^{p+i}$. To znamená, že platí $A^{p+i+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ a $A^{p+i}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. Označme

$$\mathbf{y} = A^i(\mathbf{x}).$$

Potom $A^{p+1}(\mathbf{y}) = A^{p+1}(A^i(\mathbf{x})) = A^{p+i+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, tj. $\mathbf{y} \in \mathcal{P}^{p+1}$. Naproti tomu $A^p(\mathbf{y}) = A^p(A^i(\mathbf{x})) = A^{p+i}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$, čili $\mathbf{y} \notin \mathcal{P}^p$, což je ve sporu s předpokladem $\mathcal{P}^p = \mathcal{P}^{p+1}$. Tento spor dokazuje, že $\mathcal{P}^p = \mathcal{P}^m$ pro každé $m \geq p$. Podprostory $\mathcal{P}^i$ tedy zpočátku rostou až po prostor $\mathcal{P}^p$, který se rovná všem dalším podprostorům $\mathcal{P}^{p+i}$.

Označme nyní $\mathcal{P}_\lambda = \mathcal{P}^p = Ker(A^p)$ a $\mathcal{Q}_\lambda = Im(A^p)$. Podle Věty 6.27 platí $\dim P_\lambda + \dim Q_\lambda = n = \mathcal{V}$. K důkazu, že $\mathcal{Q}_\lambda$ je doplněk podprostoru $\mathcal{P}_\lambda$, stačí ukázat, že

$$\mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda = \{\mathbf{0}\}.$$

Je-li $\mathbf{0} \neq \mathbf{y} \in \mathcal{P}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\lambda$, platí $\mathbf{y} \in Im(A^p)$, neboli $\mathbf{y} = A^p(\mathbf{x})$ pro nějaký vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$. Současně ale $\mathbf{y} \in Ker(A^p)$, neboli $A^p(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Proto

$$A^{2p}(\mathbf{x}) = A^p(\mathbf{y}) = \mathbf{0}.$$

Protože ale $Ker(A^{2p}) = \mathcal{P}^{2p} = \mathcal{P}^p = Ker(A^p) = \mathcal{P}_\lambda$, dostáváme $A^p(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = \mathbf{y}$, což je ve sporu s předpokladem $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$. Tento spor dokazuje, že $\mathcal{P}_\lambda + \mathcal{Q}_\lambda = \mathcal{V}$.

Z posledního odstavce rovněž plyne, že $A(\mathbf{y}) \neq \mathbf{0}$ pro libovolný nenulový vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{Q}_\lambda$. $\square$

**Důsledek 20.114.** Má-li operátor $A$ na prostoru $\mathcal{V}$ $k$ různých vlastních čísel $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, pak můžeme rozložit prostor $\mathcal{V}$ na součet $k$ invariantních podprostorů operátoru $A$

$$\mathcal{P}_{\lambda_1} + \mathcal{P}_{\lambda_2} + \cdots + \mathcal{P}_{\lambda_k}$$

takových, že operátor $A$ má na každém podprostoru $\mathcal{P}_{\lambda_i}$, $i = 1, \ldots, k$ jediné vlastní číslo $\lambda_i$.

**Důkaz.** Můžeme postupovat indukcí podle počtu $k$ vlastních čísel operátoru $A$. Je-li $k = 1$, stačí položit $\mathcal{P}_{\lambda_1} = \mathcal{V}$. Je-li $k \geq 2$, existují podle Věty 20.113 invariantní podprostory $\mathcal{P}_{\lambda_1}$ a $\mathcal{Q}_{\lambda_1}$ operátoru $A$ takové, že $\mathcal{P}_{\lambda_1} + \mathcal{Q}_{\lambda_1}$, operátor $A$ má na podprostoru $\mathcal{P}_{\lambda_1}$ jediné vlastní číslo $\lambda_1$, zatímco na podprostoru $\mathcal{Q}_{\lambda_1}$ skalár $\lambda_1$ není vlastním číslem operátoru $A$. Na podprostoru $\mathcal{Q}_{\lambda_1}$ má tedy operátor $A$ pouze $k-1$ vlastních čísel $\lambda_2, \ldots, \lambda_k$. Můžeme tedy použít indukční předpoklad a rozložit podprostor $\mathcal{Q}_{\lambda_1}$ na součet podprostorů

$$\mathcal{P}_{\lambda_2} + \cdots + \mathcal{P}_{\lambda_k}.$$

Přidáním podprostoru $\mathcal{P}_{\lambda_1}$ dostáváme hledaný rozklad. $\square$

Poznamenejme ještě, že rovnost

$$\mathcal{V} = \mathcal{P}_{\lambda_1} + \mathcal{P}_{\lambda_2} + \cdots + \mathcal{P}_{\lambda_k}$$

znamená, že

$$\dim \mathcal{V} = \sum_{i=1}^{k} \dim \mathcal{P}_{\lambda_k},$$

a že sjednocení bází podprostorů $\mathcal{P}_{lambda_i}$ je báze $\mathcal{V}$. Zbývá dokázat, že pro každý operátor $A$, který má pouze jedno vlastní číslo, existuje báze, ve které má operátor $A$ Jordanův normální tvar.

V další části tedy budeme předpokládat, že $A$ je lineární operátor na komplexním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$, a že operátor $A$ má pouze jedno vlastní číslo $\lambda$. Chceme najít bázi $\mathcal{V}$, vzhledem ke které je operátor $A$ vyjádřený maticí, která má Jordanův normální tvar. To je snadné v případě, kdy je každý vektor prostoru $\mathcal{V}$ vlastní vektor operátoru $A$. Je-li příslušné vlastní číslo $\lambda$, pak matice operátoru $A$ vzhledem k libovolné bázi se rovná diagonální matici, která má na hlavní diagonále všechny prvky rovné vlastnímu číslu $\lambda$. K tomu budeme potřebovat následující pomocnou definici.

**Definice 20.52.** Je-li $\mathcal{P}$ podprostor vektorového prostoru $\mathcal{V}$, pak nějaké vektory $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k \in \mathcal{V}$ se nazývají *relativně lineárně nezávislé* vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}$, jestliže z

$$a_1\mathbf{z}_1 + \cdots + a_k\mathbf{z}_k \in \mathcal{P}$$

plyne $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$.

Jsou-li $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ relativně lineárně nezávislé vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}$, pak říkáme, že tvoří *relativní bázi* vzhledem k $\mathcal{P}$, jestliže přidáním libovolné báze podprostoru $\mathcal{P}$ k vektorům $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ dostaneme bázi celého prostoru $\mathcal{V}$.

Relativní bázi vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}$ snadno sestrojíme. Vezmeme libovolnou bázi podprostoru $\mathcal{P}$, kterou doplníme na bázi celého prostoru $\mathcal{V}$, a potom z ní vynecháme vektory z původní báze podprostoru $\mathcal{P}$. Odtud plyne, že počet vektorů v libovolné relativní bázi vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}$ se rovná rozdílu mezi dimenzí prostoru $\mathcal{V}$ a dimenzí podprostoru $\mathcal{P}$. Snadno se rovněž dokáže, že každou relativně lineárně nezávislou množinu vektorů vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}$ můžeme doplnit do relativní báze vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}$. Jsou-li $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ relativně lineárně nezávislé vektory vzhledem k $\mathcal{P}$, zvolíme libovolnou bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l$ podprostoru $\mathcal{P}$. Vektory $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l$ jsou lineárně nezávislé. Platí-li totiž

$$a_1\mathbf{z}_1 + \cdots + a_k\mathbf{z}_k = b_1\mathbf{y}_1 + \cdots + b_l\mathbf{y}_l,$$

pak

$$a_1\mathbf{z}_1 + \cdots + a_k\mathbf{z}_k \in \mathcal{P}.$$

Protože jsou vektory $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ relativně lineárně nezávislé vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}$, platí $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. Potom ale také

$$b_1\mathbf{y}_1 + \cdots + b_l\mathbf{y}_l = 0,$$

a protože $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l$ tvoří bázi podprostoru $\mathcal{P}$, plyne odtud rovněž $b_1 = \cdots = b_l$. Vektory $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l$ jsou tedy lineárně nezávislé a můžeme je tedy doplnit do báze prostoru $\mathcal{V}$. Vypustíme-li z této báze vektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l$, dostaneme relativní bázi vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}$, která obsahuje všechny vektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_l$.

Budeme napřed předpokládat, že jediné vlastní číslo operátoru $A$ se rovná 0. Uvažujeme ještě jednou posloupnost podprostorů

$$\mathcal{P}^1 \subset \mathcal{P}^2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}^p = \mathcal{P}^{p+1} = \cdots$$

prostoru $\mathcal{V}$, kde $\mathcal{P}^i = Ker(A^i)$ a kde $p$ je nejmenší přirozené číslo, pro které platí $Ker(\mathcal{P}^p) = Ker(\mathcal{P}^{p+1})$.

V největším z těchto podprostorů $\mathcal{P}^p$ zvolíme nějakou relativní bázi

$$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q$$

vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}^{p-1}$. Pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}^p$, platí $\mathbf{0} = A^p(\mathbf{x}) = A^{p-1}(A(\mathbf{x}))$ a tedy $A(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}^{p-1}$. Vektory

$$A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), \dots, A(\mathbf{e}_q)$$

proto všechny leží v podprostoru $\mathcal{P}^{p-1}$.

Ukážeme, že jsou relativně lineárně nezávislé vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}^{p-2} \subset \mathcal{P}^{p-1}$. Jsou-li $a_1, a_2, \dots, a_q$ komplexní skaláry a

$$a_1 A(\mathbf{e}_1) + \cdots + a_q A(\mathbf{e}_q) = A(a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_q\mathbf{e}_q) \in \mathcal{P}^{p-2}.$$

Potom ale $a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_q\mathbf{e}_q \in \mathcal{P}^{p-1}$, a protože jsou vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_q$ relativně lineárně nezávislé vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}^{p-1}$, plyne odtud $a_1 = a_2 = \cdots = a_q = 0$, vektory $A(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_q)$ jsou tedy relativně lineárně nezávislé vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}^{p-2}$.

Můžeme tedy doplnit vektory $A(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_q)$ do relativní báze prostoru $\mathcal{P}^{p-1}$ vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}^{p-2}$. Dostaneme tak $q+s$ vektorů

$$A(\mathbf{e}_1), A(\mathbf{e}_2), \dots, A(\mathbf{e}_q), \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_s.$$

Tyto vektory znovu zobrazíme operátorem $A$ do podprostoru $\mathcal{P}^{p-2}$. O jejich obrazech

$$A^2(\mathbf{e}_1), A^2(\mathbf{e}_2), \dots, A^2(\mathbf{e}_q), A(\mathbf{f}_1), A(\mathbf{f}_2), \dots, A(\mathbf{f}_s)$$

můžeme zcela stejně dokázat, že jsou relativně lineárně nezávislé vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}^{p-3}$. Opakováním tohoto postupu se nakonec dostaneme do podprostoru $\mathcal{P}^1$ a doplníme dříve získané vektory do báze celého podprostoru $\mathcal{P}^1$. Získané vektory si uspořádáme do následující tabulky

$$\begin{array}{rcrrcrcccc}
\mathbf{e}_1 & \dots & \mathbf{e}_q & & & & & & & \\
A(\mathbf{e}_1) & \dots & A(\mathbf{e}_q) & \mathbf{f}_1 & \dots & \mathbf{f}_s & & & & \\
A^2(\mathbf{e}_1) & \dots & A^2(\mathbf{e}_q) & A(\mathbf{f}_1) & \dots & A(\mathbf{f}_s) & & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \\
A^{p-1}(\mathbf{e}_1) & \dots & A^{p-1}(\mathbf{e}_q) & A^{p-2}(\mathbf{f}_1) & \dots & A^{p-2}(\mathbf{f}_s) & \dots & \mathbf{h}_1 & \dots & \mathbf{h}_r
\end{array}$$

Vektory ve spodním řádku tvoří bázi podprostoru $\mathcal{P}^1 = Ker(A)$. Vektory ve dvou dolních řádcích tvoří bázi podprostoru $\mathcal{P}^2$, neboť sestávají a relativní báze $\mathcal{P}^2$ vzhledem k podprostoru $\mathcal{P}^1$ a z báze samotného podprostoru $\mathcal{P}^1$. Vektory ve třech dolních řádcích tvoří bázi v $\mathcal{P}^3$, atd. Všechny vektory v tabulce tvoří bázi v prostoru $\mathcal{P}^p$, tj. v cel0m prostoru $\mathcal{V}$.

Ukážeme si, že v této bázi má matice operátoru $A$ Jordanův normální tvar. Uvažujme například první sloupec. Uspořádáme-li vektory prvního sloupce v pořadí

$$A^{p-1}(\mathbf{e}_1), A^{p-2}(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1,$$

pak se každý vektor v této posloupnosti operátorem $A$ zobrazí do předcházejícího vektoru, s výjimkou prvního vektoru v posloupnosti, který se zobrazí operátorem $A$ do $\mathbf{0}$. Podprostor prostoru $\mathcal{V}$ generovaný prvky této posloupnosti je tedy invariantní podprostor operátoru $A$. Označme si tento invariantní podprostor $\mathcal{Q}$. Matice operátoru $A$ vzhledem k bázi

$$A^{p-1}(\mathbf{e}_1), A^{p-2}(\mathbf{e}_1), \dots, A(\mathbf{e}_1), \mathbf{e}_1$$

je tedy čtvercová matice s $q$ řádky a $q$ sloupci. Jediné nenulové prvky jsou 1 na místech (i,i+1) pro $i = 1, \ldots, q-1$. Matice operátoru $A$ na podprostoru $\mathcal{Q}$ je tedy Jordanova buňka

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 0$.

Analogický invariantní podprostor odpovídá každému sloupci naší tabulky vektorů tvořících bázi prostoru $\mathcal{V}$, na kterém má operátor $A$ jediné vlastní číslo 0. Dimenze každého z těchto invariantních podprostorů se rovná počtu vektorů v příslušném sloupci tabulky. Matice operátoru $A$ na každém z těchto invariantních podprostorů se rovná Jordanově buňce odpovídající vlastnímu číslu $\lambda = 0$. Matice operátoru $A$ na celém prostoru $\mathcal{V}$ má tedy v bázi tvořené vektory naší tabulky blokově diagonální tvar a každý blok je Jordanova buňka. Počet Jordanových buněk se tedy rovná počtu sloupců v naší matici a řád každé takové buňky se rovná počtu vektorů v příslušném sloupci.

Nyní budeme uvažovat operátor $A$, který má na prostoru $\mathcal{V}$ jediné vlastní číslo $\lambda$. Operátor $B = A - \lambda I$ má potom jediné vlastní číslo 0. Právě jsme dokázali, že existuje báze prostoru $\mathcal{V}$, ve které má operátor $B$ matici, která je blokově diagonální, a každý diagonální blok je Jordanova buňka odpovídající vlastnímu číslu 0. Matice operátoru $A = B + \lambda I$ má potom v téže bázi blokově diagonální tvar, ve kterém je každý diagonální blok Jordanova buňka odpovídající vlastnímu číslu $\lambda$. Dokázali jsme tak následující větu.

**Věta 20.115.** Buď $A$ lineární operátor na prostoru $\mathcal{V}$ nad komplexními čísly. Předpokládejme, že operátor $A$ má jediné vlastní číslo $\lambda$. Potom existuje báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ prostoru $\mathcal{V}$, ve které má operátor $A$ matici v Jordanově normálním tvaru. Všechny prvky na hlavní diagonále této matice se rovnají vlastnímu číslu $\lambda$. $\square$

Spojíme-li poslední větu s Důsledkem 20.114, dostaneme hlavní výsledek této části přednášky.

**Věta 20.116.** Pro každý lineární operátor $A$ na komplexním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ existuje báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ prostoru $\mathcal{V}$, ve které má matice operátoru $A$ Jordanův normální tvar. $\square$

**Jiný důkaz věty o Jordanově normálním tvaru.**

Ukážeme si ještě stručněji další důkaz věty o Jordanově normálním tvaru. Tentokrát budeme postupovat indukcí podle dimenze $n$ prostoru $\mathcal{V}$. Budeme předpokládat, že pro libovolný lineární operátor $A$ na vektorovém prostoru dimenze $n$ existuje báze, ve které má $A$ matici v Jordanově kanonickém tvaru, a ukážeme, že také pro libovolný lineární operátor na prostoru dimenze $n + 1$ existuje báze, ve které je operátor vyjádřený maticí v Jordanově kanonickém tvaru. Začátek indukce je snadný. Každá matice řádu 1 je v

Jordanově normálním tvaru. Proto libovolný operátor na jednodimenzionálním prostoru má vzhledem k jakékoliv bázi matici v Jordanově normálním tvaru.

Předpokládejme, že $n+1 \geq 2$ je dimenze prostoru $\mathcal{V}$ (nad komplexními čísly) a $A$ je lineární operátor na $\mathcal{V}$. Podle Věty 16.99 existuje v prostoru $\mathcal{V}$ invariantní podprostor $\mathcal{P}$ operátoru $A$, který má dimenzi $n$. Podle indukčního předpokladu existuje v $\mathcal{P}$ báze

$$\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \quad \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q, \dots, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_s,$$

kde $p+q+\dots+s=n$, a operátor $A$ zobrazuje vektory této báze následujícím způsobem:

$$\begin{array}{llll}
A(\mathbf{e}_1) = \lambda_1\mathbf{e}_1, & & & \\
A(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \lambda_1\mathbf{e}_2, & & & \\
\quad\vdots & & & \\
A(\mathbf{e}_p) = \mathbf{e}_{p-1} + \lambda_1\mathbf{e}_p, & & & \\
& A(\mathbf{f}_1) = \lambda_2\mathbf{f}_1, & & \\
& A(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_1 + \lambda_2\mathbf{f}_2, & & \\
& \quad\vdots & & \\
& A(\mathbf{f}_q) = \mathbf{f}_{q-1} + \lambda_2\mathbf{f}_q, & & \\
& & \ddots & \\
& & & A(\mathbf{h}_1) = \lambda_k\mathbf{h}_1, \\
& & & A(\mathbf{h}_2) = \mathbf{h}_1 + \lambda_k\mathbf{h}_2, \\
& & & \quad\vdots \\
& & & A(\mathbf{h}_s) = \mathbf{h}_{s-1} + \lambda_k\mathbf{h}_s.
\end{array}$$

Doplníme tuto bázi nějakým vektorem $\mathbf{e}$, který spolu s vektory $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$, $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q$, $\dots, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_s$ tvoří bázi prostoru $\mathcal{V}$.

Zobrazíme vektor $\mathbf{e}$ operátorem $A$ a vyjádříme obraz $A(\mathbf{e})$ pomocí této báze:

$$A(\mathbf{e}) = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{e}_p + \beta_1\mathbf{f}_1 + \dots + \beta_q\mathbf{f}_q + \dots + \delta_1\mathbf{h}_1 + \dots + \delta_s\mathbf{h}_s + \tau\mathbf{e}.$$

Má-li operátor $A$ v nějaké bázi normální tvar, pak také operátor $A-\tau I$ má v téže bázi normální tvar. Pokud je $\tau \neq 0$, pak můžeme místo operátoru $A$ uvažovat operátor $A-\tau I$ a hledat bázi, ve které má operátor $A-\tau I$ normální tvar. Potom i operátor $A$ bude mít v této bázi normální tvar. Můžeme tedy předpokládat rovnou, že $\tau = 0$. Potom

$$A(\mathbf{e}) = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_p\mathbf{e}_p + \beta_1\mathbf{f}_1 + \dots + \beta_q\mathbf{f}_q + \dots + \delta_1\mathbf{h}_1 + \dots + \delta_s\mathbf{h}_s.$$

Dále se budeme snažit zaměnit vektor $\mathbf{e}$ za vektor $\mathbf{e}'$ tak, aby byl obraz $A(\mathbf{e}')$ co nejjednodušší. Vektor $\mathbf{e}'$ budeme hledat ve tvaru

$$\mathbf{e}' = \mathbf{e} - \kappa_1\mathbf{e}_1 - \dots - \kappa_p\mathbf{e}_p - \mu_1\mathbf{f}_1 - \dots - \mu_q\mathbf{f}_q - \dots - \omega_1\mathbf{h}_1 - \dots - \omega_s\mathbf{h}_s.$$

Potom platí

$$A(\mathbf{e}') = A(\mathbf{e}) - A(\kappa_1\mathbf{e}_1 + \dots + \kappa_p\mathbf{e}_p) - A(\mu_1\mathbf{f}_1 + \dots + \mu_q\mathbf{f}_g) - \dots - A(\omega_1\mathbf{h}_1 + \dots + \omega_s\mathbf{h}_s),$$

a po dosazení za $A(\mathbf{e})$ dostaneme

$$\begin{aligned} A(\mathbf{e}') = {} & \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{e}_p + \beta_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_q\mathbf{f}_q + \cdots + \delta_1\mathbf{h}_1 + \cdots + \delta_s\mathbf{h}_s - \\ & - A(\kappa_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \kappa_p\mathbf{e}_p) - A(\mu_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \mu_q\mathbf{f}_g) - \cdots - A(\omega_1\mathbf{h}_1 + \cdots + \omega_s\mathbf{h}_s). \end{aligned}$$

Komplexní koeficienty $\kappa_1, \ldots, \kappa_p, \mu_1, \ldots, \mu_q, \ldots, \omega_1, \ldots, \omega_s$ můžeme zvolit libovolně. Vybereme je tak, aby v pravé části poslední formule pro $A(\mathbf{e}')$ bylo co nejméně sčítanců.

Rozlišíme nyní dva případy. Jako první budeme uvažovat případ, kdy všechna vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ operátoru $A$ na invariantním podprostoru $\mathcal{P}$ jsou různá od 0. V tomto případě ukážeme, že vektor $\mathbf{e}'$ můžeme zvolit tak, aby platilo $A(\mathbf{e}') = \mathbf{0}$. Operátor $A$ zobrazuje každý z vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ do lineární kombinace těchto vektorů. Podobně operátor $A$ zobrazuje každý z vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q$ do lineární kombinace vektorů $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q$, atd. Ukážeme si, jak zvolit koeficienty $\kappa_1, \ldots, \kappa_p$ tak, aby ve vyjádření vektoru $A(\mathbf{e}')$ byly koeficienty u všech vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ rovné 0. Členy na pravé straně vyjádření $A(\mathbf{e}')$ obsahující vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$ mají tvar

$$\begin{aligned} & \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{e}_p - A(\kappa_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \kappa_p\mathbf{e}_p) = \\ = & \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{e}_p - \kappa_1\lambda_1\mathbf{e}_1 - \kappa_2(\mathbf{e}_1 + \lambda_1\mathbf{e}_2) - \cdots - \kappa_p(\mathbf{e}_{p-1} + \lambda_1\mathbf{e}_p) = \\ = & (\alpha_1 - \kappa_1\lambda_1 - \kappa_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_2 - \kappa_2\lambda_1 - \kappa_3)\mathbf{e}_2 + \cdots + (\alpha_{p-1} - \kappa_{p-1}\lambda_1 - \kappa_p)\mathbf{e}_{p-1} + \\ + & (\alpha_p - \kappa_p\lambda_1)\mathbf{e}_p. \end{aligned}$$

Položíme-li koeficient u $\mathbf{e}_p$ rovný 0, vypočteme odtud $\kappa_p$, neboť $\lambda_1 \neq 0$. Podobně z rovnosti $\alpha_{p-1} - \kappa_{p-1}\lambda_1 - \kappa_p = 0$ vypočteme $\kappa_{p-1}$, a tak dále, až dostaneme hodnotu $\kappa_1$. Tak dostaneme koeficienty $\kappa_1, \ldots, \kappa_p$. Podobně najdeme koeficienty $\mu_1, \ldots, \mu_q$, atd. Našli jsme tak vektor $\mathbf{e}'$ takový, že $A(\mathbf{e}') = \mathbf{0}$.

Přidáme-li tento vektor $\mathbf{e}'$ k původní bázi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q, \ldots, \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_s$, invariantního podprostoru $\mathcal{P}$, dostaneme bázi celého prostoru $\mathcal{V}$. Vzhledem k této bázi má lineární operátor $A$ matici v Jordanově normálním tvaru. Vektor $\mathbf{e}'$ tvoří bázi invariantního podprostoru operátoru $A$, na kterém má $A$ jediné vlastní číslo 0 (nebo jediné vlastní číslo $\tau$, pokud místo operátoru $A$ uvažujeme operátor $A - \tau I$).

Nyní se budeme zabývat druhým případem, kdy některým skupinám vektorů báze $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p, \mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q, \ldots, \mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_s$ odpovídají vlastní hodnoty operátoru $A$ rovné 0. V tomto případě jsou na pravé straně následující rovnosti sčítanci dvou typů:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{e}') = {} & \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{e}_p + \beta_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_q\mathbf{f}_q + \cdots + \delta_1\mathbf{h}_1 + \cdots + \delta_s\mathbf{h}_s - \\ & - A(\kappa_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \kappa_p\mathbf{e}_p) - A(\mu_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \mu_q\mathbf{f}_g) - \cdots - A(\omega_1\mathbf{h}_1 + \cdots + \omega_s\mathbf{h}_s). \end{aligned}$$

Jedny jsou skupiny vektorů odpovídající vlastním hodnotám různým od 0 a druhé skupinám vektorů odpovídajícím vlastní hodnotě 0. V případě skupin odpovídajícím vlastním hodnotám různým od 0 můžeme postupovat stejně jako v prvním případě. Předpokládejme pro jednoduchost, že poté nám zůstanou tři skupiny vektorů $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_p$, $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_q$ a $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_r$ s vlastními hodnotami $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Potom

$$\begin{aligned} A(\mathbf{e}') = {} & \alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_p\mathbf{e}_p + \beta_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \beta_q\mathbf{f}_q + \cdots + \gamma_1\mathbf{g}_1 + \cdots + \gamma_r\mathbf{g}_s - \\ & - A(\kappa_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \kappa_p\mathbf{e}_p) - A(\mu_1\mathbf{f}_1 + \cdots + \mu_q\mathbf{f}_g) - \cdots - A(\nu_1\mathbf{g}_1 + \cdots + \nu_s\mathbf{g}_s). \end{aligned}$$

Protože je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, dostáváme

$$\begin{aligned}
&A(\mathbf{e}_1) = \mathbf{0}, A(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1, \dots, A(\mathbf{e}_p) = \mathbf{e}_{p-1},\\
&A(\mathbf{f}_1) = \mathbf{0},\ A(\mathbf{f}_2) = \mathbf{f}_1,\ \dots, A(\mathbf{f}_q) = \mathbf{f}_{q-1},\\
&A(\mathbf{g}_1) = \mathbf{0}, A(\mathbf{g}_2) = \mathbf{g}_1, \dots, A(\mathbf{g}_r) = \mathbf{e}_{r-1}.
\end{aligned}$$

Lineární kombinace vektorů $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ na pravé straně posledního vyjádření $A(\mathbf{e}')$ má potom tvar

$$\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \alpha_p\mathbf{e}_p - \kappa_2\mathbf{e}_1 - \kappa_3\mathbf{e}_2 - \cdots - \kappa_p\mathbf{e}_{p-1}.$$

Položíme-li $\kappa_2 = \alpha_1, \kappa_3 = \alpha_2, \dots, \kappa_p = \alpha_{p-1}$, zbavíme se všech sčítanců s výjimkou jednoho, který se rovná $\alpha_p\mathbf{e}_p$.

Uděláme-li totéž se skupinami $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q$ a $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_r$, dostaneme vektor $\mathbf{e}'$, pro který platí

$$A(\mathbf{e}') = \alpha_p\mathbf{e}_p + \beta_q\mathbf{f}_q + \gamma_r\mathbf{g}_r.$$

Pokud by nastal případ $\alpha_p = \beta_q = \gamma_r = 0$, pak pro vektor $\mathbf{e}'$ platí $A(\mathbf{e}') = \mathbf{0}$ a operátor $A$ má vzhledem k bázi $\mathbf{e}', \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_q, \dots, \mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_s$ matici, která je v Jordanově normálním tvaru. Vektor $\mathbf{e}'$ tvoří samostatnou buňku s vlastní hodnotou rovnou 0.

Zbývá případ, kdy aspoň jeden z koeficientů $\alpha_p, \beta_q, \gamma_r$ je různý od 0. V tomto případě, narozdíl od všech předchozích, musíme změnit i některé z vektorů báze podprostoru $\mathcal{P}$. Seřadíme čísla $p, q, r$ podle velikosti, nechť například $p > q > r$. Potom sestrojíme novou skupinu vektorů počínající vektorem $\mathbf{e}'$ následovně. Položíme $\mathbf{e}'_{p+1} = \mathbf{e}'$, $\mathbf{e}'_p = A(\mathbf{e}'_{p+1})$, $\mathbf{e}'_{p-1} = A(\mathbf{e}'_p), \dots, \mathbf{e}'_1 = A(\mathbf{e}'_2)$. Dostáváme tak

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'_{p+1} &= \mathbf{e}' &&= \alpha_p\mathbf{e}_p + \beta_q\mathbf{f}_q + \gamma_r\mathbf{g}_r,\\
\mathbf{e}'_p &= A(\mathbf{e}'_{p+1}) &&= \alpha_p\mathbf{e}_{p-1} + \beta_q\mathbf{f}_{q-1} + \gamma_r\mathbf{g}_{r-1},\\
&\ \vdots\\
\mathbf{e}'_{p-r+2} &= A(\mathbf{e}'_{p-r+3}) &&= \alpha_p\mathbf{e}_{p-r+1} + \beta_q\mathbf{f}_{q-r+1} + \gamma_r\mathbf{g}_1,\\
\mathbf{e}'_{p-r+1} &= A(\mathbf{e}'_{p-r+2}) &&= \alpha_p\mathbf{e}_{p-r} + \beta_q\mathbf{f}_{q-r},\\
&\ \vdots\\
\mathbf{e}'_1 &= A(\mathbf{e}'_2) &&= \alpha_p\mathbf{e}_1.
\end{aligned}$$

Nahradíme nyní vektory $\mathbf{e}', \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_p$ původní báze novými vektory

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_p, \mathbf{e}'_{p+1},$$

a ostatní vektory necháme beze změny. Vzhledem k této bázi má operátor $A$ matici v Jordanově normálním tvaru.