18. Stereografická projekce a kruhová inverze

V této a následující části přednášky se budeme věnovat ortogonálním zobrazením v třídimenzionálním euklidovském prostoru $\mathcal{R}^3$. Najdeme jiný popis těchto zobrazení pomocí kterého bude snazší najít složení dvou rotací.

Ortogonální zobrazení zachovávají velikost vektorů. Zobrazí proto každý bod na jednotkové sféře (povrchu koule o poloměru 1 se středem v bodě $\mathbf{0}$ - počátku souřadnic) do nějakého jiného bodu na této sféře. Každé ortogonální zobrazení tedy určuje vzájemně jednoznačné zobrazení jednotkové sféry do sebe. Vzhledem k linearitě ortogonálních zobrazení je hodnota ortogonálního zobrazení v jakémkoliv bodu prostoru $\mathcal{R}^3$ určena jeho hodnotami v bodech jednotkové sféry. Ve skutečnosti stačí znát hodnoty zobrazení pouze ve třech lineárně nezávislých bodech této sféry.

Každý bod na jednotkové sféře má euklidovské souřadnice (x, y, z) vzhledem k nějaké pevně zvolené ortonormální bázi prostoru $\mathcal{R}^3$. Pro tyto souřadnice platí $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a každý bod prostoru $\mathcal{R}^3$, jehož souřadnice splňují tuto rovnost, na jednotkové sféře leží. Ukážeme si teď. jak na jednotkové sféře zavést komplexní souřadnice. Použijeme k tomu tzv. *stereografickou projekci.*

Stereografická projekce spočívá v promítnutí bodů jednotkové sféry do roviny $z = 0$ z bodu $(0, 0, 1)$, kterému budeme říkat *severní pól* a označovat jej N. Nyní vezmeme libovolný bod $P \neq N$ jednotkové sféry, spojíme jej s bodem N přímkou a podíváme se, jak závisejí souřadnice $(u, v, 0)$ průsečíku P' této přímky s rovinou $z = 0$ na souřadnicích (x, y, z) bodu P.

Spojnice bodů N a P' má směr $(u, v, -1)$, jejich spojnice má tedy parametrické vyjádření

$$x = 0 + tu, \quad y = 0 + tv, \quad z = 1 - t.$$

Hodnoty parametru t pro průsečíky této přímky se sférou

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

dostaneme z rovnice

$$t^2u^2 + t^2v^2 + (1 - t)^2 = 1,$$

neboli

$$t^2(u^2 + v^2 + 1) = 2t.$$

Tato rovnice má dva reálné kořeny

$$t = 0, \quad t = \frac{2}{u^2 + v^2 + 1}.$$

První z nich odpovídá severnímu pólu N a druhý bodu P o souřadnicích

$$(x, y, z) = \big(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\big).$$

Jsou-li naopak známy souřadnice (x, y, z) bodu $P \neq N$, platí pro souřadnice bodu P'

$$u = \frac{x}{t} = \frac{x}{1-z}, \quad v = \frac{y}{t} = \frac{y}{1-z}.$$

Dokázali jsme tak následující větu.

Věta 18.107. Při stereografické projekci bodu $P = (x, y, z)$ různému od severního pólu N odpovídá bod

$$P' = (\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0)$$

roviny $z = 0$. Inverzní zobrazení naopak zobrazuje bod $(u, v, 0)$ této roviny do bodu

$$(x, y, z) = (\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1})$$

jednotkové sféry. $\square$

V dalším textu budeme souřadnice bodů roviny $z = 0$ zapisovat pouze jako (u, v). Místo dvou reálných souřadnic budeme později také psát jediné komplexní číslo $u + iv$. V tom spočívá pravý smysl stereografické projekce – zavést komplexní souřadnice pro body na jednotkové sféře v prostoru $\mathcal{R}^3$. Každý bod této sféry s výjimkou severního pólu N tak má jednoznačně určené komplexní souřadnice. Z mnoha důvodů, z nichž některé vyplynou na povrch později, je výhodné rozšířit rovinu komplexních čísel o jedno "nekonečné komplexní číslo", které budeme označovat ∞, a které budeme považovat za souřadnice severního pólu N. Stereografická projekce je potom vzájemně jednoznačné zobrazení mezi body na jednotkové sféře a prvky rozšířené komplexní roviny. Toto zobrazení pochopitelně nezachovává vzdálenosti, ale v jistém smyslu zachovává úhly. Jednotkovou sféru v $\mathcal{R}^3$ budeme dále označovat $\mathcal{S}_2$. Index vyjadřuje, že sféra sama je dvoudimenzionální.

V minulé kapitole jsme si ukázali, že každé ortogonální zobrazení v libovolném euklidovském prostoru lze složit z jednoduchých reflexí. Nyní si ukážeme, jaké zobrazení komplexní roviny odpovídá jednoduché reflexi sféry $\mathcal{S}_2$. K tomu napřed popíšeme rovinu bodů, které jsou stejně vzdálené od dvou bodů $P, P' \in \mathcal{S}_2$.

Lemma 18.108. Množina bodů prostoru $\mathcal{R}^3$, které mají stejnou vzdálenost od dvou daných bodů $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ a $P' = (\alpha', \beta', \gamma')$ sféry $\mathcal{S}_2$, se rovná rovině

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z = 0.$$

Důkaz. Má-li bod (x, y, z) stejnou vzdálenost od bodů P, P', platí

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\gamma)^2 = (x-\alpha')^2 + (y-\beta')^2 + (z-\gamma')^2.$$

Vzhledem k tomu, že $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$, můžeme poslední rovnost zjednodušit na

$$-2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z = -2\alpha' x - 2\beta' y - 2\gamma' z,$$

neboli

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z = 0.$$

□

Dále si připomeneme kruhovou inverzi. Je-li dána v rovině kružnice C se středem O a poloměrem ρ, pak kruhová inverze určená kružnicí C zobrazuje libovolný bod $P \neq O$ do bodu P', který leží na polopřímce OP a pro vzdálenosti bodů P, P' od středu O platí

$$|OP| \cdot |OP'| = \rho^2.$$

Bod P' se tedy touto kruhovou inverzí zobrazí do bodu P. Každý bod na kružnici C se zobrazí sám do sebe. Kruhová inverze určená C je definovaná pro každý bod roviny různý od středu O. Kruhová inverze tak není vzájemně jednoznačným zobrazením roviny do sebe. Přidáme-li ale k rovině bod v nekonečnu ∞, pak můžeme rozšířit definici kruhové inverze určené C tak, že střed O zobrazíme do ∞ a naopak ∞ do bodu O. Kruhová inverze je potom vzájemně jednoznačným zobrazením rozšířené roviny do sebe.

Osová souměrnost vzhledem k přímce je limitním případem kruhové inverze, zvětšujeme-li poloměr ρ kružnice C tak, že posunujeme střed O a současně zachováváme průsečík polopřímky OP s kružnicí C. Bude se nám hodit považovat osovou symetrii rovněž za kruhovou inverzi určenou "kružnicí s nekonečným poloměrem". Osová inverze zobrazuje bod ∞ do sebe.

Definujeme tedy *inverzi* jako osovou symetrii r_L určenou přímkou L nebo jako kruhovou inverzi I_C určenou kružnicí C. Dříve než si ukážeme, jak popsat inverze pomocí zobrazení rozšířené komplexní roviny do sebe, ukážeme si souvislost inverzí a jednoduchých reflexí v třídimenzionální euklidovském prostoru $\mathcal{R}^3$.

Věta 18.109. Vzájemně jednoznačné zobrazení sféry $\mathcal{S}_2$ určené jednoduchou reflexí odpovídá po stereografické projekci nějaké inverzi.

Důkaz. Zobrazí-li jednoduchá reflexe bod $P = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{C}_2$ do bodu $P' = (\alpha', \beta', \gamma')$ různého do P, je podle Lemma 18.108 určená rovinou

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y + (\gamma - \gamma')z = 0.$$

Body (x, y, z) této roviny, které leží současně na sféře $\mathcal{S}_2$, mají souřadnice

$$(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}),$$

kde (u, v) jsou souřadnice jejich stereografických projekcí. Souřadnice (u, v) těchto bodů tak splňují rovnici

$$(\alpha - \alpha')\frac{2u}{u^2+v^2+1} + (\beta - \beta')\frac{2v}{u^2+v^2+1} + (\gamma - \gamma')\frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}) = 0.$$

Tuto rovnici zjednodušíme do tvaru

$$\big(u + \frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}\big)^2 + \big(v + \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'}\big)^2 = 1 + \big(\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}\big)^2 + \big(\frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'}\big)^2,$$

což je rovnice kružnice se středem

$$O = \big(-\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}, -\frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} \big)$$

a poloměrem

$$\rho = \sqrt{1 + \big(\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}\big)^2 + \big(\frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'}\big)^2} = \frac{\sqrt{2(1 - \alpha\alpha' - \beta\beta' - \gamma\gamma')}}{\gamma - \gamma'}.$$

Poslední rovnost vyplývá z toho, že $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$. Tyto formule pochopitelně platí pouze za předpokladu $\gamma \neq \gamma'$. Je-li $\gamma = \gamma'$, je obrazem průniku sféry $\mathcal{S}_2$ s rovinou reflexe

$$(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y = 0$$

přímka

$$(\alpha - \alpha')u + (\beta - \beta')v = 0.$$

Budeme opět předpokládat $\gamma \neq \gamma'$. Ukážeme si, že stereografický obraz bodu $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ se zobrazí do stereografické projekce bodu $P' = (\alpha', \beta', \gamma')$ kruhovou inverzí určenou kružnicí

$$\big(u + \frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}\big)^2 + \big(v + \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'}\big)^2 = 1 + \big(\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'}\big)^2 + \big(\frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'}\big)^2,$$

kterou jsme nalezli v předchozím odstavci.

Stereografické obrazy bodů P, P' jsou podle Věty 18.107 rovné

$$Q = \big(\frac{\alpha}{1 - \gamma}, \frac{\beta}{1 - \gamma}\big), \quad Q' = \big(\frac{\alpha'}{1 - \gamma'}, \frac{\beta'}{1 - \gamma'}\big)$$

Vektory spojující střed O s Q, Q' jsou po řadě

$$\big(\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'} + \frac{\alpha}{1 - \gamma}, \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} + \frac{\beta}{1 - \gamma}\big) = \frac{1}{(\gamma - \gamma')(1 - \gamma)}(\alpha - \alpha' + \alpha'\gamma - \alpha\gamma', \beta - \beta' + \beta'\gamma - \beta\gamma')$$

a

$$\big(\frac{\alpha - \alpha'}{\gamma - \gamma'} + \frac{\alpha'}{1 - \gamma'}, \frac{\beta - \beta'}{\gamma - \gamma'} + \frac{\beta'}{1 - \gamma'}\big) = \frac{1}{(\gamma - \gamma')(1 - \gamma')}(\alpha - \alpha' + \alpha'\gamma - \alpha\gamma', \beta - \beta' + \beta'\gamma - \beta\gamma').$$

Druhý z těchto vektorů dostaneme z prvního vynásobením reálným číslem

$$\frac{1 - \gamma}{1 - \gamma'} > 0.$$

Body Q a Q' tak leží na téže polopřímce vycházející z bodu O.

Součin vzdáleností $|OQ| \cdot |OQ'|$ se potom rovná

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(\gamma-\gamma')^2(1-\gamma)(1-\gamma')}[(\alpha-\alpha'+\alpha'\gamma-\alpha\gamma')^2+(\beta-\beta'+\beta'\gamma-\beta\gamma')^2] \\
&=\frac{1}{(\gamma-\gamma')^2(1-\gamma)(1-\gamma')}\{[\alpha(1-\gamma')-\alpha'(1-\gamma)]^2+[\beta(1-\gamma')-\beta'(1-\gamma)]^2\} \\
&=\frac{1}{(\gamma-\gamma')^2}\big((\alpha^2+\beta^2)\frac{1-\gamma'}{1-\gamma}+(\alpha'^2+\beta'^2)\frac{1-\gamma}{1-\gamma'}-2\alpha\alpha'-2\beta\beta'\big) \\
&=\frac{1}{(\gamma-\gamma')^2}\big((1-\gamma^2)\frac{1-\gamma'}{1-\gamma}+(1-\gamma'^2)\frac{1-\gamma}{1-\gamma'}-2\alpha\alpha'-2\beta\beta'\big) \\
&=\frac{2-2\alpha\alpha'-2\beta\beta'-2\gamma\gamma'}{(\gamma-\gamma')^2}=\rho^2.
\end{aligned}$$

Bod Q se tedy opravdu zobrazí do bodu Q' kruhovou inverzí určenou kružnicí, kterou jsme našli v prvním odstavci důkazu.

Zbývá případ $\gamma = \gamma'$. Stereografické obrazy bodů P, P' jsou v tomto případě

$$Q = \big(\frac{\alpha}{1-\gamma}, \frac{\beta}{1-\gamma}\big), \quad Q' = \big(\frac{\alpha'}{1-\gamma}, \frac{\beta'}{1-\gamma}\big).$$

Snadno si spočítáte, že přímka tvořená body (u, v), které mají stejnou vzdálenost od bodů Q, Q', má rovnici

$$(\alpha-\alpha')u + (\beta-\beta')v = 0.$$

$\square$

V důkazu jsme ignorovali případ, kdy P nebo P' je severní pól N, tj. kdy $\gamma = 1$ nebo $\gamma' = 1$. Snazší je případ, kdy $P = P' = N$. V tom případě jsou jejich stereografické obrazy $Q = Q' = \infty$ a bod ∞ se zobrazí sám do sebe libovolnou osovou souměrností rozšířené roviny. Je-li $P = N$ a $P' \neq N$, plyne z $\gamma = 1$, že $\alpha = \beta = 0$ a v tom případě se stereografická projekce bodu P' rovná

$$\big(\frac{\alpha'}{1-\gamma'}, \frac{\beta'}{1-\gamma'}\big) = O.$$

Stereografická projekce bodu P, tj. bod $Q = \infty$, se tedy zobrazí do středu kružnice určující kruhovou inverzi. Také v tomto případě tak jednoduché reflexi sféry $\mathcal{S}_2$ odpovídá po stereografické projekci inverze rozšířené roviny.