# 10. Inverzní matice

**Definice 10.26.** *Jednotková matice* řádu $n$ je čtvercová matice $I_n = (a_{ij})$, kde $a_{ii} = 1$ pro $i = 1, \dots, n$, a $a_{ij} = 0$, je-li $i \neq j$.

Jednotková matice $I_n$ má tedy jednotky na místech, kterým říkáme *hlavní diagonála* matice, a nuly na všech ostatních místech. Snadno si ověříte, že je-li $M$ matice tvaru $m \times n$, pak $MI_n = M$ a je-li $N$ matice tvaru $n \times m$, pak $I_n N = N$. Speciálně, je-li $M$ čtvercová matice řádu $n$, pak $MI_n = I_n M = M$.

Následující věta je jednou z vět, k jejichž formulaci a důkazu jste byli vyzváni závěrem předchozí kapitoly.

**Věta 10.42.** Je-li $M$ matice tvaru $m \times n$ a $E$ elementární matice řádu $n$, pak matici $ME$ dostaneme z $M$ nějakou elementární transformací posloupnosti sloupcových vektorů.

**Důkaz.** Je-li $E = E_{ij}$, dostaneme $ME$ z $M$ přehozením $i$-tého a $j$-tého sloupce. Je-li $E = E_i(a)$, dostaneme $ME$ z $E$ vynásobením $i$-tého sloupce skalárem $a$. A je-li $E = E_{ij}(a)$, pak $ME$ dostaneme z $M$ přičtením $a$-násobku $i$-tého sloupce k $j$-tému sloupci (ověřte si to přímým výpočtem). $\square$

**Věta 10.43.** Buď $M$ čtvercová matice řádu $n$. Následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

(a) existuje matice $N$ taková, že $NM = I_n$,
(b) hodnost matice $M$ je rovna $n$,
(c) existuje matice $P$ taková, že $MP = I_n$.

Jestliže tato tři tvrzení platí, pak je $N = P$.

**Důkaz.** (a) $\Leftrightarrow$ (b). Každý řádek matice $I_n = NM$ je lineární kombinací řádků matice $M$. Proto je řádkový prostor matice $I_n$ obsažen v řádkovém prostoru matice $M$. Řádky jednotkové matice $I_n$ tvoří standardní bázi prostoru $\mathcal{T}^n$, řádkový prostor matice $M$ má tedy dimenzi aspoň $n$. Větší mít nemůže, neboť je generován $n$ vektory, platí tedy, že hodnost matice $M$ je rovna $n$.

Naopak hodnost matice $M$ je rovna hodnosti matice $P$, která splňuje podmínky Věty 10.40 (je v odstupňovaném tvaru) a kterou dostaneme z $M$ pomocí elementárních řádkových operací. Každá elementární řádková operace je vlastně vynásobení matice $M$ zleva nějakou elementární maticí. Existují tedy elementární matice $E_1, \dots, E_k$, pro které platí $E_k \cdots E_1 M = P$. Matice $P$ má stejnou hodnost jako matice $M$ podle Věty 9.38f, tj. $n$. Z podmínek (a)-(d) Věty 9.40 tedy plyne, že $P$ je jednotková matice $I_n$. Proto můžeme položit $N = E_k \cdots E_1$.

Ekvivalence (b) $\Leftrightarrow$ (c) se dokazuje úplně stejně, jediný rozdíl je v tom, že tentokrát násobíme elementárními maticemi zprava, za použití Věty 10.42.

Jestliže tato tři tvrzení platí, pak $N = NI_n = N(MP) = (NM)P = I_nP = P$, použili jsme asociativitu násobení matic. $\square$

**Definice 10.27.** Čtvercová matice $M$ řádu $n$ se nazývá *regulární,* jestliže je její hodnost rovna $n$. V opačném případě se nazývá *singulární.* Je-li $N$ taková matice, že $NM = MN = I_n$, pak se nazývá *inverzní matice* k $M$ a označuje se $M^{-1}$.

Inverzní matice k $M$ tedy existuje právě když je $M$ regulární matice. V důsledku Věty 10.43 je určena jednoznačně. Protože je naopak matice $M$ inverzní k matice $M^{-1}$, platí $(M^{-1})^{-1} = M$.

Než si ukážeme jednu metodu výpočtu inverzní matice, uvedeme si ještě jednu jednoduchou větu.

**Věta 10.44.** Součin regulárních matic je regulární matice.

**Důkaz.** V tomto případě je důkaz zcela jednoduchý. Jsou-li $M, N$ dvě regulární matice téhož řádu $n$, existují matice k nim inverzní, $M^{-1}$ a $N^{-1}$. Potom s využitím asociativity násobení matic dostáváme, že $(MN)(N^{-1}M^{-1}) = M(NN^{-1})M^{-1} = MI_nM^{-1} = MM^{-1} = I_n$. $\square$

Následující věta udává v části c) metodu výpočtu inverzní matice k matici $M$. Tato metoda je založena na skutečnosti, že umíme najít inverzní matice k elementárním maticím a že každou regulární matici lze vyjádřit jako součin elementárních matic.

**Věta 40.** a) Každá elementární matice je regulární matice a matice k ní inverzní je také elementární matice.

b) Matice $M$ je regulární právě když ji lze vyjádřit jako součin elementárních matic.

c) Jsou-li $E_1, \dots, E_k$ elementární matice takové, že

$$E_kE_{k-1}\cdots E_1M = I_n,$$

pak $M^{-1} = E_k \cdots E_1 I_n$.

**Důkaz.** a) Přímým výpočtem se přesvědčíme, že $E_{ij}E_{ij} = I_n$, dále že $E_i(a)E_i(a^{-1}) = E_i(a^{-1})E_i(a) = I_n$, a nakonec $E_{ij}(a)E_{ij}(-a) = E_{ij}(-a)E_{ij}(a) = I_n$.

b) Je-li hodnost matice $M$ rovna $n$, existují podle Věty 9.40 elementární matice $E_1, \dots,$ $E_k$ takové, že součin $E_k \cdots E_1M$ splňuje podmínky (a)-(d) této věty. Protože má součin také hodnost $n$, musí být $E_k \cdots E_1M = I_n$, tj. $M = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1}$.

Opačné tvrzení plyne ihned z Věty 10.40.

c) Z rovnosti $E_k \cdots E_1M = I_n$ a z jednoznačnosti inverzní matice, pokud existuje, že $M^{-1} = E_k \cdots E_1 = E_k \cdots E_1 I_n$. $\square$

**Důsledek 10.46.** Jsou-li $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$ dvě báze prostoru $\mathcal{U}$, pak existuje posloupnost elementárních transformací, kterými z báze $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ dostaneme bázi $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n$.

**Důkaz.** Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $\mathcal{U}$ je aritmetický $n$-dimenzionální prostor $\mathcal{T}^n$ a $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je standardní báze prostoru $\mathcal{T}^n$. Najdeme souřadnice vektoru $\mathbf{y}_i$

vzhledem ke standardní bázi a zapíšeme je do $i$-tého řáadku matice $M$. Matice $M$ je regulární neboť její (řádková) hodnost je $n$. Lze ji tedy vyjádřit jako součin elementárních matic

$$M = E_k E_{k-1} \cdots E_1.$$

Řádky jednotkové matice $I_n$ obsahují souřadnice vektorů standardní báze vzhledem ke standardní bázi. Postupným násobením jednotkové matice elementárními maticemi $E_1, E_2, \ldots, E_k$ provádíme elementární řádkové transformace. Na konci dostaneme matici

$$M = E_k E_{k-1} \cdots E_1 I_n,$$

jejíž řádky obsahují vektory $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a dostali jsme je z vektorů $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ pomocí elementárních transformací. $\square$

Dále se budeme zabývat souvislostmi inverzní matice a matice přechodu. Především si připomeňme, že je-li $\mathcal{U}$ vektorový prostor dimenze $n$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ jeho báze, pak matice identického zobrazení na prostoru $\mathcal{U}$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ je rovna jednotkové matici $I_n$. Toto pozorování využijeme v následující větě.

**Věta 10.47.** Jsou-li $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ dvě báze prostoru $\mathcal{U}$, $M$ matice přechodu od báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $N$ matice přechodu od báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ k bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, pak $N = M^{-1}$.

**Důkaz.** Je-li $I : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ identické zobrazení, je $M$ matice $I$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$, matice $N$ je maticí $I$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$. Podle Věty 7.34 je $NM$ maticí identického zobrazení vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, tedy je $NM = I_n$. $\square$

**Příklad 10.17.** Spočtěte inverzní matici k matici

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Má-li vektor $\mathbf{x}$ souřadnice $(1,0,1,0)$ vzhledem ke standardní bázi prostoru $\mathcal{R}^4$, najděte jeho souřadnice vzhledem k bázi $\mathbf{y}_1 = (1,1,1,1), \mathbf{y}_2 = (1,1,1,0), \mathbf{y}_3 = (1,1,0,0)$, $\mathbf{y}_4 = (1,0,0,0)$.

**Věta 10.48.** Je-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ báze v $\mathcal{U}$, $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ báze ve $\mathcal{V}$ a $M(A)$ je matice zobrazení $A$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, pak je $M(A)$ regulární matice právě když je $A$ izomorfizmus. V takovém případě je matice inverzního lineárního zobrazení $A^{-1} : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ rovna matici $M(A)^{-1}$ inverzní k matici $M(A)$.

**Důkaz.** Matice $M(A)$ je regulární právě když je její hodnost rovna $n$. Hodnost $M$ se rovná její sloupcové hodnosti podle Věty 9.41. Z definice matice lineárního zobrazení vzhledem k bázím plyne, že $j$-tý sloupec matice $M(A)$ tvoří koeficienty při vyjádření vektoru

$A(\mathbf{x}_j)$ pomocí báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$. Sloupcová hodnost matice $M(A)$ je tedy rovna dimenzi $l(A(\mathbf{x}_1), \ldots, A(\mathbf{x}_n))$, neboli $\dim Im(A) = n$. Podle Věty 6.27, platí $\dim Ker(A) = 0$. Zobrazení $A$ je tedy na celý prostor $\mathcal{V}$ a podle Věty 6.23 je také prosté. Je proto izomorfizmem.

K důkazu opačné implikace si stačí uvědomit, že je-li $A$ izomorfizmus, je $\dim Im(A) = n$, tedy (sloupcová) hodnost matice $M(A)$ je rovna $n$, neboli matice je regulární.

Podle Věty 7.34 je matice

$$M(A^{-1})M(A)$$

maticí složeného zobrazení $A^{-1}A$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$. Protože je složené zobrazení identické zobrazení $I$ na prostoru $\mathcal{U}$, je

$$M(A^{-1})M(A) = M(I) = I_n.$$

□

**Věta 10.49.** Je-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ dvě báze prostoru $\mathcal{U}$, $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ báze $\mathcal{V}$ a $Q$ matice přechodu do báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ k bázi $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$, pak matice zobrazení $A$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$ se rovná $M(A)Q$, kde $M(A)$ je matice $A$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$.

**Důkaz.** Matice $Q$ je maticí identického zobrazení $I : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Podle Věty 7.34 je tedy matice $M(A)Q$ maticí lineárního zobrazení $AI = A$ vzhledem k bázím $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ a $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m$. □

**Věta 10.50.** Je-li $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ lineární zobrazení, pak existují báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ v $\mathcal{U}$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ ve $\mathcal{V}$ takové, že matice $N$ zobrazení $A$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ se rovná matici

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Důkaz.** Matici zobrazení $M(A)$ vzhledem k nějakým dvěma bázím v $\mathcal{U}$ a v $\mathcal{V}$ můžeme pomocí násobení elementárními maticemi zleva převést k matici $M_1$ splňující podmínky (a)-(d) Věty 9.40. Násobení elementárními maticemi zleva znamená provádění elementárních transformací na zvolené bázi prostoru $\mathcal{V}$. Matici $M_1$ můžeme dále násobit elementárními maticemi zprava tak, abychom dostali matici ze znění věty. Násobení elementárními maticemi zprava znamená provádění elementárních transformací na bázi prostoru $\mathcal{U}$.

Ukážeme si ještě jiný, “geometrický” důkaz této Věty, který se neodvolává na Větu 9.40, ale na důkaz Věty 6.27.

Předpokládejme, že $\dim Ker(A) = k$ a tedy $\dim Im(A) = n - k$. Zvolme libovolnou bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k$ jádra $Ker(A)$ zobrazení $A$. Tuto bázi doplníme (pokud již není bází $\mathcal{V}$) báze $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ prostoru $\mathcal{V}$. V důkazu Věty 6.27 jsme si ukázali, že vektory $A(\mathbf{x}_{k+1}), \ldots, A(\mathbf{x}_n)$ tvoří bázi prostoru $Im(A)$. Napřed si přeházíme vektory v bázi $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ tak, aby byly původní vektory $\mathbf{x}_{k+1}, \ldots, \mathbf{x}_n$ na prvních $n - k = r$ místech v $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$. Potom tedy vektory $\mathbf{y}_1 = A(\mathbf{x}_1), \ldots, y_r = A(\mathbf{x}_r)$ tvoří bázi prostoru $Im(A)$. Tuto bázi můžeme opět (pokud to již není báze celého $\mathcal{V}$) doplnit do báze $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$. Matice lineárního zobrazení $A : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ vzhledem k bázím $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ a $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m$ má potom požadovaný tvar. □