15. Determinant

V této části budeme symbolem S_n označovat množinu všech permutací na množině $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Definice 15.43. Buď $M = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n s prvky v tělese $\mathbf{T}$. *Determinant* matice M je prvek

$$|M| = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}.$$

V případě matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

řádu 2 existují pouze dvě permutace v množině S_2, identická permutace a transpozice $(1, 2)$. Identické permutaci odpovídá při výpočtu determinantu matice M podle Definice 15.43 součin $a_{11}a_{22}$ s koeficientem 1, což je znaménko identické permutace. Transpozici $(1, 2)$ odpovídá součin $a_{12}a_{21}$ s koeficientem -1, protože znaménko libovolné transpozice je -1. Platí proto

$$|M| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Je-li $n = 3$, má množina S_3 šest prvků. Obsahuje tři sudé permutace, identitu a trojcykly $(1, 2, 3), (1, 3, 2)$ a tři liché permutace – transpozice $(1, 2), (1, 3)$ a $(2, 3)$. Sudým permutacím odpovídají při výpočtu determinantu matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

podle Definice 15.43 součiny $a_{11}a_{22}a_{33}$ (pro identickou permutaci), $a_{12}a_{23}a_{31}$ (pro trojcyklus $(1, 2, 3)$) a $a_{13}a_{21}a_{32}$ (pro trojcyklus $(1, 3, 2)$), všechny s koeficientem 1. Třem lichým permutacím odpovídají postupně součiny $a_{12}a_{21}a_{33}$ (pro transpozici $(1, 2)$), $a_{13}a_{22}a_{31}$ (pro transpozici $(1, 3)$) a $a_{11}a_{23}a_{32}$ (pro transpozici $(2, 3)$). Všechny tři součiny odpovídající transpozicím mají koeficient -1. Determinant matice $M = (a_{ij})$ řádu 3 se tedy rovná

$$|M| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Ukážeme si ještě, jak vypočítat determinant trojúhelníkové matice. Čtvercová matice $M = (a_{ij})$ řádu n se nazývá *trojúhelníková*, jestliže $a_{ij} = 0$ pro všechny prvky takové, že $i > j$. Trojúhelníková matice M má tedy tvar

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

Nechť je nyní $p \in S_n$ nějaká neidentická permutace. Existuje tedy prvek $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, $p(i) \neq i$. Je-li $p(i) < i$, platí $a_{ip(i)} = 0$. Jestliže $p(i) > i$, pak v cyklu permutace p obsahujícím prvek i musí existovat jiný prvek j, pro který musí platit $p(j) < j$, neboť čísla v tomto cyklu nemohou stále růst. Součin odpovídající permutaci p tak i v tomto případě obsahuje prvek $a_{jp(j)} = 0$. Pro každou neidentickou permutaci $p \in S_n$ proto platí

$$a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} = 0,$$

protože se v něm vyskytne prvek ležící pod hlavní diagonálou M. Pro determinant matice M proto platí

$$|M| = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn},$$

rovná se tedy součinu prvků na hlavní diagonále M.

V následujících třech větách si ukážeme, jak se změní hodnota determinantu matice M, uděláme-li na M nějakou elementární řádkovou transformaci.

Věta 15.79. Dostaneme-li matici $N = (b_{ij})$ z matice $M = (a_{ij})$ vynásobením k-tého řádku čtvercové matice M prvkem c, pak platí $|N| = c \cdot |M|$.

Důkaz. Toto tvrzení je jednoduché. Je-li $i \neq k$, platí $b_{ij} = a_{ij}$, a pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $b_{kj} = c \cdot a_{kj}$. Pro každou permutaci $p \in S_n$ platí proto

$$b_{1p(1)}b_{2p(2)} \cdots b_{np(n)} = c \cdot a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)},$$

neboť v součinu $b_{1p(1)}b_{2p(2)} \cdots b_{np(n)}$ se vyskytuje právě jeden prvek z k-tého řádku matice N. Dostáváme tak

$$|N| = \sum_{p \in S_n} b_{1p(1)}b_{2p(2)} \cdots b_{np(n)} = \sum_{p \in S_n} c \cdot a_{1p(1)}a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} = c \cdot |M|.$$

□

Věta 15.80. Dostaneme-li matici $N = (b_{ij})$ ze čtvercové matice $M = (a_{ij})$ prohozením k-tého a l-tého řádku, platí $|N| = -|M|$.

Důkaz. Pro prvky matice N platí, že $b_{ij} = a_{ij}$ pro každé $i \neq k, l$, a dále $b_{kj} = a_{lj}$ a $b_{lj} = a_{kj}$ pro každé $j = 1, 2, \ldots, n$. Pro libovolnou permutaci $p \in S_n$ tak platí

$$b_{1p(1)}b_{2p(2)} \cdots b_{np(n)} = b_{kp(k)}b_{lp(l)} \prod_{i \neq k,l} b_{ip(i)} = a_{lp(k)}a_{kp(l)} \prod_{i \neq k,l} a_{ip(i)}.$$

Označme si t transpozici (k, l), která prohazuje čísla k a l. Pro složení $q = p \circ t$ potom platí $q(i) = p(t(i)) = p(i)$, je-li $i \neq k, l$, a dále $q(k) = p(t(k)) = p(l)$ a $q(l) = p(t(l)) = p(k)$. Poslední součin v předchozí formuli tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$a_{lp(k)}a_{kp(l)} \prod_{i \neq k,l} a_{ip(i)} = a_{lq(l)}a_{kq(k)} \prod_{i \neq k,l} a_{iq(i)} = \prod_{i=1}^{n} a_{iq(i)}.$$

Podle Věty 14.77a) platí $\mathrm{sgn}(q) = \mathrm{sgn}(p \circ t) = -\mathrm{sgn}(p)$ a tedy

$$\mathrm{sgn}(p) b_{1p(1)} b_{2p(2)} \cdots b_{np(n)} = \mathrm{sgn}(p) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)} = -\mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)}.$$

Sečteme-li poslední rovnosti pro všechny permutace $p \in S_n$, dostaneme

$$|N| = \sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(p) b_{1p(1)} b_{2p(2)} \cdots b_{np(n)} = \sum_{p \in S_n} -\mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)}.$$

Zbývá si vyjasnit, že poslední součet je roven $-|M|$. Jak se liší suma

$$\sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)},$$

kde pro každé $p \in S_n$ sčítáme součin $\mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)}$ kde $q = p \circ t$, od sumy

$$\sum_{q \in S_n} \mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)} = |M|?$$

V první z obou sum sčítáme součiny $\mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)}$ pro ty permutace $q \in S_n$, které lze vyjádřit ve tvaru $q = p \circ t$, kde $p \in S_n$, každý součin tolikrát, kolik různých takových vyjádření dané permutace q existuje. Protože pro každou permutaci $q \in S_n$ platí $q = q \circ (t \circ t) = (q \circ t) \circ t$, každý součin $\mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)}$ se v první ze sum vyskytne aspoň jednou (stačí zvolit $p = q \circ t$). Jsou-li permutace $p_1, p_2 \in S_n$ různé, pak se snadno přesvědčíme, že také $p_1 \circ t \neq p_2 \circ t$. Každý součin $\mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)}$ se tak v první z obou sum vyskytne právě jednou, stejně jako ve druhé z nich. Oba součty se liší pouze pořadím sčítanců, platí tedy skutečně

$$\sum_{p \in S_n} \mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)} = \sum_{q \in S_n} \mathrm{sgn}(q) a_{1q(1)} a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)} = |M|$$

a tedy $|N| = -|M|$. $\square$

Věta 15.81. Jsou-li ve čtvercové matici $P = (c_{ij})$ dva řádky stejné, pak $|P| = 0$.

Důkaz. Nechť se tedy v matici P rovná k-tý a l-tý řádek, tj. platí $c_{kj} = c_{lj}$ pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Označme si t transpozici (k, l). Pro každou permutaci $p \in S_n$ uvažujme také permutaci $q = p \circ t$. Platí tedy $q(i) = p(t(i)) = p(i)$ pro $i \neq k, l$, $q(k) = p(t(k)) = p(l)$ a $q(l) = p(t(l)) = p(k)$. Vzhledem k tomu, že $c_{kp(k)} = c_{lp(k)}$ a $c_{lp(l)} = c_{kp(l)}$, a rovněž $\mathrm{sgn}(q) = \mathrm{sgn}(p \circ t) = -\mathrm{sgn}(p)$, dostáváme

$$\begin{aligned} \mathrm{sgn}(p) c_{1p(1} \cdots c_{np(n)} &= \mathrm{sgn}(p) c_{kp(k)} c_{lp(l)} \prod_{i \neq k,l} c_{ip(i)} = \mathrm{sgn}(p) c_{lp(k)} c_{kp(l)} \prod_{i \neq k,l} c_{ip(i)} = \\ &= -\mathrm{sgn}(q) c_{lq(l)} c_{kq(k)} \prod_{i \neq k,l} c_{iq(i)} = \\ &= -\mathrm{sgn}(q) c_{1q(1)} \cdots c_{nq(n)}. \end{aligned}$$

Platí tedy pro každé $p \in S_n$, že $\operatorname{sgn}(p)c_{1p(1)} \cdots c_{np(n)} + \operatorname{sgn}(q)c_{1q(1)} \cdots c_{nq(n)} = 0$. Množinu S_n můžeme rozložit do tříd rozkladu podle ekvivalence R_t (Věta 14.78). Právě jsme ukázali, že součet dvou členů z definice determinantu matice P odpovídajících jedné třídě rozkladu podle ekvivalence R_t se rovná 0. Protože jsou různé třídy rozkladu podle R_t dizjunktní, platí také

$$|P| = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) c_{1p(1)} c_{2p(2)} \cdots c_{np(n)} = 0.$$

□

Všimněte si ještě, že v důkazu Věty 15.81 bychom mohli postupovat rychleji, pokud bychom předpokládali, že charakteristika tělesa **T**, ze kterého jsou prvky matice P, je různá od 2. Matice P, ve které se k-tý řádek rovná l-tému řádku, se nezmění, prohodíme-li k-tý a l-tý řádek. Pro takto získanou matici Q platí podle Věty 15.80 $|Q| = -|P|$. Protože ale $Q = P$, platí $|Q| = |P|$, tedy $|P| = -|P|$, neboli $2|P| = 0$. Je-li charakteristika **T** různá od 2, plyne z toho, že $|P| = 0$.

Věta 15.82. Dostaneme-li matici $N = (b_{ij})$ ze čtvercové matice $M = (a_{ij})$ přičtením c-násobku l-tého řádku ke k-tému řádku matice M, pak platí $|N| = |M|$.

Důkaz. Tentokrát platí $b_{ij} = a_{ij}$ pro všechny prvky $i \neq k$, a $b_{kj} = a_{kj} + c \cdot a_{lj}$. Pro libovolnou permutaci $p \in S_n$ tak dostáváme, že

$$\begin{aligned} b_{1p(1)} b_{2p(2)} \cdots b_{np(n)} =& b_{kp(k)} \prod_{i \neq k} b_{ip(i)} = (a_{kp(k)} + c \cdot a_{lp(k)}) \prod_{i \neq k} a_{ip(i)} = \\ =& \prod_{i=1}^{n} a_{ip(i)} + c \cdot a_{lp(k)} \prod_{i \neq k} a_{ip(i)}. \end{aligned}$$

Sečteme-li tyto rovnosti pro všechny permutace $p \in S_n$ (po vynásobení $\operatorname{sgn}(p)$), dostaneme

$$\begin{aligned} |N| =& \operatorname{sgn}(p) \sum_{p \in S_n} b_{1p(1)} b_{2p(2)} \cdots b_{np(n)} = \\ =& \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)} + c \cdot \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sgn}(p) a_{lp(k)} \prod_{i \neq k} a_{ip(i)}) = \\ =& |M| + c \cdot \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sgn}(p) a_{lp(k)} \prod_{i \neq k} a_{ip(i)}). \end{aligned}$$

K dokončení důkazu Věty 15.82 stačí ukázat, že

$$\sum_{p \in S_n} (\operatorname{sgn}(p) a_{lp(k)} \prod_{i \neq k} a_{ip(i)}) = 0.$$

V součinu

$$a_{lp(k)} \prod_{i \neq k} a_{ip(i)}$$

sice násobíme n prvků z matice M, z každého sloupce jeden, ale žádný z nich neleží v k-tém řádku, zato z l-tého řádku násobíme dva prvky: $a_{lp(k)}$ a $a_{lp(l)}$. Stejné součiny se vyskytují při výpočtu determinantu matice $P = (c_{ij})$, kterou dostaneme z M tak, že nahradíme k-tý řádek matice M l-tým řádkem téže matice. Tedy $c_{ij} = a_{ij}$ pro $i \neq k$ a $c_{kj} = a_{lj}$ pro všechna čísla $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pro každé $i \neq k$ tedy platí $c_{ip(i)} = a_{ip(i)}$ a rovněž $c_{kp(k)} = a_{lp(k)}$. Pro libovolnou permutaci $p \in S_n$ tak platí

$$c_{1p(1)}c_{2p(2)}\cdots c_{np(n)} = a_{lp(k)} \prod_{i \neq k} a_{ip(i)}$$

a tedy také

$$|P| = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) c_{1p(1)}c_{2p(2)}\cdots c_{np(n)} = \sum_{p \in S_n} (\operatorname{sgn}(p) a_{lp(k)} \prod_{i \neq k} a_{ip(i)} = 0).$$

K dokončení důkazu tak stačí ukázat, že $|P| = 0$. Všimněte si, že v matici P se k-tý řádek rovná l-tému řádku. Podle Věty 15.81 tedy skutečně platí $|P| = 0$.

Věta 15.83. Je-li M čtvercová matice řádu n, pak platí $|M| = |M'|$.

Důkaz. Jsou-li $p, q \in S_n$ libovolné dvě permutace, pak součiny $a_{1p(1)}a_{2p(2)}\cdots a_{np(n)}$ a $a_{q(1)p\circ q(1)}a_{q(2)p\circ q(2)}\cdots a_{q(n)p\circ q(n)}$ jsou stejné, liší se pouze pořadím činitelů, neboť v obou případech jsou ze stejných řádků matice M vybrány stejné prvky.

Zvolme $q = p^{-1}$. Potom podle předchozího odstavce platí

$$a_{1p(1)}a_{2p(2)}\cdots a_{np(n)} = a_{p^{-1}(1)1}a_{p^{-1}(2)2}\cdots a_{p^{-1}(n)n}.$$

Rovněž platí $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(p^{-1})$, protože obě permutace p a p^{-1} mají cykly stejných délek. Proto

$$\begin{aligned}|M| &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{1p(1)}a_{2p(2)}\cdots a_{np(n)} = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) a_{p^{-1}(1)1}a_{p^{-1}(2)2}\cdots a_{p^{-1}(n)n} = \\ &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p^{-1}) b_{1p^{-1}(1)}b_{2p^{-1}(2)}\cdots b_{np^{-1}(n)}.\end{aligned}$$

Poslední suma se ale rovná $|M'|$, protože inverzní permutace k permutaci p je určena jednoznačně. V součtu definujícím determinant $|M'|$ a v posledním součtu předchozího výpočtu tedy sčítáme stejné součiny, pouze v jiném pořadí. $\square$

Definice 15.44. Buď $M = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n. Pro libovolná dvě čísla $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme M_{ij} matici, kterou dostaneme z matice M vypuštěním i-tého řádku a j-tého sloupce. Číslo

$$c_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

se nazývá *kofaktor* prvku a_{ij} v matici M. Matice (c_{ij}) se nazývá *kofaktorová matice* matice M. Matice transponovaná ke kofaktorové matici (c_{ij}) se nazývá *adjungovaná matice* k matici M a označuje se adj$M$.

Věta 15.84. Pro každou čtvercovou matici $M = (a_{ij})$ a libovolná dvě čísla $k, l \in \{1, 2, \ldots n\}$ platí

$$|M| = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} c_{kj}$$

a

$$|M| = \sum_{i=1}^{n} a_{il} c_{il}.$$

Důkaz. Každý člen v součtu definujícím determinant $|M|$ podle Definice 15.43 obsahuje právě jeden činitel z k-tého řádku. Sečteme-li všechny součiny obsahující prvek a_{kj}a tento prvek vytkneme, a uděláme-li to pro každé $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, dostaneme

$$|A| = a_{k1}d_{k1} + a_{k2}d_{k2} + \cdots + a_{kn}d_{kn}.$$

K dokončení důkazu první formule Věty 15.84 nám stačí dokázat, že platí

$$d_{kj} = c_{kj} = (-1)^{k+j}|M_{kj}|,$$

kde M_{kj} je matice, kterou dostaneme z M vynecháním k-tého řádku a j-tého sloupce. Odmyslíme-li si koeficienty ± 1, vyskytují se v d_{kj} všechny možné součiny $n-1$ prvků matice M, které leží v různých řádcích matice M s výjimkou k-tého řádku, a v různých sloupcích matice M s výjimkou j-tého sloupce. Jsou to ty samé součiny, jaké se vyskytují v součtu definujícím determinant matice M_{kj}. Zbývá pouze ukázat, že se ty samé součiny n činitelů vyskytují v obou součtech se stejným znaménkem.

Jako první se budeme zabývat případem $k = j = 1$. Máme dokázat, že platí $d_{11} = |M_{11}|$. Permutace $p \in S_n$, pro které platí, že výraz

$$\mathrm{sgn}(p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)}$$

obsahuje prvek a_{11}, musí splňovat podmínku $p(1) = 1$. Prvek d_{11} se tedy rovná součtu

$$\sum_{p} \mathrm{sgn}(p) a_{2p(2)} \cdots a_{np(n)},$$

kde sčítáme přes všechny permutace $p \in S_n$, pro které platí $p(1) = 1$.

Počítáme-li determinant matice M_{11} podle Definice 15.43, dostáváme

$$|M_{11}| = \sum_{q} \mathrm{sgn}(q) a_{2q(2)} \cdots a_{nq(n)},$$

kde tentokrát sčítáme přes všechny permutace q na množině $\{2, 3, \ldots, n\}$.

Každý sčítanec v poslední sumě definovaný permutací p na množině $\{2, 3, \ldots, n\}$ odpovídá v součtu určujícím prvek d_{11} sčítanci definovaným permutací $p \in S_n$, kterou dostaneme z q rozšířením na celou množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ tak, že položíme $p(1) = 1$. Permutace p a q tak mají stejné cykly až na cyklus permutace p obsahující jediný prvek 1. Obě permutace mají proto stejné znaménko (permutace q má sice o jeden cyklus méně než p, působí ale na množině, která má také o jeden prvek méně). Stejné součiny se proto vyskytují jak v součtu definujícím d_{11} tak v součtu definujícím $|M_{11}|$ se stejným znaménkem. Proto platí $d_{11} = M_{11}$.

Případ obecných d_{kj} a $|M_{kj}|$ převedeme na právě dokázaný případ $k = j = 1$. Napřed vyměníme k-tý řádek matice M s řádkem těsně nad ním ($(k-1)$-tým řádkem) a opakujeme to postupně $(k-1)$-krát. Tím přesuneme k-tý řádek matice M na místo prvního řádku a vzájemná poloha zbývajících řádků zůstane beze změny. Potom stejným způsobem vyměníme j-tý sloupec s $(j-1)$-tým sloupcem a opakujeme to opět $(j-1)$-krát. Tím přemístíme j-tý sloupec na místo prvního sloupce a vzájemná poloha zbývajících sloupců se nezmění. Dostaneme tak matici $N = (b_{ij})$, pro kterou platí $b_{11} = a_{kj}$ a podle Vět 15.80 a 15.83 také platí

$$|N| = (-1)^{k-1+j-1}|M| = (-1)^{k+j}|M|.$$

Kromě toho platí, že matice M_{kj} se rovná matici N_{11}.

Podle výše dokázaného tvrzení se součet všech výrazů v součtu definujícím $|N|$ obsahujících prvek $b_{11}(=a_{kj})$ rovná $b_{11}|N_{11}|$ a to se podle definice matice N rovná $a_{kj}|M_{kj}|$. Ze vztahu $|N| = (-1)^{k+j}|M|$ plyne, že vynásobíme-li sumu definující $|N|$ číslem $(-1)^{k+j}$, dostaneme sumu definující $|M|$. Proto sčítanci v součtu $(-1)^{k+j}a_{kj}|M_{kj}|$ jsou také sčítanci v $|M|$. Proto $d_{kj} = (-1)^{k+j}|M_{kj}|$. Tím je dokázáno první z obou tvrzení Věty 15.84.

Druhé tvrzení dostaneme z prvního použitím Věty 15.83. $\square$

Právě dokázaná věta udává metodu výpočtu determinantu, které se říká rozvinutí podle k-tého řádku nebo podle l-tého sloupce. Je to druhá metoda výpočtu determinantu, která plyne z dokázaných vlastností determinantu. První plyne z Vět 15.79, 15.80 a 15.82 a výpočtu determinantu trojúhelníkové matice bezprostředně po Definici 15.43. Tu použijeme také v důkazu následující věty.

Věta 15.85. Matice M je singulární právě když platí $|M| = 0$.

Důkaz. Z Věty 9.40 plyne, že pomocí elementárních transformací můžeme matici M převést do matice N, která splňuje podmínky této věty (odstupňovaná matice). Z Vět 15.79, 15.80 a 15.82 potom plyne, že $|N| = d|M|$ pro nějaký nenulový prvek $d \in \mathbf{T}$.

Je-li matice M singulární, obsahuje matice N nulový řádek, neboť počet nenulových řádků v matici N se rovná hodnosti matice M. Determinant matice s nulovým řádkem se ale rovná 0, proto rovněž $|M| = 0$.

Je-li M regulární matice, má matice N všechny řádky nenulové. V každém z nich je první nenulové číslo rovné 1, tyto jednotky jsou v různých sloupcích matice N a všechny ostatní prvky v těchto sloupcích jsou nulové. Protože je matice N čtvercová (neboť M je čtvercová), je matice N jednotková matice a tedy $|N| = 1$. Proto $|M| = d \neq 0$. $\square$

Věta 15.86. Pro každou čtvercovou matici M platí

$$M \cdot \mathrm{adj}M = \mathrm{adj}M \cdot M = |M| \cdot I,$$

kde I je jednotková matice řádu n. Je-li $|M| \neq 0$, platí

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\mathrm{adj}M.$$

Důkaz. Z Věty 15.84 plyne, že $a_{k1}c_{k1} + a_{k2}c_{k2} + \cdots + a_{kn}c_{kn} = |M|$, kde c_{kj} je kofaktor prvku a_{kj}. Protože adjungovaná matice k matici M je transponovaná matice ke kofaktorové matici M, plyne odtud, že prvky na hlavní diagonále součinu $M \cdot \mathrm{adj}M$ se rovnají $|M|$. Zbývá ukázat, že pro každé $l \neq k$ platí

$$a_{k1}c_{l1} + a_{k2}c_{l2} + \cdots + a_{kn}c_{ln} = 0.$$

Označme N matici, kterou dostaneme z matice M tak, že nahradíme l-tý řádek v matici M jejím k-tým řádkem. Matice N má tedy dva stejné řádky a podle Věty 15.81 platí $|N| = 0$. Počítáme-li $|N|$ pomocí rozvoje podle l-tého řádku, dostaneme výraz na levé straně poslední formule. Tím je dokázáno, že se tento součet rovná $0 = |N|$. Tím je dokázáno, že platí

$$M \cdot \mathrm{adj}M = |M| \cdot I.$$

Podobně se dokáže, že také $\mathrm{adj}M \cdot M = |M| \cdot I$. Odtud ihned plyne uvedené vyjádření inverzní matice M^{-1} k matici M. $\square$

Věta 15.87. Jsou-li M, N dvě čtvercové matice řádu n, pak platí

$$|NM| = |N||M|.$$

Důkaz. Nejdříve si dokážeme, že pro každou elementární matici E platí $|EM| = |E||M|$. Je-li $E = E_k(c)$, platí $|E_k(c) = c$, například proto, že $E_k(c)$ je trojúhelníková matice (viz výpočet determinantu trojúhelníkové matice následující po Definici 11.43). Podle Věty 15.79 potom platí $|E_k(c)M| = c|M| = |E_k(c)||M|$. Je-li $E = E_{kl}$, dostaneme matici E_{kl} z jednotkové matice I přehozením k-tého a l-tého řádku. Podle Věty 15.80 potom platí $|E_{kl}| = -|I| = -1$, neboť determinant jednotkové matice se rovná 1. Potom opět podle Věty 15.80 platí $|E_{kl}M| = -|M| = |E_{kl}||M|$. A je-li $E = E_{kl}(c)$, dostaneme $E_{kl}(c)$ z jednotkové matice I přičtením c-násobku l-tého řádku ke k-tému řádku. Podle Věty 15.82 potom platí $|E_{kl}(c)| = |I| = 1$. Potom podle stejné věty $|E_{kl}(c)||M| = |M| = |E_{kl}(c)||M|$.

Je-li nyní N regulární matice, lze ji podle Věty 10.45b) vyjádřit jako součin elementárních matic $N = E_m E_{m-1} \cdots E_1$. Podle předchozího odstavce platí

$$|N| = ||E_m E_{m-1} \cdots E_1| = |E_m||E_{m-1}| \cdots |E_1|$$

a rovněž

$$|NM| = |E_m E_{m-1} \cdots E_1 M| = |E_m||E_{m-1}| \cdots |E_1||M| = |N||M|.$$

Je-li N singulární matice, platí $|N| = 0$ podle Věty 15.85. Sloupce v součinu matic NM jsou obsažené ve sloupcovém prostoru matice N. Protože je matice N singulární, je její (sloupcová) hodnost menší než n. Proto je i (sloupcová) hodnost součinu NM menší než n, součin NM je tedy také singulární a podle Věty 15.85 proto platí $|NM| = 0$. Tedy i v případě singulární matice N platí

$$|NM| = 0 = 0 \cdot |M| = |N||M|.$$

□

Věta 15.88. Cramerovo pravidlo. Je-li

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n
\end{aligned}$$

soustava n lineárních rovnic o n neznámých, označme $M = (a_{ij})$ její matici. Pro každé $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ označme $M(m)$ matici, kterou dostaneme z M tak, že v ní nahradíme m-tý sloupec sloupcem pravých stran této soustavy. Je-li matice soustavy M regulární, potom platí

$$x_m = \frac{|M(m)|}{|M|}.$$

Důkaz. K důkazu stačí použít vyjádření inverzní matice k matici M z Věty 15.86. Soustavu si napřed přepíšeme v maticovém tvaru

$$MX = K,$$

kde K je sloupcový vektor pravých stran soustavy a X je sloupcový vektor neznámých. Poslední rovnost vynásobíme zleva maticí

$$M^{-1} = \frac{1}{|M|}\mathrm{adj}M.$$

Dostaneme tak

$$X = \frac{1}{|M|}(\mathrm{adj}M)K.$$

Neznámou x_m dostaneme srovnáním m-tých řádků v poslední rovnosti. Platí proto

$$x_m = \frac{c_{1m}k_1 + c_{2m}k_2 + \cdots + c_{nm}k_m}{|M|}.$$

Vypočítáme-li determinant $|M(m)|$ rozvinutím podle m-tého sloupce, dostaneme výraz v čitateli posledního zlomku. Proto

$$x_m = \frac{|M(m)|}{|M|}.$$

□