19. Kvaternionová reprezentace rotací v $\mathcal{R}^3$

Pokračujeme vyjádřením inverzí v rovině pomocí funkcí komplexní proměnné. Pro ilustraci to uděláme napřed v případě kruhové inverze určené jednotkovou kružnicí. Bod $w = u + iv = \rho e^{i\theta}$ se zobrazí do bodu $\rho^{-1}e^{i\theta} = 1/\overline{w}$. Kruhová inverze určená jednotkovou kružnicí C je tedy popsána funkcí

$$I(w) = \frac{1}{\overline{w}}.$$

Podobně snadné je najít funkci komplexní proměnné, která vyjadřuje osovou symetrii vzhledem k reálné ose. Tato osová symetrie je popsána funkcí

$$r(w) = \overline{w}.$$

Označíme-li

$$\lambda = \alpha - \alpha', \quad \mu = \beta - \beta', \quad \nu = \gamma - \gamma',$$

můžeme v případě $\nu \neq 0$ přeformulovat Větu 18.109 následovně. Jednoduché reflexi sféry $\mathcal{S}_2$ určené rovinou

$$\lambda x + \mu y + \nu z = 0$$

odpovídá po stereografické projekci kruhová inverze určená kružnicí $C_{d,\rho}$ se středem

$$d = -\lambda/\nu - i\mu/\nu$$

a poloměrem

$$\rho = \sqrt{1 + (\lambda/\nu)^2 + (\mu/\nu)^2} = (1/\nu)\sqrt{\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2}.$$

Můžeme předpokládat, že $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$ a tedy

$$\rho = 1/\nu.$$

Věta 19.110. Jednoduché reflexi sféry $\mathcal{S}_2$ určené rovinou $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, kde $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$, odpovídá po stereografické projekci zobrazení komplexní roviny určené funkcí

$$\overline{g}(w) = \frac{(\lambda + i\mu)\overline{w} - \nu}{-\nu\overline{w} - (\lambda - i\mu)}.$$

Důkaz. Všimněte se, že ve znění věty schází předpoklad $\nu \neq 0$. V důkazu věty ale musíme případy $\nu \neq 0$ a $\nu = 0$ rozlišit.

Nejdříve tedy případ $\nu \neq 0$. Z definice kruhové inverze ihned vyplývá, že dvojice navzájem inverzních bodů P, P' vzhledem k jednotkové kružnici se středem v počátku se stejnolehlostí (dilatací) se středem v počátku souřadnic a koeficientem $\rho \in \mathbf{R}$ zobrazí na dvojici bodů, které jsou navzájem inverzní vzhledem ke kružnici se středem v počátku a poloměrem ρ. Všechny vzdálenosti se totiž vynásobí koeficientem ρ. Rovnice této dilatace je

$$d_\rho(w) = \rho w$$

a rovnice inverzní dilatace je

$$d_\rho^{-1}(w) = \rho^{-1} w.$$

Podobně se translací

$$t_d(w) = d + w$$

zobrazí každá dvojice bodů navzájem inverzních vzhledem ke kružnici se středem v počátku a poloměrem ρ na dvojici bodů navzájem inverzních vzhledem ke kružnici se středem v bodě d a stejným poloměrem ρ. Translace totiž zachovává vzdálenosti a zobrazuje polopřímky se středem v počátku na polopřímky se středem v bodě d. Inverzní translace je popsána zobrazením

$$t_d^{-1}(w) = -d + w.$$

Kružnici se středem v počátku a poloměrem 1 zobrazíme na kružnici se středem v bodě d a poloměrem ρ pomocí zobrazení $t_d d_\rho$, tj. složením dilatace d_ρ a translace t_d. Kruhová inverze vzhledem ke kružnici se středem v bodě d a poloměrem ρ se tedy rovná zobrazení

$$t_d d_\rho I d_\rho^{-1} t_d^{-1},$$

kde I je kruhová inverze vzhledem k jednotkové kružnici. Víme už, že tato kruhová inverze je popsána zobrazením

$$I(w) = 1/\overline{w}.$$

Kruhová inverze vzhledem ke kružnici se středem d a poloměrem ρ je tedy popsána zobrazením

$$\overline{g}(w) = d + \rho\left(\frac{1}{\overline{\rho^{-1}(-d+w)}}\right) = \frac{d\overline{w} + \rho^2 - d\overline{d}}{\overline{w} - \overline{d}}.$$

Protože $d = -\lambda/\nu - i\mu/\nu$ a $\rho = 1/\nu$, platí

$$\begin{aligned}\overline{g}(w) &= \frac{(\lambda + i\mu)\overline{w} - (1 - \lambda^2 - \mu^2)/\nu}{-\nu\overline{w} - (\lambda - i\mu)} \\ &= \frac{(\lambda + i\mu)\overline{w} - \nu}{-\nu\overline{w} - (\lambda - i\mu)} \\ &= \frac{(\lambda + i\mu)\overline{w} - \nu}{-\nu\overline{w} - (\lambda - i\mu)}.\end{aligned}$$

Zbývá případ $\nu = 0$, tj. případ, kdy rovina reflexe obsahuje severní pól. Po stereografické projekci jí odpovídá osová symetrie s osou

$$\lambda u + \mu v = 0.$$

Tato přímka je tvořená vektory (u, v) kolmými k vektoru (λ, μ). Protože předpokládáme $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, existuje úhel φ takový, že

$$\lambda = \cos\varphi, \quad \mu = \sin\varphi.$$

Přímka $\lambda u + \mu v = 0$ potom svírá s reálnou osou úhel $\theta = \varphi - (\pi/2)$.

Dva body komplexní roviny symetrické vzhledem k reálné ose se otočením r_θ zobrazí na dva body symetrické vzhledem k přímce procházející počátkem a svírající s reálnou osou úhel θ, tj. na body symetrické vzhledem k přímce $\lambda u + \mu v = 0$. Rotace r_θ je popsána funkcí

$$r_\theta(w) = e^{i\theta} w$$

a inverzní rotace má vyjádření

$$r_\theta^{-1}(w) = e^{-i\theta}(w).$$

Osová symetrie určená přímkou $\lambda u + \mu v = 0$ má potom vyjádření $r_\theta r r_\theta^{-1}$ a tomu odpovídá funkce komplexní proměnné

$$\overline{g}(w) = r_\theta r r_\theta^{-1}(w) = r_\theta r(e^{-i\theta} w) = r_\theta(e^{i\theta}\overline{w}) = e^{2i\theta}\overline{w} = \frac{e^{i\theta}\overline{w}}{e^{-i\theta}}.$$

Vzhledem k tomu, že $\theta = \varphi - (\pi/2)$, platí

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \cdot e^{-i\pi/2} = -ie^{i\varphi}$$

a

$$e^{-i\theta} = e^{-i\varphi} \cdot e^{i\pi/2} = ie^{-i\varphi}.$$

Proto platí

$$\overline{g}(w) = \frac{e^{i\theta}\overline{w}}{e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\varphi}\overline{w}}{-e^{-i\varphi}} = \frac{(\lambda + i\mu)\overline{w}}{-(\lambda - i\mu)}.$$

Protože $\nu = 0$, má i v tomto případě zobrazení $\overline{g}$ tvar ze znění věty. $\square$

Reálná čísla λ, μ, ν splňovala podmínku $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$. Označíme-li

$$l = \lambda + i\mu,$$

splňují komplexní parametr l a reálný parametr ν podmínku $|l|^2 + \nu^2 = 1$ a funkce $\overline{g}$ má potom vyjádření

$$\overline{g}(w) = \frac{lw - \nu}{-\nu\overline{w} - \overline{l}}.$$

Tato drobná úprava nám poněkud zjednoduší důkaz následující klasické věty, kterou jako první dokázal K.F. Gauss kolem roku 1819.

Věta 19.111. Zobrazení komplexní roviny odpovídající rotacím sféry $\mathcal{S}_2$ jsou právě zobrazení tvaru

$$f(w) = \frac{aw + b}{-\overline{b}w + \overline{a}},$$

kde komplexní čísla a, b splňují podmínku $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Důkaz. Podle Důsledku 17.105, lze každý vlastní ortogonální operátor v prostoru $\mathcal{R}^3$ složit ze sudého počtu jednoduchých reflexí (ve skutečnosti stačí pouze dvě). Podíváme se tedy napřed, jak vypadá funkce komplexní proměnné odpovídající složení dvou jednoduchých reflexí v prostoru $\mathcal{R}^3$.

Těmto reflexím odpovídají podle Věty 19.110 funkce

$$\overline{g}_1 = \frac{l_1\overline{w} - \nu_1}{-\nu_1\overline{w} - \overline{l_1}}, \quad \overline{g}_2 = \frac{l_2\overline{w} - \nu_2}{-\nu_2\overline{w} - \overline{l_2}},$$

kde $|l_1|^2 + \nu_1^2 = |l_2|^2 + \nu_2^2 = 1$. Několik řádek výpočtů potom vede k vyjádření složené funkce $f = \overline{g}_1\overline{g}_2$ ve tvaru

$$f(w) = \overline{g}_1\overline{g}_2(w) = \frac{(l_1\overline{l}_2 + \nu_1\nu_2)w + (-l_1\nu_2 + \nu_1 l_2)}{(\overline{l}_1\nu_2 - \nu_1\overline{l}_2)w + (\overline{l}_1 l_2 + \nu_1\nu_2)}.$$

Tato funkce je v hledaném tvaru, stačí položit $a = l_1\overline{l}_2 + \nu_1\nu_2$ a $b = -l_1\nu_2 + \nu_1 l_2$. Zbývá dokázat, že $|a|^2 + |b^2| = 1$. Platí

$$\begin{aligned}
|a|^2 + |b|^2 = a\overline{a} + b\overline{b} = \det\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a}\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix} l_1\overline{l}_2 + \nu_1\nu_2 & -l_1\nu_2 + \nu_1 l_2 \\ \overline{l}_1\nu_2 - \nu_1\overline{l}_2 & \overline{l}_1 l_2 + \nu_1\nu_2\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} l_1 & -\nu_1 \\ -\nu_1 & -\overline{l}_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{l}_2 & -\nu_2 \\ -\nu_2 & -l_2\end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} l_1 & -\nu_1 \\ -\nu_1 & -\overline{l}_1\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} \overline{l}_2 & -\nu_2 \\ -\nu_2 & -l_2\end{pmatrix} \\
&= (-|l_1|^2 - \nu_1^2)(-|l_2|^2 - \nu_2^2) = (-1)(-1) = 1.
\end{aligned}$$

Dále si ukážeme, že libovolná dvě komplexní čísla a, b taková, že $|a|^2 + |b|^2 = 1$, můžeme vyjádřit ve tvaru

$$a = l_1\overline{l}_2 + \nu_1\nu_2, \quad b = -l_1\nu_2 + \nu_1 l_2$$

vhodnou volbou komplexních čísel l_1, l_2 a reálných čísel ν_1, ν_2, pro která musí platit $|l_1|^2 + \nu_1^2 = |l_2|^2 + \nu_2^2 = 1$.

Můžeme například zvolit $\nu_2 = 0$. Potom musí být $|l_2| = 1$, neboli $l_2 = e^{i\varphi}$ pro nějaké reálné číslo φ. To najdeme z druhé z následujících rovností, neboť ν_1 musí být reálné číslo. Má platit

$$a = l_1 e^{i\varphi}, \quad b = \nu_1 e^{i\varphi}$$

a tyto rovnosti jednoznačně určují komplexní číslo l_1 a reálné číslo ν_1. Potom také platí

$$1 = |a|^2 + |b|^2 = |l_1|^2 + \nu_1^2.$$

Složení libovolných dvou reflexí tak odpovídá funkce

$$f(w) = \frac{aw + b}{-\overline{b}w + \overline{a}},$$

kde $|a|^2+|b|^2=1$. Naopak každá taková funkce odpovídá složení dvou reflexí a tedy nějaké rotaci prostoru $\mathcal{R}^3$.

Zbývá dokázat, že složení $f_1 f_2$ libovolných dvou funkcí

$$f_1(w)=\frac{a_1 w+b_1}{-\overline{b}_1 w+\overline{a}_1},\quad f_2(w)=\frac{a_2 w+b_2}{-\overline{b}_2 w+\overline{a}_2},$$

kde $|a_1|^2+|b_1|^2=|a_2|^2+|b_2|^2=1$, lze opět vyjádřit ve tvaru

$$\frac{aw+b}{-\overline{b}w+\overline{a}}$$

a $|a|^2+|b|^2=1$. Toto poslední tvrzení je speciálním případem obecnějšího tvrzení, které si dokážeme samostatně. $\square$

Definice 19.51. Zobrazení komplexní roviny do sebe definované předpisem

$$f(w)=\frac{aw+b}{cw+d},$$

kde a,b,c,d jsou komplexní čísla taková, že c,d nejsou současně rovná 0, se nazývá *lineární funkce lomená.*

Sami si snadno dokážete přímým výpočtem následující větu.

Věta 19.112. Složením dvou lineárních funkcí lomených

$$f_1(w)=\frac{a_1 w+b_1}{c_1 w+d_1},\quad f_2(w)=\frac{a_2 w+b_2}{c_2 w+d_2}$$

je racionální funkce lomená

$$f_1 f_2(w)=\frac{aw+b}{cw+d},$$

kde

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}.$$

$\square$

Použijeme-li předchozí větu na složení dvou funkcí

$$f_1(w)=\frac{a_1 w+b_1}{-\overline{b}_1 w+\overline{a}_1},\quad f_2(w)=\frac{a_2 w+b_2}{-\overline{b}_2 w+\overline{a}_2},$$

kde $|a_1|^2+|b_1|^2=|a_2|^2+|b_2|^2=1$, dostaneme vyjádření

$$f_1 f_2(w)=\frac{aw+b}{cw+d},$$

kde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -\overline{b}_1 & \overline{a}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -\overline{b}_2 & \overline{a}_2 \end{pmatrix},$$

neboli $c = -\overline{b}_1 a_2 - \overline{a}_1 \overline{b}_2 = -\overline{b}$ a $d = -\overline{b}_1 b_2 + \overline{a}_1 \overline{a_2} = \overline{a}$. Rovnost $|a|^2 + |b|^2 = 1$ plyne z věty o násobení determinantů. Všimněte si, že jsme také právě dokončili důkaz, že každou rotaci v prostoru $\mathcal{R}^3$ lze složit ze dvou jednoduchých reflexí (to lze ale dokázat přímo a mnohem jednodušeji).

Zbývá vyjasnit, jak souvisí komplexní koeficienty a, b funkce

$$f(w) = \frac{aw + b}{-\overline{b}w + \overline{a}}$$

vyjadřující nějakou rotaci s osou a úhlem této rotace. Věta 19.110 říká, že reflexi určené rovinou

$$\lambda x + \mu y + \nu v = 0, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1,$$

odpovídá funkce

$$\overline{g}(w) = \frac{(\lambda + i\mu)\overline{w} - \nu}{-\nu\overline{w} - (\lambda - i\mu)}.$$

V důkazu Věty 19.111 jsme si ukázali, že složení dvou takových zobrazení $\overline{g}_1, \overline{g}_2$ odpovídajících reflexím určeným dvěma různými rovinami

$$\lambda_1 x + \mu_1 y + \nu_1 v = 0, \quad \lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2 v = 0,$$

se rovná funkci určené maticí

$$\begin{pmatrix} (\lambda_1 + i\mu_1)(\lambda_2 - i\mu_2) + \nu_1\nu_2 & (-\lambda_1 - i\mu_1)\nu_2 + \nu_1(\lambda_2 + i\mu_2) \\ (\lambda_1 - i\mu_1)\nu_2 - \nu_1(\lambda_2 - i\mu_2) & (\lambda_1 - i\mu_1)(\lambda_2 + i\mu_2) + \nu_1\nu_2 \end{pmatrix}.$$

Roznásobením dostaneme matici

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + i(\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2) & -\lambda_1\nu_2 + \nu_1\lambda_2 + i(-\mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2) \\ \lambda_1\nu_2 - \nu_1\lambda_2 + i(-\mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2) & \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2 + i(-\mu_1\lambda_2 + \lambda_1\mu_2) \end{pmatrix} \\ &= (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 + \nu_1\nu_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + (\nu_1\mu_2 - \mu_1\nu_2)\begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &+ (-\nu_1\lambda_2 + \lambda_1\nu_2)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2)\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Význam rozepsání složité matice do lineární kombinace čtyř jednoduchých matic vyplyne při podrobnějším pohledu na koeficienty této lineární kombinace. Koeficient u jednotkové matice je skalární součin vektorů $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ a $(\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$. Protože předpokládáme, že mají oba délku 1, rovná se jejich skalární součin $\cos\varphi$, kde φ je úhel mezi oběma vektory. Protože jsou to vektory kolmé k rovinám reflexe, plyne odtud, že φ je úhel mezi rovinami reflexe. Složení těchto dvou reflexí je tedy rotace o úhel 2φ.

Koeficienty u dalších tří matic jsou souřadnice vektoru

$$(\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2, -\nu_1\lambda_2 + \lambda_1\nu_2, \lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2).$$

Tomuto vektoru se říká *vektorový součin* vektorů $\mathbf{n}_2 = (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$ a $\mathbf{n}_1 = (\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ a označuje se $\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$. Snadno si ověříte, že vektorový součin dvou lineárně nezávislých vektorů $\mathbf{n}_2$ a $\mathbf{n}_1$ je kolmý k oběma těmto vektorům a udává tedy osu rotace určené danými reflexemi. Jen o málo obtížnější je dokázat, že délka součinu $\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$ se rovná $||\mathbf{n}_2|| \cdot ||\mathbf{n}_1|| \sin\varphi$. A nakonec, že determinant, jehož sloupce jsou po řadě souřadnice vektorů $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$, je kladný. Báze $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$ má tedy stejnou orientaci jako původní souřadný systém v prostoru $\mathcal{R}^3$ (v našem případě kladnou). Při pohledu z kladného směru osy vektoru $\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$ na rovinu určenou vektory $\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_1$ tedy přejdeme od kladného směru vektoru $\mathbf{n}_2$ ke kladnému směru vektoru $\mathbf{n}_1$ proti směru hodinových ručiček (tomu říkáme v kladném směru). Protože napřed děláme reflexi vzhledem k rovině určené vektorem $\mathbf{n}_2$ a potom vzhledem k rovině určené vektorem $\mathbf{n}_1$, je rotace kolem osy určené vektorovým součinem $\mathbf{n}_2 \times \mathbf{n}_1$ v kladném směru.

Můžeme tedy shrnout. Rozložíme-li matici rotace

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1,$$

na lineární kombinaci čtyř jednoduchých matic výše uvedeným způsobem, koeficienty posledních tří matic udávají souřadnice kladného směru osy rotace a koeficient u jednotkové matice se rovná $\cos\varphi$, kde 2φ je úhel rotace, směr rotace je kladný.

Dodejme ještě pro úplnost, že jsou-li vektory $\mathbf{n}_2$ a $\mathbf{n}_1$ lineárně závislé, je jejich vektorový součin rovný 0.

Označíme-li

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},$$

můžeme každou rotaci v $\mathcal{R}^3$ zapsat ve tvaru

$$a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k, \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 1.$$

Jak najdeme složení dvou rotací $a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$ a $b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k$? Vzhledem k tomu, že násobení matic je distributivní vzhledem ke sčítání, potřebujeme znát součiny matic $1, i, j, k$. Jasné to je u součinů jednotkové matice 1 s ostatními. Dále platí

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \ ij = k, \ jk = i, \ ki = j, \ ji = -k, \ kj = -i, \ ik = -j.$$

Matice $1, i, j, k$ se tedy násobí úplně stejně jako kvaternionové jednotky.

Složení rotací $(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_k)(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)$ už teď snadno spočítáme a z výsledku ihned vyčteme osu, úhel a směr výsledné rotace.

Poznámka. Mnohem obvyklejší je zvolit za kvaternionové jednotky matice

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Můžete si sami ověřit, že takto zvolené matice splňují stejné rovnosti při násobení jako námi zvolené matice. Tato volba by ale vedla k přeházení pořadí a znamének souřadnic osy rotace.