2. Vektory a vektorové prostory

Vlastnosti sčítání vektorů a násobení vektoru skalárem.

A: Každé dvojici vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ odpovídá vektor $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, který nazýváme součtem vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ a platí:

(A1) sčítání vektorů je komutativní, tj. platí $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$,
(A2) sčítání vektorů je asociativní, tj. platí $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$ pro každé tři vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$,
(A3) existuje vektor $\mathbf{0}$ (nulový vektor) pro který platí $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro každý vektor $\mathbf{x}$,
(A4) ke každému vektoru $\mathbf{x}$ existuje opačný vektor $-\mathbf{x}$ pro který platí $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

B: Každé dvojici $a, \mathbf{x}$, kde a je skalár a $\mathbf{x}$ je vektor odpovídá vektor $a \cdot \mathbf{x}$ nazývaný součinem $a, \mathbf{x}$ a platí

(B1) násobení vektoru skalárem je asociativní, tj. platí $a(b\mathbf{x}) = (ab)\mathbf{x}$ pro každé dva skaláry a, b a každý vektor $\mathbf{x}$,
(B2) platí $1\mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro každý vektor $\mathbf{x}$.

C: Dále platí následující dva distributivní zákony:

(C1) násobení vektoru skalárem je distributivní vzhledem ke sčítání skalárů, tj. platí $(a + b)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + b\mathbf{x}$ pro každé dva skaláry a, b a každý vektor $\mathbf{x}$,
(C2) násobení vektoru skalárem je distributivní vzhledem ke sčítání vektorů, tj. platí $a(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a\mathbf{x} + a\mathbf{y}$ pro každý skalár a a každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$.

Definice 2.4. Buď $\mathbf{T}$ nějaké těleso (skalárů). *Vektorový prostor* nad tělesem $\mathbf{T}$ je množina $\mathcal{V}$ (jejím prvkům říkáme vektory), na které je definována operace sčítání vektorů $(+)$ a operace násobení vektoru skalárem $(\cdot)$ splňující podmínky (A1)-(A4), (B1), (B2), (C1), (C2).

Je-li $\mathbf{T}$ těleso racionálních, reálných nebo komplexních čísel, pak vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ nazýváme také *racionální* (*reálný*, *komplexní*) vektorový prostor.

Příklad 2.4. Příklady vektorových prostorů. a) Aritmetický reálný 2-dimenzionální prostor $\mathcal{R}^2$.

b) Prostor $\mathcal{R}^3$.

c) Prostor $\mathcal{C}^1 (= \mathbf{C})$.

d) Vektorový prostor $\mathcal{P}$ všech polynomů jedné proměnné t s komplexními koeficienty.

e) Aritmetický komplexní n-dimenzionální prostor $\mathcal{C}^n$.

f) Vektorový prostor $\mathcal{P}_n$ všech polynomů jedné proměnné t s komplexními koeficienty stupně menšího než n.

g) Aritmetický reálný n-dimenzionální prostor $\mathcal{R}^n$.
h) Aritmetický 4-dimenzionální vektorový prostor $\mathcal{Z}_2^4$ nad tělesem $\mathbf{Z}_2$.
i) Aritmetický n-dimenzionální vektorový prostor $\mathcal{T}^n$ nad tělesem $\mathbf{T}$.
j) Jednoprvkový vektorový prostor $\mathcal{O}$ nad tělesem $\mathbf{T}$.
k) Reálná čísla $\mathcal{R}$ jako vektorový prostor nad racionálními čísly.
l) Komplexní čísla $\mathcal{C}$ jako reálný vektorový prostor.

Věta 2.4. Základní vlastnosti sčítání a násobení ve vektorových prostorech. Buď $\mathcal{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Potom platí:
a) $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ pro každý skalár $a \in \mathbf{T}$,
b) $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$,
c) Vektor $-\mathbf{x}$ je určen jednoznačně vektorem $\mathbf{x}$ pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$,
d) je-li $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$, pak buď $a = 0$ nebo $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,
e) $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.
f) Součet vektorů

$$\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_n$$

nezávisí na uzávorkování.

Důkaz. a) $a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}$. Nyní přičteme k oběma krajním stranám vektor $-(a\mathbf{0})$.

b) Důkaz je téměř stejný jako v případě a). Platí $0\mathbf{x} = (0+0)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} + 0\mathbf{x}$. Tentokrát přičteme k oběma stranám vektor $-(0\mathbf{x})$.

c) Důkaz je zcela stejný jako v případě Věty 1b).

d) Je-li $a\mathbf{x} = 0$ a současně $a \neq 0$, vynásobíme obě strany první rovnosti číslem a^{-1}. dostaneme tak

$$0 = a^{-1}0 = a^{-1}(a\mathbf{x}) = (a^{-1}a)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

e) Platí $\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = (1 + (-1))\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$. $\square$

f) Důkaz je zcela stejný jako u Věty 1.3. $\square$

Povídání o kódech. Kontrola parity a její vliv na správnost přenosu informace. Nejjednodušší Hammingův kód.