13. Lineární formy a dualita

Podíváme se ještě jednou jiným způsobem na homogenní soustavu m lineárních rovnic o n neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

s koeficienty z tělesa $\mathbf{T}$. Víme už, že všechna řešení $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ této soustavy tvoří podprostor aritmetického prostoru $\mathcal{T}^n$, který má dimenzi $n - h$, kde h je hodnost matice soustavy (Věta 7.32).

Každá lineární rovnice

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$

o n neznámých s koeficienty z $\mathbf{T}$ určuje zobrazení $\mathbf{f}$ z prostoru $\mathcal{T}^n$ do prostoru $\mathcal{T}^1 = \mathbf{T}$, které vektoru $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ přiřazuje skalár

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

Snadno si ověříte, že zobrazení $\mathbf{f}$ je lineární. Dimenzi jádra $Ker(\mathbf{f})$ zjistíme pomocí dimenze obrazu $Im(\mathbf{f})$. Dimenze obrazu $Im(\mathbf{f})$ je buď 0, je-li $\mathbf{f}$ konstantní, nebo 1, pokud $\mathbf{f}$ konstantní není. Tedy $Ker(\mathbf{f})$ má dimenzi buď n, nebo $n - 1$.

Původní soustava z prvního odstavce tak určuje m lineárních zobrazení $\mathbf{f}_i : \mathcal{T}^n \to \mathbf{T}$, kde

$$\mathbf{f}_i((x_1, \ldots, x_n)) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \quad i = 1, \ldots, m.$$

Prostor všech řešení této soustavy se rovná průniku

$$\bigcap_{i=1}^{m} Ker(\mathbf{f}_i)$$

jader zobrazení $\mathbf{f}_i$. Pokud pro některé z těchto zobrazení $\mathbf{f}_i$ platí

$$Ker(\mathbf{f}_i) \supseteq \bigcap_{k \neq i} Ker(\mathbf{f}_k),$$

můžeme příslušnou rovnici z naší soustavy vypustit a prostor všech řešení redukované soustavy bude stejný, jako prostor všech řešení původní soustavy.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

V této části se budeme zabývat lineárními zobrazeními $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathbf{T}$, kde $\mathcal{V}$ je libovolný vektorový prostor nad $\mathbf{T}$.

Definice 13.36. Je-li $\mathcal{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathcal{T}^1 = \mathbf{T}$ aritmetický vektorový prostor dimenze 1 nad tělesem $\mathbf{T}$, pak *lineárním formou* (funkcionálem) na prostoru $\mathcal{V}$ nazýváme lineární zobrazení $\mathbf{f} : \mathcal{V} \to \mathcal{T}^1$.

Věta 13.67. Buď $\mathcal{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Na množině $\mathcal{V}'$ všech lineárních forem na $\mathcal{V}$ definujeme operace sčítání a násobení prvky tělesa $\mathbf{T}$ následovně:

$$(\mathbf{f} + \mathbf{g})(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x}),$$

a

$$(a\mathbf{f})(\mathbf{x}) = a\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

Potom je množina $\mathcal{V}'$ spolu s takto definovanými operacemi vektorový prostor.

Důkaz. Důkaz spočívá v mechanickém ověření axiomů vektorového prostoru. □

Definice 13.37. Vektorový prostor $\mathcal{V}'$ popsaný v předchozí větě nazýváme *duální prostor* k prostoru $\mathcal{V}$.

Stojí za pozornost, že každý nenulový prvek $\mathbf{x}$ n-dimenzionálního prostoru $\mathcal{V}$ generuje podprostor dimenze 1 prostoru $\mathcal{V}$, přičemž dva nenulové vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ určují stejný podprostor, jsou-li lineárně závislé. Podobně každý nenulový prvek $\mathbf{f}$ duálního prostoru $\mathcal{V}'$ určuje podprostor dimenze $n-1$ prostoru $\mathcal{V}$, přičemž dva nenulové prvky $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{V}'$ určují stejný podprostor právě když jsou lineárně závislé. Lineární formy na prostoru $\mathcal{V}$ jsou tedy k podprostorům dimenze $n-1$ ve stejném vztahu, v jakém jsou prvky prostoru $\mathcal{V}$ k podprostorům dimenze 1.

Z Věty 6.25 plyne, že lineární forma $\mathbf{f}$ na n-dimenzionálním prostoru $\mathcal{V}$ je jednoznačně určena hodnotami $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = a_i$, kde $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je nějaká báze prostoru $\mathcal{V}$. Odtud si snadno odvodíte, že každý $n-1$-dimenzionální podprostor $\mathcal{V}$ je jádrem nějaké lineární formy na $\mathcal{V}$. Ve skutečnosti má duální prostor $\mathcal{V}'$ stejnou dimenzi jako prostor $\mathcal{V}$.

Věta 13.68. Buď $\mathcal{V}$ vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ nějaká báze prostoru $\mathcal{V}$. Potom lineární formy $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ na prostoru $\mathcal{V}$ definované předpisem

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{je-li } i = j, \\ 0, & \text{je-li } i \neq j \end{cases}$$

pro $i = 1, \ldots, n$ tvoří bázi prostoru $\mathcal{V}'$. Prostor $\mathcal{V}'$ má tedy rovněž dimenzi n. Lineární formy $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ jsou bází $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ určené jednoznačně.

Důkaz. Nejprve ověříme, že jsou lineární formy $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ lineárně nezávislé. Jsou-li $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$ libovolné skaláry takové, že

$$a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0},$$

pak platí pro každé $j = 1, \dots, n$

$$0 = (a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n)(\mathbf{x}_j) = a_1\mathbf{e}_1(\mathbf{x}_j) + \cdots + a_n\mathbf{e}_n(\mathbf{x}_j) = a_1\delta_{1j} + \cdots + a_n\delta_{nj} = a_j.$$

Zbývá dokázat, že každou lineární formu $\mathbf{f} \in \mathcal{V}'$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci forem $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Je-li

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{x}_j$$

libovolný prvek prostoru $\mathcal{V}$ a $\mathbf{f}(\mathbf{x}_j) = a_j$ pro $j = 1, \dots, n$, pak

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j a_j.$$

Naproti tomu

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i(\sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\delta_{ij} = c_i,$$

a proto

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{f}(\mathbf{x}_j) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{e}_j(\mathbf{x})a_j = (\sum_{j=1}^{n} a_j\mathbf{e}_j)(\mathbf{x}).$$

Lineární formy $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ tedy tvoří bázi duálního prostoru $\mathcal{V}'$, který má proto dimenzi n. $\square$

Definice 13.38. Báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ prostoru $\mathcal{V}'$ se nazývá *duální báze* k bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ prostoru $\mathcal{V}$.

V závěrečné části důkazu poslední věty jsme nejenom ukázali, že formy $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ tvoří bázi duálního prostoru $\mathcal{V}'$, ale našli jsme také souřadnice libovolné lineární formy $\mathbf{f} \in \mathcal{V}'$ vzhledem k této bázi. Ukázali jsme, že $\mathbf{f} = \sum_i a_i\mathbf{e}_i$, kde $a_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$, tj. souřadnice formy $\mathbf{f}$ vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ jsou $(\mathbf{f}(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{f}(\mathbf{x}_n))$.

Ke každé bázi $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ tedy existuje duální báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ v duálním prostoru $\mathcal{V}'$. Můžeme naopak ke každé bázi $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ prostoru $\mathcal{V}'$ najít vhodnou bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ prostoru $\mathcal{V}$ takovou, že báze $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ je duální bází k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$? Zdá se to být pravděpodobné, překvapivé ale je, že to vyplývá bezprostředně z již dokázané Věty 13.68, pokud použijeme vlastnost konečně-dimenzionálních vektorových prostorů, které se říká *reflexivita*. Pro její snazší pochopení si hodnotu lineárních formy $\mathbf{f}$ v bodě $\mathbf{x}$ budeme místo $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ zapisovat ve tvaru

$$[\mathbf{f}, \mathbf{x}],$$

ve kterém jsou symboly pro $\mathbf{f}$ a $\mathbf{x}$ v rovnocenném postavení.

Každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ určuje zobrazení duálního prostoru $\mathcal{V}'$ do tělesa skalárů $\mathbf{T}$, které každému prvku prostoru $\mathcal{V}'$, tj. každé lineární formě $\mathbf{f}$ na prostoru $\mathcal{V}$, přiřadí její hodnotu v bodě $\mathbf{x}$, tj. skalár $[\mathbf{f}, \mathbf{x}]$. Vzhledem k definici sčítání a násobení skalárem v duálním prostoru $\mathcal{V}'$ platí

$$[a\mathbf{f} + b\mathbf{g}, \mathbf{x}] = a[\mathbf{f}, \mathbf{x}] + b[\mathbf{g}, \mathbf{x}]$$

pro libovolné dva skaláry $a, b \in \mathbf{T}$ a libovolné dvě formy $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathcal{V}'$. Naše zobrazení je tedy lineární, neboli je to lineární forma na prostoru $\mathcal{V}'$. Označme si tuto lineární formu $E(\mathbf{x})$.

Věta 13.69. Zobrazení $E : \mathcal{V} \to \mathcal{V}''$, které každému prvku $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ přiřazuje lineární formu $E(\mathbf{x}) \in \mathcal{V}''$, je izomorfizmus vektorových prostorů $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}''$.

Důkaz. Ukážeme, že zobrazení E je lineární. Jsou-li $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ libovolné dva vektory z $\mathcal{V}$ a a, b dva skaláry, potom pro každý prvek $\mathbf{f}$ duálního prostoru $\mathcal{V}'$ platí

$$E(a\mathbf{x}+b\mathbf{y})(\mathbf{f}) = [\mathbf{f}, a\mathbf{x}+b\mathbf{y}] = a[\mathbf{f}, \mathbf{x}]+b[\mathbf{f}, \mathbf{y}] = aE(\mathbf{x})(\mathbf{f})+bE(\mathbf{y})(\mathbf{f}) = (aE(\mathbf{x})+bE(\mathbf{y}))(\mathbf{f}),$$

neboli

$$E(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) = aE(\mathbf{x}) + bE(\mathbf{y}).$$

Dále ukážeme, že zobrazení $E : \mathcal{V} \to \mathcal{V}'$ je prosté. Je-li $\mathbf{x} \in Ker(E)$, platí $E(\mathbf{x})(\mathbf{f}) = [\mathbf{f}, \mathbf{x}] = 0$ pro každou lineární formu $\mathbf{f} \in \mathcal{V}'$. Je-li $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, existuje lineární forma $\mathbf{f} \in \mathcal{V}'$ taková, že $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \neq 0$. Jediný prvek $Ker(E)$ je tedy nulový vektor $\mathbf{0} \in \mathcal{V}$.

Vzhledem k tomu, že všechny tři prostory $\mathcal{V}, \mathcal{V}', \mathcal{V}''$ mají stejnou dimenzi n, je zobrazení E na celý prostor $\mathcal{V}''$ a tedy je to izomorfizmus. □

Všimněte si, že pro důkaz, že jsou prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}''$ izomorfní, jsme nepotřebovali volit báze v obou prostorech, jako jsme to museli udělat v důkazu toho, že libovolné dva prostory dimenze n jsou izomorfní. Říkáme, že izomorfizmus E je *kanonický izomorfizmus*. Skutečnost, že prostory $\mathcal{V}$ a $\mathcal{V}''$ jsou kanonicky izomorfní, pokud je dimenze $\mathcal{V}$ konečná, se také vyjadřuje slovy, že konečně-dimenzionální vektorové prostory jsou *reflexivní*.

Důsledek 13.70. Pro každou bázi $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ prostoru $\mathcal{V}'$ duálního k prostoru $\mathcal{V}$ existuje právě jedna báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ prostoru $\mathcal{V}$ taková, že platí

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{y}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{je-li } i = j, \\ 0, & \text{je-li } i \neq j \end{cases}$$

pro každé dva indexy $i, j = 1, \ldots, n$.

Důkaz. K bázi $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ prostoru $\mathcal{V}'$ existuje podle Věty 13.68 právě jedna duální báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ prostoru $\mathcal{V}''$. Podle Věty 13.69 existují jednoznačně určené vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ v prostoru $\mathcal{V}$ takové, že $E(\mathbf{y}_j) = \mathbf{z}_j$ pro každé $j = 1, \ldots, n$. Tyto vektory tvoří bázi $\mathcal{V}$, protože zobrazení E je izomorfizmus. Potom platí

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{y}_j) = E(\mathbf{y}_j)(\mathbf{f}_i) = \mathbf{z}_j(\mathbf{f}_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{je-li } i = j, \\ 0, & \text{je-li } i \neq j. \end{cases}$$

□

Dále si ukážeme souvislost mezi lineární závislostí forem na prostoru $\mathcal{V}$ a jejich jádry.

Věta 13.71. Jsou-li $\mathbf{f}, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ lineární formy na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$, pak $\mathbf{f}$ je lineárně závislá na formách $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ právě když

$$Ker(\mathbf{f}) \supseteq \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\mathbf{f}_i).$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\mathbf{f}$ lineárně závisí na formách $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$. Existují tedy skaláry $a_1, \dots, a_k$ takové, že $\mathbf{f} = a_1\mathbf{f}_1 + \cdots a_k\mathbf{f}_k$. Je-li $\mathbf{x} \in \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\mathbf{f}_i)$, platí $\mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = 0$ pro $i = 1, \dots, k$. Tedy také $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 0$, neboli $\mathbf{x} \in Ker(\mathbf{f})$.

Nechť naopak

$$Ker(\mathbf{f}) \supseteq \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\mathbf{f}_i).$$

Pokud pro nějakou lineární formu $\mathbf{f}_l$, $l = 1, \dots, k$ platí

$$Ker(\mathbf{f}_l) \supseteq \bigcap_{i \neq l}^{k} Ker(\mathbf{f}_i),$$

platí také

$$Ker(\mathbf{f}) \supseteq \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\mathbf{f}_i) = \bigcap_{i \neq l} Ker(\mathbf{f}_i).$$

Stačí potom dokázat, že $\mathbf{f}$ lineárně závisí na formách $\mathbf{f}_i$, $i \neq l$. Tímto způsobem můžeme ze seznamu $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ postupně vyškrtat všechny lineární formy, které nijak nepřispívají k velikosti průniku jader.

Můžeme tedy od samého počátku předpokládat, že lineární formy $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ splňují podmínku

$$\bigcap_{i \neq l} Ker(\mathbf{f}_i) \neq \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\mathbf{f}_i),$$

neboli, že pro každé $l = 1, 2, \dots, k$ jádro $Ker(\mathbf{f}_l)$ neobsahuje průnik

$$\bigcap_{i \neq l} Ker(\mathbf{f}_i)$$

jader zbývajících forem.

Z prvního odstavce důkazu pak plyne, že formy $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k$ jsou lineárně nezávislé. Doplníme je tedy do báze $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_k, \mathbf{f}_{k+1}, \dots, \mathbf{f}_n$ prostoru $\mathcal{V}'$. Podle Důsledku 13.71 existuje báze $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ prostoru $\mathcal{V}$ taková, že

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{x}_j) = \delta_{ij}.$$

Vektory $\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ leží v jádru každé z forem $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$, platí tedy

$$\mathbf{x}_j \in \bigcap_{i=1}^{k} Ker(\mathbf{f}_i) \subseteq Ker(\mathbf{f})$$

pro každé $j = k+1, \ldots, n$.

Označme $\mathbf{f}(\mathbf{x}_i) = a_i$ pro $i = 1, \ldots, k$. Pro každé takové i potom platí, že

$$(\sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{f}_j)(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{f}_j(\mathbf{x}_i) = \sum_{j=1}^{k} a_j \delta_{ij} = a_i = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i).$$

Protože všechny ostatní vektory $\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ leží v jádrech všech forem $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_k$ a $\mathbf{f}$, platí

$$(\sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{f}_j)(\mathbf{x}_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_i)$$

pro libovolné $i = 1, \ldots, n$. Protože každé lineární zobrazení je jednoznačně určené svými hodnotami na prvcích nějaké báze, platí

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{f}_j.$$

$\square$