16. Vlastní čísla, vlastní vektory

V této části budeme podrobněji zkoumat strukturu lineárních zobrazení $A : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, kde $\mathcal{V}$ je vektorový prostor konečné dimenze n nad nějakým tělesem $\mathbf{T}$. Stručněji budeme říkat, že A je *lineární operátor* na prostoru $\mathcal{V}$.

Je-li $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ nějaká báze prostoru $\mathcal{V}$, pak můžeme vyjádřit hodnotu zobrazení A v libovolném prvku $\mathbf{z}_j$ této báze pomocí téže báze:

$$A(\mathbf{z}_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{z}_i.$$

Čtvercovou matici

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

nazýváme *matice operátoru* A vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$. Tato definice je v souladu s definicí matice lineárního zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ a $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, kterou jsme uvedli v části o maticích.

Nejprve si vyjasníme, jak se změní matice operátoru, přejdeme-li od jedné báze k druhé. Buď tedy $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ nějaká jiná báze prostoru $\mathcal{V}$. Vyjádříme vektory $\mathbf{y}_i$ pomocí báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$:

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{z}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Matice $C = (c_{ij})$ je tedy matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$.

Označme P lineární operátor na prostoru $\mathcal{V}$ definovaný předpisem

$$P(\mathbf{z}_i) = \mathbf{y}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Lineární zobrazení P zobrazuje bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ na bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ a podle Věty 5.24 je proto izomorfizmus. Jeho matice vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ se rovná $C = (c_{ij})$. Protože je lineární zobrazení P vzájemně jednoznačné, existuje také inverzní zobrazení $P^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$. Pro inverzní zobrazení platí $P^{-1}(\mathbf{y}_i) = \mathbf{z}_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$. Matice operátoru P vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ se rovná C^{-1}. Vyplývá to například z Věty 6.34. Označíme-li totiž D matici operátoru P^{-1} vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, pak podle Věty 6.34 je matice složeného operátoru $P^{-1}P$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ rovna součinu matic DC. Operátor $P^{-1}P$ je ale identický operátor na prostoru $\mathcal{V}$, a proto jeho matice vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ je rovna jednotkové matici I_n. Proto $DC = I_n$ a D se tedy rovná matici C^{-1} inverzní k matici C.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Chceme-li najít matici operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, musíme najít skaláry b_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$, pro které platí

$$A(\mathbf{y}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{y}_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Protože platí $\mathbf{y}_j = P(\mathbf{z}_j)$ pro každé $j = 1, \ldots, n$, dosazením do předchozích rovností dostaneme

$$AP(\mathbf{z}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}P(\mathbf{z}_i), \quad j = 1, \ldots, n,$$

neboli

$$AP(\mathbf{z}_j) = P(\sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{z}_i), \quad j = 1, \ldots, n$$

a proto

$$P^{-1}AP(\mathbf{z}_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{z}_i, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Matice $N = (b_{ij})$ operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ se tedy rovná matici operátoru $P^{-1}AP$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$. Tuto matici už umíme spočítat. Matice inverzního operátoru P^{-1} vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ se rovná inverzní matici C^{-1} a podle Věty 6.34 je matice zobrazení $P^{-1}AP$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ rovna součinu matic $C^{-1}MC$. Dokázali jsme tak následující větu.

Věta 16.89. Buď A lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$, $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ báze prostoru $\mathcal{V}$ a M matice operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$. Je-li $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ jiná báze $\mathcal{V}$ a

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{z}_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

vyjádření prvků nové báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ pomocí původní báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$, označíme $C = (c_{ij})$ matici přechodu. Potom se matice operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ rovná součinu matic $C^{-1}MC$. $\square$

Nyní bychom mohli využít Větu 16.89 podobně, jako jsme použili Větu 12.61 k nalezení báze, ve které je možné danou bilineární formu vyjádřit pomocí diagonální matice. Protože libovolnou regulární matici C řádu n můžeme vyjádřit jako součin elementárních matic a protože inverzní matice k libovolné elementární matici je opět elementární matice, můžeme postupovat stejně jako při důkazu Věty 12.64. Můžete si to zkusit sami. Nepodaří se vám ale převést tímto způsobem libovolnou matici na matici diagonální. To lze pouze v případě matic velmi speciálních lineárních operátorů. Nalezení báze, vzhledem ke které má nějaký lineární operátor poměrně jednoduchou matici, je záležitost složitější než analogická úloha pro bilineární formy. Začneme následující definicí.

Definice 16.45. Buď A lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. Podprostor $\mathcal{P}$ prostoru $\mathcal{V}$ se nazývá *invariantní podprostor* operátoru A, platí-li $A(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{P}$.

Každý lineární operátor A na prostoru $\mathcal{V}$ má dva triviální invariantní podprostory - nulový podprostor $\{\mathbf{0}\}$ a celý podprostor $\mathcal{V}$. Méně triviální příklad invariantních podprostorů nám poskytne libovolná rotace A kolem nějaké osy v třídimenzionálním euklidovském prostoru. Takový operátor A má dva invariantní podprostory - osu rotace, což je podprostor dimenze 1, a rovinu kolmou k ose rotace a procházející počátkem, což je invariantní podprostor dimenze 2. Existují také lineární operátory, které nemají žádný netriviální invariantní podprostor. Příkladem můžeme být rotace kolem počátku v euklidovském prostoru dimenze 2. Jinými důležitými příklady invariantních podprostorů operátoru A jsou jádro $Ker(A)$ a obraz $Im(A)$ tohoto operátoru. Ty jsou ale oba triviální, pokud je operátor A vzájemně jednoznačný.

Existence nějakého invariantního podprostoru operátoru A na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nám umožňuje najít bázi, ve které má operátor A o něco jednodušší matici. Je-li $\mathcal{P}$ netriviální invariantní podprostor operátoru A, zvolíme nějakou bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_k$ podprostoru $\mathcal{P}$ a doplníme ji do báze $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ celého prostoru $\mathcal{V}$. Protože je $\mathcal{P}$ netriviální podprostor $\mathcal{V}$, platí $0 < k < n$. Potom platí $A(\mathbf{z}_j) \in \mathcal{P}$ pro každé $j = 1, \dots, k$, neboli

$$A(\mathbf{z}_j) = \sum_{i=1}^{k} a_{ij}\mathbf{z}_i, \quad j = 1, \dots, k.$$

Matice (a_{ij}) operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ má potom tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1k+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{kk+1} & \dots & a_{kn} \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Jinak řečeno, $a_{ij} = 0$ pro každé $i > k$ a $j = 1, \dots, k$. Pokud by se nám navíc bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ podařilo zvolit tak, aby také podprostor $\mathcal{Q}$ generovaný vektory $\mathbf{z}_{k+1}, \dots, \mathbf{z}_n$ byl invariantní vzhledem k operátoru A, platilo by pro každé $j = k+1, \dots, n$, že

$$A(\mathbf{z}_j) = \sum_{i=k+1}^{n} a_{ij}\mathbf{z}_i.$$

Matice operátoru $A = (a_{ij})$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ by potom měla *blokově diagonální tvar*:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{k+1k+1} & \dots & a_{k+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nk+1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Významnou roli hrají invariantní podprostory dimenze 1. Je-li $\mathcal{P}$ invariantní podprostor dimenze 1 a $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ libovolný prvek $\mathcal{P}$, pak také $A(\mathbf{x}) \in \mathcal{P}$, neboli $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ pro nějaký skalár $\lambda \in \mathbf{T}$. Je-li naopak $A(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y}$ pro nějaký nenulový vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{V}$, pak je jednodimenzionální podprostor $\mathcal{P}$ generovaný vektorem $\mathbf{y}$ invariantní podprostor operátoru A. Tyto úvahy vedou k následující definici.

Definice 16.46. Nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ se nazývá *vlastní vektor* lineárního operátoru A na prostoru $\mathcal{V}$, jestliže existuje skalár $\lambda \in \mathbf{T}$ takový, že $A(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$. Skalár λ se pak nazývá *vlastní číslo* operátoru A příslušné vlastnímu vektoru $\mathbf{x}$.

K důkazu existence aspoň jednoho vlastního čísla a vektoru pro libovolný lineárního operátor na komplexním vektorovém prostoru budemem potřebovat následující důležitou větu, kterou si uvedeme bez důkazu.

Věta 16.90. Základní věta algebry. Každý nekonstantní polynom s komplexními koeficienty má aspoň jeden komplexní kořen.

Věta 16.91. Každý lineární operátor A na nenulovém vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad **komplexními čísly** má aspoň jeden vlastní vektor.

Důkaz. V prostoru $\mathcal{V}$ zvolíme nějakou bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$. Hledaný vlastní vektor $\mathbf{x}$ operátoru A lze potom v bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ vyjádřit ve tvaru

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{z}_1 + \cdots + c_n\mathbf{z}_n,$$

kde $c_1, \dots, c_n$ jsou vhodná komplexní čísla. Je-li (a_{ij}) matice operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, pak má vektor $A(\mathbf{x})$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ souřadnice

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n, \\
b_2 &= a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n, \\
&\vdots \\
b_n &= a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n.
\end{aligned}$$

Souřadnice $(b_1, \dots, b_n)$ jsou ale souřadnice vektoru $\lambda\mathbf{x}$ v bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, tedy $b_i = \lambda c_i$ pro každé $i = 1, \dots, n$, neboli

$$\begin{aligned}
a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= \lambda c_1, \\
a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= \lambda c_2, \\
&\vdots \\
a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nn}c_n &= \lambda c_n.
\end{aligned}$$

Tuto soustavu n lineárních rovnic o n neznámých s komplexními koeficienty si přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned}
(a_{11} - \lambda)c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= 0, \\
a_{21}c_1 + (a_{22} - \lambda)c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= 0, \\
&\vdots \\
a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)c_n &= 0.
\end{aligned}$$

K důkazu věty potřebujeme ukázat, že existuje komplexní číslo λ, pro které má předchozí soustava netriviální řešení. Podmínkou pro existenci netriviálního řešení je rovnost

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Podle definice determinantu je výraz na levé straně poslední rovnosti mnohočlen stupně n v proměnné λ. Pro neznámé vlastní číslo operátoru A tak dostáváme algebraickou rovnici stupně n s komplexními koeficienty. Podle základní věty algebry má tato rovnice aspoň jeden komplexní kořen λ_0. Pro toto komplexní číslo λ_0 má potom naše soustava lineárních rovnic nějaké řešení $c_1^0, c_2^0, \dots, c_n^0$, kde aspoň jedno z čísel c_i^0 je různé od 0. Vektor

$$\mathbf{x} = c_1^0\mathbf{z}_1 + c_2^0\mathbf{z}_2 + \dots + c_n^0\mathbf{z}_n$$

je potom nenulový a platí $A(\mathbf{x}) = \lambda_0\mathbf{x}$. $\square$

Všimněte si, že předchozí důkaz by fungoval beze změny, pokud bychom uvažovali operátor A pouze na nějakém nenulovém invariantním podprostoru $\mathcal{P}$ prostoru $\mathcal{V}$. Platí proto

Důsledek 16.92. Je-li A lineární operátor na prostoru $\mathcal{V}$ nad komplexními čísly, pak v každém nenulovém invariantním podprostoru operátoru A existuje vlastní vektor. $\square$

Definice 16.47. Je-li $M = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n, pak rovnici

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

nazýváme *charakteristická rovnice* matice M a mnohočlen na levé straně charakteristické rovnice nazýváme *charakteristický mnohočlen (polynom)* matice M.

Zajímavým cvičením je vyjádřit koeficienty charakteristického polynomu matice M pomocí prvků matice M. Jak vypadá koeficient u λ^n? Jak vypadá koeficient u λ^{n-1}? Jak vypadá absolutní člen charakteristického polynomu? Pokud najdete koeficient u λ^{n-2}, získáte představu, jak asi mohou vypadat ostatní koeficienty.

Při důkazu Věty 16.91 jsme dokázali, že vlastní čísla operátoru A jsou kořeny charakteristického polynomu matice M operátoru A vzhledem k nějaké bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ a také naopak, že každý kořen charakteristického polynomu matice M je vlastním číslem operátoru A. Má-li operátor A dostatek vlastních vektorů, můžeme jej ve vhodně zvolené bázi vyjádřit pomocí diagonální matice.

Problém spočívá v tom, že charakteristický polynom matice M operátoru A nemusí mít v případě obecného tělesa $\mathbf{T}$ žádný kořen. Základní věta algebry nám umožňuje dokázat, že v prostorech nad komplexními čísly má každý lineární operátor aspoň jedno vlastní číslo a aspoň jeden vlastní vektor. Víme-li, že každý polynom lichého stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen, můžeme důkaz Věty 16.91 použít k důkazu následující věty.

Věta 16.93. Každý lineární operátor na **reálném** prostoru $\mathcal{V}$ **liché dimenze** má aspoň jeden vlastní vektor.

Věta 16.94. Má-li lineární operátor A na n-dimenzionálním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ n lineárně nezávislých vlastních vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, pak je matice operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ diagonální.

Důkaz. Důkaz je zřejmý. Pro každé $j = 1, \ldots, n$ existuje skalár λ_j takový, že platí $A(\mathbf{x}_j) = \lambda_j \mathbf{x}_j$. V j-tém sloupci matice M operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ se tedy může objevit nejvýše jeden nenulový prvek, a to λ_j na místě (j, j). Matice M je tedy diagonální, na j-tém místě diagonály se vyskytuje vlastní číslo λ_j příslušné vlastnímu vektoru $\mathbf{x}_j$. Poznamenejme ještě, že λ_j se může rovnat 0. $\square$

Poslední věta vlastně charakterizuje *diagonalizovatelné* operátory, tj. operátory, které mohou být vyjádřené diagonální maticí ve vhodně zvolené bázi. Existuje-li totiž báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$, ve které je lineární operátor A na $\mathcal{V}$ vyjádřený diagonální maticí (a_{ij}), platí pro každé $j = 1, \ldots, n$, že $A(\mathbf{z}_j) = a_{jj}\mathbf{z}_j$. Libovolný prvek $\mathbf{z}_j$ báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ je tedy vlastní vektor operátoru A a diagonální prvek a_{jj} je vlastní číslo příslušné vektoru $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_j$. Diagonalizovatelné jsou tedy právě ty operátory na n-dimenzionálním prostoru $\mathcal{V}$, které mají n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

Věta 16.95. Buď A lineární operátor na prostoru $\mathcal{V}$, $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ báze prostoru $\mathcal{V}$ a M matice operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$. Je-li $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ jiná báze prostoru $\mathcal{V}$ a N matice operátoru A vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, pak se charakteristický polynom matice M rovná charakteristickému polynomu matice N.

Důkaz. Z Věty 16.89 víme, že $N = C^{-1}MC$, kde C je matice přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, tj.

$$\mathbf{y}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{z}_i$$

pro $j = 1, \ldots, n$. Potom platí

$$\begin{aligned}\det(N - \lambda I) &= \det(C^{-1}MC - \lambda C^{-1}IC) = \det(C^{-1}MC - C^{-1}(\lambda I)C) = \\ &= \det(C^{-1}(M - \lambda I)C) = \det C^{-1} \det(M - \lambda I) \det C = \det(M - \lambda I).\end{aligned}$$

V posledním výpočtu I označuje jednotkovou matici řádu n. $\square$

Poslední věta nám umožňuje mluvit o *charakteristickém polynomu* lineárního operátoru A. Je to charakteristický polynom matice operátoru A vzhledem k libovolné bázi prostoru $\mathcal{V}$.

Věta 16.96. Jsou-li $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ vlastní vektory lineárního operátoru A a jim odpovídající vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ jsou různá, pak jsou vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ lineárně nezávislé.

Má-li charakteristický polynom operátoru A n vzájemně různých kořenů, pak existuje báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ prostoru $\mathcal{V}$ vzhledem ke které je operátor A vyjádřený diagonální maticí.

Důkaz. Případ $k = 1$ je zřejmý. Dále budeme postupovat indukcí podle k. Je-li $k > 1$, předpokládejme, že tvrzení věty platí pro libovolných $k - 1$ vlastních vektorů. Protože je $k > 1$, je aspoň jedno z vlastních čísel nenulové. Můžeme předpokládat, že je to číslo λ_k.

Předpokládejme, že pro nějaké skaláry $a_1, \ldots, a_k$ platí

$$a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k = \mathbf{0}.$$

Aplikujeme-li operátor A na obě strany poslední rovnosti, dostaneme

$$A(a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_k\mathbf{e}_k) = \mathbf{0},$$

neboli

$$a_1\lambda_1\mathbf{e}_1 + a_2\lambda_2\mathbf{e}_2 + \cdots + a_k\lambda_l\mathbf{e}_k = \mathbf{0}.$$

Skalárem λ_k vynásobíme první rovnost v tomto odstavci a dostaneme

$$\lambda_k a_1\mathbf{e}_1 + \lambda_k a_2\mathbf{e}_2 + \cdots + \lambda_k a_k\mathbf{e}_k = \mathbf{0}.$$

Odečtením poslední rovnosti od předposlední dostaneme

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{e}_1 + a_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{e}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

Protože jsou vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}$ lineárně nezávislé, musí platit $a_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, k-1$. Vzhledem k tomu, že $\lambda_i \neq \lambda_k$, plyne odtud $a_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, k-1$. Potom ale $a_k\mathbf{e}_k = \mathbf{0}$ a protože $\mathbf{e}_k \neq \mathbf{0}$, dostáváme také $a_k = 0$. Vektory $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ jsou tedy lineárně nezávislé.

Druhá část tvrzení plyne ihned z té první. $\square$

Duální lineární zobrazení. Dříve než si ukážeme, že každý lineární operátor na komplexním vektorovém prostoru lze ve vhodně zvolené bázi vyjádřit pomocí trojúhelníkové matice, uvedeme si pár poznatků o duálních lineárních zobrazeních. V části o dualitě a reflexivitě jsem si ukázali, jak ke každému vektorovému prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ sestrojit duální prostor $\mathcal{V}'$. Jeho prvky tvoří lineární funkcionály $\mathbf{y}' : \mathcal{V} \to \mathcal{T}^1$ s přirozeně definovaným sčítáním a násobením prvky tělesa $\mathbf{T}$. Ve Větě 13.68 jsme ukázali, že je-li $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ báze prostoru $\mathcal{V}$, pak lineární funkcionály $\mathbf{y}'_1, \mathbf{y}'_2, \ldots, \mathbf{y}'_m$ definované hodnotami

$$\mathbf{y}'_i(\mathbf{y}_j) = \delta_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, m,$$

na vektorech báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ tvoří bázi duálního prostoru $\mathcal{V}'$. Tato báze se nazývá duální báze k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$.

Lemma 16.97. Buď $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení. Pro každý lineární funkcionál $\mathbf{y}' \in \mathcal{V}'$ definujeme zobrazení $A^*(\mathbf{y}') : \mathcal{U} \to \mathcal{T}^1$ předpisem

$$A^*(\mathbf{y}')(\mathbf{x}) = \mathbf{y}'(A(\mathbf{x})).$$

Zobrazení A^* je lineární zobrazení.

Důkaz. Zobrazení $A^*(\mathbf{y}') = \mathbf{y}' \circ A$ je lineární, neboť je složením dvou lineárních zobrazení. Jsou-li $\mathbf{y}', \mathbf{z}'$ dva funkcionály na $\mathcal{V}$ a $a, b \in \mathbf{T}$, pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ platí

$$\begin{aligned} A^*(a\mathbf{y}' + b\mathbf{z}')(\mathbf{x}) = (a\mathbf{y}' + b\mathbf{z}')(A(\mathbf{x})) = a\mathbf{y}'(A(\mathbf{x})) + b\mathbf{z}'(A(\mathbf{x})) = \\ = (aA^*(\mathbf{y}') + bA^*(\mathbf{z}'))(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

Definice 16.48. Je-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, pak se zobrazení $A^* : \mathcal{V}' \to \mathcal{U}'$ definované předpisem

$$A^*(\mathbf{y}')(\mathbf{x}) = \mathbf{y}'(A(\mathbf{x}))$$

nazývá *duální zobrazení* ke zobrazení A.

Příklad. Dokažte si sami následující jednoduché vlastnosti duálního zobrazení:
a) $(A + B)' = A' + B'$,
b) $(aA)' = aA'$,
c) $(AB)' = B'A'$,
d) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$,
e) $0' = 0$, kde $0 : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ je zobrazení, které přiřazuje každému $\mathbf{x} \in \mathcal{U}$ nulový vektor $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$,
f) je-li $I : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ identický operátor, pak I' je identický operátor na duálním prostoru $\mathcal{U}'$.

Věta 16.98. Buď $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ nějaká báze prostoru $\mathcal{U}$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ báze prostoru $\mathcal{V}$ a $M = (a_{ij})$ matice zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. Potom matice duálního zobrazení $A^* : \mathcal{V}' \to \mathcal{U}'$ vzhledem k duálním bázím $\mathbf{y}'_1, \ldots, \mathbf{y}'_m$ a $\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n$ se rovná transponované matici M'.

Důkaz. Připomeňme, že $M = (a_{ij})$ je matice lineárního zobrazení A vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$, jestliže platí

$$A(\mathbf{x}_k) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\mathbf{y}_i$$

pro každé $k = 1, \ldots, n$. Spočítáme, čemu se rovnají funkcionály $A^*(\mathbf{y}'_j)$ pro $j = 1, \ldots, n$. Pro každý vektor $\mathbf{x}_k$ báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ platí

$$A^*(\mathbf{y}'_j)(\mathbf{x}_k) = \mathbf{y}'_j(A(\mathbf{x}_k)) = \mathbf{y}'_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ik}\mathbf{y}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\mathbf{y}'_j(\mathbf{y}_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik}\delta_{ji} = a_{jk}$$

Hodnota lineárního funkcionálu $A^*(\mathbf{y}'_j)$ v bodě $\mathbf{x}_k$ je tedy rovná hodnotě funkcionálu

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{x}'_i$$

v tomtéž bodě $\mathbf{x}_k$, neboť pro každé $k = 1, \ldots, n$ platí

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{x}'_i(\mathbf{x}_k) = a_{jk}.$$

Funkcionály $A^*(\mathbf{y}'_j)$ a $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{x}'_i$ tak nabývají stejných hodnot na všech prvcích báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a podle Věty 20 proto platí rovnost

$$A^*(\mathbf{y}'_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}\mathbf{x}'_i.$$

Matice duálního lineárního zobrazení A^* vzhledem k bázím $\mathbf{y}'_1, \ldots, \mathbf{y}'_m$ a $\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_n$ má tedy na místě (i, j) prvek a_{ji}, je to tedy matice M' transponovaná k matici M. $\square$

Duálního operátoru A^* k operátoru A na prostoru $\mathcal{V}$ využijeme k důkazu následující věty.

Věta 16.99. Pro libovolný lineární operátor A na n-dimenzionálním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem komplexních čísel existují invariantní podprostory $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_n$ takové, že dimenze podprostoru $\mathcal{P}_j$ se rovná j pro každé $j = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Pro $n = 0$ nebo $n = 1$ není co dokazovat. Použijeme indukci podle dimenze n prostoru $\mathcal{V}$ a budeme předpokládat, že tvrzení věty platí pro každý lineární operátor na komplexním vektorovém prostoru dimenze menší než $n \geq 2$. Duální operátor A^* na duálním prostoru $\mathcal{V}'$ má podle Věty 16.91 aspoň jeden vlastní vektor $\mathbf{x}' \in \mathcal{V}'$. Protože je $\mathbf{x}' \neq \mathbf{0}$, platí dim $Im(\mathbf{x}') = 1$ a tedy dim $Ker(\mathbf{x}') = n - 1$. Označme $Ker(\mathbf{x}') = \mathcal{P}_{n-1}$. Potom pro každý vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{P}_{n-1}$ platí

$$\mathbf{x}'(A(\mathbf{y})) = A^*(\mathbf{x}')(\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}')(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x}'(\mathbf{y}) = 0,$$

a tedy $A(\mathbf{y}) \in Ker(\mathbf{x}') = \mathcal{P}_{n-1}$. Podprostor $\mathcal{P}_{n-1}$ je tedy invariantní podprostor operátoru A a má dimenzi $n-1$. Pro zúžení operátoru A na podprostor $\mathcal{P}_{n-1}$ můžeme použít indukční předpoklad a podle něho tedy existují podprostory

$$\mathcal{P}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{P}_{n-2} \subset \mathcal{P}_{n-1},$$

které jsou všechny invariantní podprostory operátoru A a dimenze $\mathcal{P}_j$ se rovná j pro $j = 1, \ldots, n$. $\square$

Poslední věta má zajímavou maticovou interpretaci. Zvolíme nějaký nenulový vektor $\mathbf{x}_1 \in \mathcal{P}_1$. Protože dim $\mathcal{P}_2$ je rovna 2, existuje nenulový vektor $\mathbf{x}_2 \in \mathcal{P}_2$, který je lineárně nezávislý na vektoru $\mathbf{x}_1$. Pokud už máme vybrané vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$, pak v podprostoru $\mathcal{P}_{j+1}$ existuje vektor $\mathbf{x}_{j+1}$, který je lineárně nezávislý na vektorech $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$, protože dimenze podprostoru $\mathcal{P}_{j+1}$ je rovna $j+1$. Indukcí takto vybereme bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ v prostoru

$\mathcal{V}$ takovou, že vektory $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_j$ tvoří bázi v invariantním podprostoru $\mathcal{P}_j$ pro každé $j = 1, \ldots, n$. Platí tedy pro každé $j = 1, \ldots, n$

$$A(\mathbf{x}_j) = \sum_{i=1}^{j} a_{ij} \mathbf{x}_i$$

pro nějaká komplexní čísla a_{ij}. Matice M operátoru A má tedy vzhledem k bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ tvar

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

neboli $a_{ij} = 0$ kdykoliv $i > j$. Takovým maticím říkáme trojúhelníkové matice. Všimněte si, že na hlavní diagonále leží vlastní čísla operátoru A.