12. Bilineární a kvadratické formy

Jakkoliv skalární součin odpovídá našim běžným představám o délce a úhlech, existují důležité oblasti matematiky a fyziky, ve kterých se "vzdálenosti" a "úhly" měří jinak. Typickým příkladem je Minkowského geometrie, která tvoří matematický základ speciální teorie relativity. Body Minkowského geometrie tvoří čtveřice (nazývané události) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, t)$ reálných čísel. "Úhel" mezi vektory $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, t)$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, u)$ se v této geometrii měří pomocí "skalárního součinu"

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - tu$$

a "délka" vektoru $\mathbf{x}$ je potom $||\mathbf{x}||^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - t^2$. "Skalární součin" jsem dal v tomto případě do úvozovek, neboť Minkowského geometrie nesplňuje požadavky Definice 11.28. Společné rysy euklidovské geometrie, Minkowského geometrie a řady dalších jsou zachyceny pomocí pojmu bilineární forma.

Definice 12.32. Je-li $\mathcal{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, pak funkce $w : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbf{T}$ se nazývá *bilineární forma* (bilineární funkcionál), jestliže platí

$$w(a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = a_1 w(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + a_2 w(\mathbf{x}_2, \mathbf{y})$$

a

$$w(\mathbf{y}, a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2) = a_1(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1) + a_2(\mathbf{y}, \mathbf{x}_2)$$

pro každé vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ a každé dva skaláry $a_1, a_2 \in \mathbf{T}$. Platí-li navíc $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$, nazývá se w *symetrická bilineární forma*.

Věta 12.60. Buď $\mathcal{V}$ vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ nějaká báze prostoru $\mathcal{V}$. Potom pro každou čtvercovou matici $M = (d_{ij})$ řádu n s prvky v tělese $\mathbf{T}$ existuje právě jedna bilineární forma w na prostoru $\mathcal{V}$ taková, že platí

$$w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) = d_{ij}$$

pro libovolné dva indexy $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Důkaz. Jsou-li $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{z}_i$ a $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{z}_j$ libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ vyjádřené vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$, pak z definice bilineární formy plyne

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\sum_{i=1}^n b_i \mathbf{z}_i, \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{z}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i c_j w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i c_j d_{ij}.$$

Odtud plyne jednoznačnost bilineární formy w, pokud existuje. Existenci dokážeme tak, že vezmeme začátek a konec předchozího výpočtu za definici funkce $w : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathbf{T}$ a

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX ověříme, že takto definovaná funkce splňuje požadavky Definice 12.32. Formální ověření si můžete udělat sami. □

Každou čtvercovou matici řádu n s prvky z tělesa $\mathbf{T}$ si tedy můžeme představit jako matici nějaké bilineární formy na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$. Stačí k tomu pouze zvolit nějakou bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ prostoru $\mathcal{V}$. Jedna a ta samá matice bude při různých volbách báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ popisovat jinou bilineární formu na $\mathcal{V}$. Stejně tak různé matice mohou popisovat stejnou bilineární formu vzhledem k různým bázím prostoru $\mathcal{V}$. V následující větě si ukážeme, jak se změní matice bilineární formy w vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$, přejdeme-li od báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$. Nejdříve ale jednoduchá definice.

Definice 12.33. Je-li $M = (a_{ij})$ čtvercová matice rádu n, pak matice $M' = (a_{ji})$ se nazývá *matice transponovaná* k matici M.

Věta 12.61. Buď $\mathcal{V}$ vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$, $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ nějaká jeho báze a w bilineární forma na $\mathcal{V}$. Označme $M = (w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j))$ matici bilineární formy w vyjádřenou vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$. Buď $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ nějaká jiná báze prostoru $\mathcal{V}$. Buď

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_1 &= c_{11}\mathbf{z}_1 + c_{21}\mathbf{z}_2 + \cdots + c_{n1}\mathbf{z}_n \\
\mathbf{y}_2 &= c_{12}\mathbf{z}_1 + c_{22}\mathbf{z}_2 + \cdots + c_{n2n}\mathbf{z}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{y}_n &= c_{1n}\mathbf{z}_1 + c_{2n}\mathbf{z}_2 + \cdots + c_{nn}\mathbf{z}_n
\end{aligned}$$

vyjádření vektorů nové báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ pomocí původní báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$. Označme $C = (c_{kl})$ matici přechodu od báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$. Potom je matice $N = (w(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j))$ bilineární formy w vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ rovna

$$N = C'\,M\,C,$$

kde C' označuje matici transponovanou k C.

Důkaz. Přes složitost formulace věty je důkaz jednoduchý. Spočítáme, čemu se rovná $w(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j)$:

$$\begin{aligned}
w(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) &= w(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}\mathbf{z}_k, \sum_{l=1}^{n} c_{lj}\mathbf{z}_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} c_{ki} w(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_l) c_{lj} \\
&= \sum_{k=1}^{n} c_{ki} \left(\sum_{l=1}^{n} w(\mathbf{z}_k, \mathbf{z}_l) c_{lj} \right).
\end{aligned}$$

Výraz ve velké závorce označuje prvek na místě (k, j) v součinu matic $M\,C$. Označme si jej d_{kj}. Dále

$$w(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ki} d_{kj}.$$

Prvek c_{ki} je roven prvku na místě (i,k) v transponované matici C'. Proto se $w(\mathbf{y}_i,\mathbf{y}_j)$ rovná prvku na místě (i,j) v součinu $C'\,(M\,C) = C'\,M\,C$. $\square$

V další části tohoto tématu se budeme zabývat pouze *symetrickými* bilineárními formami, tj. bilineárními formami, pro které platí $w(\mathbf{x},\mathbf{y}) = w(\mathbf{y},\mathbf{x})$ pro každé dva vektory $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathcal{V}$. Ukážeme si, že pro každou symetrickou bilineární formu w na $\mathcal{V}$ existuje báze, ve které je tato forma vyjádřená pomocí diagonální matice. K tomu musíme předpokládat, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, které má charakteristiku různou od 2.

Definice 12.34. Buď w bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$. *Kvadratická forma* na prostoru $\mathcal{V}$ určená bilineární formou w je funkce $w(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Kvadratická forma $w(\mathbf{x},\mathbf{x})$ na prostoru $\mathcal{V}$ nad reálnými čísly se nazývá pozitivně definitní, platí-li $w(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$, přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, a nazývá se *pozitivně semidefinitní*, platí-li $w(\mathbf{x},\mathbf{x}) \geq 0$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$.

Srovnáním s definicí skalárního součinu na reálném vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ vidíme, že skalární součin není nic jiného než symetrická bilineární forma na $\mathcal{V}$, která určuje pozitivně definitní kvadratickou formu na $\mathcal{V}$. V předchozí části jsme ukázali, že v každém reálném vektorovém (tj. euklidově) prostoru, na kterém je definován skalární součin, můžeme najít ortonormální bázi a vzhledem k této bázi má skalární součin velmi jednoduché vyjádření. V této části přednášky si tento výsledek zobecníme na libovolné symetrické bilineární formy. Napřed ale pár poznámek o významu charakteristiky tělesa $\mathbf{T}$.

Je-li $\mathcal{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, které má charakteristiku různou od 2, pak každou symetrickou bilineární formu $w(\mathbf{x},\mathbf{y})$ na prostoru $\mathcal{V}$ lze zrekonstruovat z příslušné kvadratické formy $w(\mathbf{x},\mathbf{x})$. Je-li charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ různá od 2, jsou symetrické bilineární formy a kvadratické formy dva různé pohledy na jeden a ten samý matematický pojem. Má-li těleso $\mathbf{T}$ charakteristiku 2, je teorie bilineárních a kvadratických forem složitější. V této části přednášky budeme proto dále předpokládat, že $\mathcal{V}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$, které má charakteristiku různou od 2.

Poznámka 12.62. Buď $\mathcal{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ charakteristiky různé od 2 a $w(\mathbf{x},\mathbf{y})$ symetrická bilineární forma na prostoru $\mathcal{V}$. Bilineární forma $w(\mathbf{x},\mathbf{y})$ je jednoznačně určená svojí kvadratickou formou $w(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Důkaz. Z definice bilineární formy ihned plyne, že

$$w(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = w(\mathbf{x},\mathbf{x}) + w(\mathbf{x},\mathbf{y}) + w(\mathbf{y},\mathbf{x}) + w(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Protože je w symetrická bilineární forma, platí $w(\mathbf{x},\mathbf{y}) = w(\mathbf{y},\mathbf{x})$ a tedy $w(\mathbf{x},\mathbf{y})+w(\mathbf{y},\mathbf{x}) = 2w(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Protože předpokládáme, že charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ je různá od 2, platí $2 = 1+1 \neq 0$ a můžeme tedy číslem 2 dělit. Potom dostáváme

$$w(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}[w(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) - w(\mathbf{x},\mathbf{x}) - w(\mathbf{y},\mathbf{y})].$$

$\square$

Nyní si uvedeme dva důkazy, že pro každou symetrickou bilineární funkci w na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$ existuje báze v $\mathcal{V}$, vzhledem ke které je bilineární funkce w vyjádřená diagonální maticí. První důkaz bude založený na Větě 12.61. Napřed si ukážeme jednoduché lemma.

Lemma 12.63. Jsou-li M, N dvě čtvercové matice řádu n, pak platí

$$(MN)' = N'M'.$$

Důkaz. Důkaz je jednoduchý. Označme si $M = (a_{ij})$ a $N = (b_{jk})$, $MN = (c_{ik})$ a $N'M' = (d_{ik})$. Potom

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk},$$

a

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji} a_{kj} = c_{ki}.$$

$\square$

Nyní se vraťme k Větě 12.61. Matice C, která vyjadřuje prvky nové báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ pomocí původní báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$, je regulární. Podle Věty 10.45a) ji lze vyjádřit jako součin elementárních matic: $C = E_1 E_2 \cdots E_k$. Potom se matice bilineární formy w vyjádřená vzhledem k nové bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ rovná

$$N = E_k' \cdots E_2' E_1' M E_1 E_2 \cdots E_k.$$

Abychom pochopili, jak přejít od matice M k matici N, stačí prozkoumat, jak se liší matice M a $E'\, M\, E$, kde E je libovolná elementární matice.

Snadné to je v případě elementárních matic prvního a druhého typu, které jsou symetrické. Je-li $E = E_{ij}$, pak matici ME_{ij} dostaneme z M tak, že přehodíme i-tý a j-tý sloupec. Z této matice pak matici $E_{ij}(ME_{ij})$ dostaneme přehozením i-tého a j-tého řádku. Matici $E_{ij}' M E_{ij}$ tedy dostaneme z matice M tak, že uděláme tutéž elementární transformaci prvního typu na sloupce a řádky matice M. Na pořadí nezáleží, neboť násobení matic je asociativní.

Podobné to je s násobením elementární maticí $E = E_i(c)$ druhého typu. Součin $ME_i(c)$ dostaneme z M vynásobením i-tého sloupce nenulovým skalárem c a matici $E_i'(c)(ME_i(c))$ dostaneme dále vynásobením i-tého řádku matice $ME_i(c)$ tím samým skalárem c. Tedy matici $E_i'(c) M E_i(c)$ dostaneme z M vynásobením i-tého sloupce a i-tého řádku skalárem c. Na pořadí opět nezáleží.

Elementární matice třetího typu $E_{ij}(c)$ má na hlavní diagonále samé jednotky a kromě toho prvek c na místě (i, j). Zbývající prvky matice $E_{ij}(c)$ jsou nulové. Součin $ME_{ij}(c)$ dostaneme z matice M tak, že přičteme k j-tému sloupci matice M c-násobek i-tého sloupce. Transponovaná matice $E_{ij}(c)'$ má kromě jednotek na hlavní diagonále jediný nenulový prvek c na místě (j, i) a rovná se tedy elementární matici $E_{ji}(c)$. Matici $E_{ij}'(c)(ME_{ij}(c)) =$

$E_{ji}(c)(ME_{ij}(c))$ tedy dostaneme z $ME_{ij}(c)$ tak, že k j-tému řádku matice $ME_{ij}(c)$ přičteme c-násobek i-tého řádku. Také v tomto případě dostaneme matici $E'_{ij}(c)(ME_{ij}(c))$ z matice M tak, že uděláme tutéž elementární transformace třetího typu současně na sloupce i řádky matice M. Na pořadí opět nezáleží.

Věta 12.64. Buď w symetrická bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathcal{V}$, $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ nějaká báze prostoru $\mathcal{V}$ a $M = (b_{ij}) = (w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j))$ matice formy w vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$. Potom existuje báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ prostoru $\mathcal{V}$, vzhledem ke které je bilineární forma w vyjádřená maticí $P = (d_{ij})$, která má nenulové prvky pouze na hlavní diagonále. Počet nenulových prvků na hlavní diagonále matice N se rovná hodnosti matice M.

Důkaz. Budeme postupovat tak, že budeme postupně provádět stejné elementární operace současně na řádky a sloupce matice M a převedeme ji tak na diagonální matici. Obsahuje-li matice M pouze nulové prvky, je už v hledaném tvaru. Předpokládejme tedy, že $M \neq 0$. Dále ukážeme, že existuje elementární matice E taková, že matice $E'ME$ obsahuje nějaký nenulový prvek na hlavní diagonále. Není co dokazovat, pokud platí $b_{ii} \neq 0$ pro nějaké $i = 1, \ldots, n$. Je-li $b_{ii} = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, pak existuje v matici M prvek $b_{ij} \neq 0$ pro nějaké indexy $i \neq j$. V matici M přičteme j-tý sloupec k i-tému sloupci a potom přičteme j-tý řádek k i-tému řádku. Vzhledem k tomu, že matice M je symetrická, dostáváme že prvek na místě (i, i) v nové matici se rovná $a_{ii} = b_{ij} + b_{ji} = 2b_{ij}$. To je nenulový prvek tělesa $\mathbf{T}$, protože předpokládáme, že těleso $\mathbf{T}$ má charakteristiku různou od 2. Dostali jsme tak matici, která má na hlavní diagonále nenulový prvek na místě (i, i). Dále zaměníme první a i-tý řádek a první a i-tý sloupec. Tím dostaneme matici, která má nenulový prvek na místě $(1, 1)$.

Dále odečteme vhodný násobek prvního řádku matice od i-tého řádku a stejný násobek prvního sloupce od i-tého sloupce. Tím dostaneme matici, ve které budou všechny prvky v prvním řádku a prvním sloupci nulové s výjimkou prvku na místě $(1, 1)$. Tuto matici si označíme N. Platí tedy

$$N = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}.$$

Matice M_1 je matice řádu $n-1$ a je symetrická. (Abychom se přesvědčili, že je matice M_1 opravdu symetrická, stačí ověřit, že je symetrická matice $E'QE$, kde Q je libovolná symetrická matice a E je elementární matice.)

Nyní opakujeme celý postup s maticí M_1. Dostaneme nakonec matici

$$N_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix},$$

kde M_2 je symetrická matice řádu $n-2$. Po nejvýše n opakováních dostaneme hledanou diagonální matici P. Protože jsme matici P dostali z M pomocí elementárních řádkových a sloupcových úprav, má matice P stejnou hodnost jako matice M. $\square$

Maticový důkaz je poměrně jednoduchý, můžeme z něj dostat ale ještě více. Každá elementární matice, kterou při transformaci matice M do diagonálního tvaru postupem z důkazu Věty 12.64 použijeme, odpovídá nějaké elementární transformaci báze prostoru $\mathcal{V}$. O jakou elementární transformaci jde, poznáme z rovnic ze znění Věty 12.61. Matice

E_{ij} odpovídá prohození i-tého a j-tého vektoru báze, matice $E_i(c)$ odpovídá vynásobení i-tého vektoru báze skalárem c a konečně matice $E_{ij}(c)$ odpovídá přičtení c-násobku i-tého vektoru k j-tému vektoru. Z důkazu Věty 12.64 tak dostáváme také metodu, jak najít bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, vzhledem ke které má daná symetrická bilineární forma diagonální matici.

Ukážeme si ještě druhý důkaz Věty 12.84, který nám dá jinou představu, co vlastně změna báze znamená pro matici, která bilineární (kvadratickou) formu vyjadřuje.

Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor prostoru $\mathcal{V}$ a nechť $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$. Platí tedy

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{z}_i.$$

Potom pro kvadratickou formu $w(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ dostáváme vyjádření

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = w(\sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{z}_i, \sum_{j=1}^{n} v_j \mathbf{z}_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) v_i v_j = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} v_i v_j.$$

Na souřadnice $v_1, \dots, v_n$ vektoru $\mathbf{x}$ se můžeme dívat jako na n nezávislých proměnných, které mohou nabývat libovolnou hodnotu z tělesa $\mathbf{T}$. Kvadratická forma w je při tomto pohledu funkcí n proměnných definovanou na tělese $\mathbf{T}$ a nabývající hodnot v tělese $\mathbf{T}$.

Předpokládejme dále, že kvadratická forma $w(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ není identicky rovná nule, tj. že aspoň jeden prvek $b_{ij} = w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$ je nenulový. Pokud jsou všechny diagonální prvky b_{kk} rovné nule, změníme bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ na bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ tak, že položíme $\mathbf{y}_k = \mathbf{z}_k$ pro $k \neq i, j$, $\mathbf{y}_i = \mathbf{z}_i + \mathbf{z}_j$ a $\mathbf{y}_j = \mathbf{z}_i - \mathbf{z}_j$. Potom platí

$$w(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_i) = w(\mathbf{z}_i + \mathbf{z}_j, \mathbf{z}_i + \mathbf{z}_j) = w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_i) + w(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_j) + 2w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) = 2w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j).$$

Je-li $N = (d_{ij}) = (w(\mathbf{y}_i, \mathbf{y}_j))$ matice bilineární (kvadratické) formy w vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$, pak $d_{ii} \neq 0$ (neboť předpokládáme, že charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ je různá od 2).

Můžeme tedy od počátku předpokládat, že aspoň jeden diagonální prvek b_{ii} matice bilineární (kvadratické) formy w vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ je různý od 0. V případě potřeby ještě zaměníme v bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ vektory $\mathbf{z}_i$ a $\mathbf{z}_1$, abychom docílili toho, že $b_{11} = w(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1) \neq 0$. Kvadratická forma $w(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ má tedy vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$ tvar

$$\begin{aligned} w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= b_{11} v_1^2 + 2b_{12} v_1 v_2 + 2b_{13} v_1 v_3 + \cdots + 2b_{1n} v_1 v_n + \cdots = \\ &= \frac{1}{b_{11}} (b_{11} v_1 + \cdots + b_{1n} v_n)^2 - B, \end{aligned}$$

kde výraz B neobsahuje proměnnou (souřadnici) v_1.

Zavedeme nyní nové proměnné

$$\begin{aligned} u_1 &= b_{11} v_1 + \cdots + b_{1n} v_n, \\ u_2 &= v_2, \\ &\vdots \\ u_n &= v_n. \end{aligned}$$

Tyto nové proměnné $(u_1, \dots, u_n)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k nějaké nové bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Označíme C matici

$$C = (c_{ij}) = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Všimněte si, že matice C nezávisí na souřadnicích $(v_1, \dots, v_n)$ vektoru $\mathbf{x}$. Tato matice je díky předpokladu $b_{11} \neq 0$ regulární. Nové souřadnice $(u_, \dots, u_n)$ dostaneme tedy tak, že původní souřadnice $(v_1, \dots, v_n)$ zapsané sloupcově vynásobíme zleva maticí C. Na základě Věty 9.36 tak můžeme usoudit, že matice C je maticí přechodu od neznámé báze $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ k bázi $\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_n$. Z rovnic

$$\mathbf{z}_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathbf{y}_i, \quad j = 1, \dots, n$$

pak můžeme vypočítat vektory nové báze $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ pomocí inverzní matice C^{-1}. Vzhledem k jednoduchému tvaru matice C to můžeme udělat i přímým výpočtem.

Vzhledem k nové bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ má potom kvadratická forma w vyjádření

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \frac{1}{b_{11}} u_1^2 + \sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}^* u_i u_j.$$

Dále pokračujeme opět indukcí, kvadratická forma $\sum_{i,j=2}^{n} b_{ij}^* u_i u_j$ má $n-1$ proměnných a podle indukčního předpokladu ji můžeme převést do "diagonálního tvaru." Dokázali jsme tak znovu Větu 12.64. Pro zajímavost si ji zformulujeme trochu jiným způsobem.

Věta 12.65. Buď $w(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratická (bilineární) forma na prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a nechť je charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ různá od 2. Potom existuje báze $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ v prostoru $\mathcal{V}$, vzhledem ke které má kvadratická forma $w(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ vyjádření

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \cdots + \lambda_n t_n^2,$$

kde $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$ jsou nějaké prvky $\mathbf{T}$, a $(t_1, \dots, t_n)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. $\square$

Další větou, kterou si dokážeme v této části, je tzv. věta o setrvačnosti kvadratických forem. Je-li w kvadratická forma na n-dimenzionálním vektorovém prostoru $\mathcal{V}$, můžeme podle předchozí Věty 12.65 najít bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ prostoru takovou, že vzhledem k této bázi platí

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 t_1^2 + \lambda_2 t_2^2 + \cdots + \lambda_n t_n^2,$$

kde $(t_1, \dots, t_n)$ jsou souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$. Případným vynásobením vektorů $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ vhodnými konstantami můžeme dosáhnout toho, že $\lambda_i = \pm 1$

nebo $\lambda_i = 0$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Říkáme, že vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ lze kvadratickou formu $w(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ vyjádřit jako součet čtverců.

Věta 12.66. Zákon setrvačnosti pro kvadratické formy. Buď $\mathcal{V}$ reálný vektorový prostor dimenze n a w kvadratická forma na $\mathcal{V}$. Nechť $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ jsou dvě báze prostoru $\mathcal{V}$, vzhledem ke kterým lze formu $w(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ vyjádřit jako součet čtverců. Potom počet kladných koeficientů v obou vyjádřeních je stejný a stejně tak počet záporných koeficientů v obou vyjádřeních je stejný.

Důkaz. Jsou-li $(t_1, \ldots, t_n)$ souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, pak

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 t_1^2 + \cdots + \lambda_k t_k^2 - \lambda_{k+1} t_{k+1}^2 - \cdots - \lambda_{k+l} t_{k+l}^2.$$

Podobně, jsou-li $(u_1, \ldots, u_n)$ souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$, pak

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mu_1 u_1^2 + \cdots + \mu_p t_p^2 - \mu_{p+1} t_{p+1}^2 - \cdots - \mu_{p+q} t_{p+q}^2.$$

Máme dokázat, že $k = p$ a $l = q$. Předpokládejme naopak, že např. $k > p$.

Uvažujme pak podprostor $\mathcal{P}$ prostoru $\mathcal{V}$ generovaný vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_k$. Dimenze podprostoru $\mathcal{P}$ se rovná k. Dále vezmeme podprostor $\mathcal{Q}$ generovaný vektory $\mathbf{z}_{p+1}, \ldots, \mathbf{z}_n$. Dimenze podprostoru $\mathcal{Q}$ se rovná $n - p$. Protože $k + n - p > n$, protínají se podprostory $\mathcal{P}$ a $\mathcal{Q}$ v podprostoru dimenze aspoň 1. Buď tedy $\mathbf{0} \neq \mathbf{x} \in \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Potom

$$\mathbf{x} = t_1 \mathbf{y}_1 + \cdots + t_k \mathbf{y}_k = u_{p+1} \mathbf{z}_{p+1} + \cdots + u_n \mathbf{z}_n,$$

přičemž aspoň jeden z koeficientů v každém vyjádření je nenulový. Potom platí

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \lambda_1 t_1^2 + \cdots + \lambda_k t_k^2 > 0.$$

Naproti tomu, použijeme-li vyjádření vektoru $\mathbf{x}$ pomocí báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$, dostaneme

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\mu_{p+1} u_{p+1}^2 - \cdots - \mu_{p+q} u_{p+q}^2 \leq 0.$$

Tento spor dokazuje, že $k = p$. Podobně dokážeme, že také $l = q$. $\square$

V závěru této části se podíváme, co znamenají dokázané věty pro reálné vektorové prostory. Je-li dána báze $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ vektorového prostoru $\mathcal{V}$ nad tělesem $\mathbf{R}$ reálných čísel, pak bilineární formy na $\mathcal{V}$ jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu se čtvercovými maticemi $M = (d_{ij})$ řádu n s reálnými prvky. Jaké podmínky musí matice M splňovat, aby definovala skalární součin na $\mathcal{V}$? Jsou-li $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{z}_i$ a $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{z}_j$ libovolné dva vektory prostoru $\mathcal{V}$, pak pro bilineární formu w definovanou maticí M vzhledem k bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ podle Věty 12.60 platí

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{ij} b_i c_j d_{ij}.$$

Má-li bilineární forma w splňovat podmínku a) z definice skalárního součinu, musí platit $w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = w(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, tj. w musí být symetrická bilineární forma. Speciálně musí platit

$$d_{ij} = w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j) = w(\mathbf{z}_j, \mathbf{z}_i) = d_{ji}$$

pro každé dva indexy $i, j = 1, \ldots, n$. Je-li tato podmínka splněna, pak snadno ověříme, že

$$w(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{ij} b_i c_j d_{ij} = \sum_{ij} b_i c_j d_{ji} = w(\mathbf{y}, \mathbf{x}).$$

Proto, aby byla bilineární forma w symetrická, je tedy nutné a stačí, aby platilo $d_{ij} = d_{ji}$ pro libovolné dva indexy $i, j = 1, \ldots, n$. Takovým maticím říkáme symetrické.

Dále musí platit

$$0 \leq w(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} b_i b_j d_{ij},$$

přičemž rovnost může nastávat právě když $b_i = 0$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Tyto úvahy motivují následující definici.

Definice 12.35. Čtvercová reálná matice $M = (d_{ij})$ řádu n se nazývá *symetrická,* platí-li $d_{ij} = d_{ji}$ pro každé dva indexy $i, j = 1, \ldots, n$. Symetrická reálná matice $M = (d_{ij})$ se nazývá *pozitivně semidefinitní,* platí-li

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_i b_j d_{ij} \geq 0$$

pro libovolná reálná čísla $b_1, \ldots, b_n$. Pozitivně semidefinitní matice $M = (d_{ij})$ se nazývá *pozitivně definitní,* platí-li

$$\sum_{i,j=1}^{n} b_i b_j d_{ij} = 0$$

právě když $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.

Je-li tedy $\mathcal{V}$ reálný vektorový prostor dimenze n a w bilineární forma na $\mathcal{V}$, pak můžeme tuto formu popsat čtvercovou maticí $w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$ řádu n, zvolíme-li nějakou bázi $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_n$ prostoru $\mathcal{V}$. Jak z této matice poznáme, je-li w skalární součin? Skalární součin není nic jiného než pozitivně definitní kvadratická forma. Matice $w(\mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j)$ tedy musí být symetrická a pozitivně definitní. A jak poznáme, že nějaká čtvercová reálná symetrická matice M je pozitivně definitní? Například tak, že ji postupem z důkazu Věty 12.64 (tj. současným prováděním stejných elementárních sloupcových a řádkových transformací) převedeme do diagonálního tvaru, tj. vyjádříme kvadratickou formu $w(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ jako součet čtverců. Příslušná diagonální matice je potom pozitivně semidefinitní, jsou-li všechny prvky na hlavní diagonále nezáporné, a je pozitivně definitní, jsou-li všechny kladné. Podle Věty 12.66 tyto vlastnosti nezávisí na konkrétní diagonální matici, kterou z M dostaneme.