

Kapitola 20

Stereografická projekce

Definice 20.1 Množinu všech bodů $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ takových, že $\|\mathbf{x}\| = 1$ nazýváme jednotkovou sférou v $\mathbf{R}^n$ a označujeme ji $\mathbf{S}^{n-1}$.

Věta 20.1 Buď $\mathbf{S}^2$ jednotková sféra v $\mathbf{R}^3$. Označme $N = (0, 0, 1)^T$. Pro libovolný bod $P \in \mathbf{S}^2$, $P \neq N$, nechť P' je průsečík polopřímky NP s rovinou $z = 0$. Pak platí:

1. je-li $P = (x, y, z)^T$, potom

$$P' = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}, 0 \right)^T,$$

2. je-li $P' = (u, v, 0)^T$, pak

$$P = \left(\frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}, \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} \right)^T.$$

Definice 20.2 Zobrazení, které každému bodu $P \neq N$ jednotkové sféry $\mathbf{S}^2$ přiřazuje průsečík polopřímky NP s rovinou $z = 0$, nazýváme stereografická projekce.

Definice 20.3 Buď v rovině dána kružnice se středem S a poloměrem ρ . Zobrazení, které každému bodu $Q \neq S$ přiřadí bod Q' na polopřímce SQ , pro který platí $|SQ| \cdot |SQ'| = \rho^2$, se nazývá kruhová inverze. Osovou symetrii určenou nějakou přímkou v rovině rovněž nazýváme kruhová inverze.

Věta 20.2 Buď $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ reflexe vzhledem k nějakému podprostoru $\mathbf{U}$ (tj. $\dim \mathbf{U} = 2$). Potom existuje kruhová inverze Z v rovině $z = 0$ taková, že pro libovolné dva body $P, Q \in \mathbf{S}^2$ takové, že $T(P) = Q$, platí $Z(P') = Q'$, kde P', Q' je obrazy P, Q při stereografické projekci $\mathbf{S}^2$ na rovinu $z = 0$.

Budeme říkat, že kruhová inverze Z je určená reflexí T . V dalším budeme bod v rovině $z = 0$ o souřadnicích $(u, v, 0)^T$ zapisovat jedním komplexním číslem $w = u + iv$. Tomuto číslu budeme říkat *komplexní souřadnice* bodu $(u, v, 0)^T$.

Tvrzení 20.3 *V komplexních souřadnicích je kruhová inverze určená kružnicí o poloměru 1 se středem v počátku popsána funkcí*

$$I(w) = \frac{1}{\bar{w}}.$$

Tvrzení 20.4 *Bud' $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ reflexe určená rovnicí (tj. jejím prostorem řešení) $\lambda x + \mu y + \nu z = 0$, kde $\nu \neq 0$ (tj. rovina reflexe neprochází severním pólem N na jednotkové sféře $\mathbf{S}^2$), a $\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1$. Pak kruhová inverze určená reflexí T je dána kružnicí o středu*

$$d = -\frac{\lambda}{\nu} - i\frac{\mu}{\nu}$$

a poloměrem

$$\rho = \frac{1}{\nu}.$$

Tato kruhová inverze je v komplexních souřadnicích popsána zobrazením

$$g(w) = \frac{(\lambda + i\mu)\bar{w} - \nu}{-\nu\bar{w} - (\lambda - i\mu)}.$$

Tvrzení 20.5 *Osová symetrie (reflexe) v rovině určená přímkou $\lambda x + \mu y = 0$, kde $\lambda^2 + \mu^2 = 1$, tj. je v komplexních souřadnicích popsána zobrazením*

$$g(w) = -\frac{(\lambda + i\mu)\bar{w}}{\lambda - i\mu}.$$

Věta 20.6 *Zobrazení v rovině $z = 0$ určená rotacemi sféry $\mathbf{S}^2$ (tj. rotacemi v $\mathbf{R}^3$) jsou v komplexních souřadnicích právě zobrazení*

$$f(w) = \frac{aw + b}{-\bar{b}w + \bar{a}},$$

kde $a, b \in \mathbf{C}$ jsou komplexní čísla, $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Lemma 20.7 *Je-li*

$$f_1(w) = \frac{a_1w + b_1}{c_1w + d_1}, \quad f_2(w) = \frac{a_2w + b_2}{c_2w + d_2},$$

pak

$$f_1 f_2(w) = \frac{aw + b}{cw + d},$$

kde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Definice 20.4 Kvaternion je výraz typu $a + bi + cj + dk$, kde $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ a i, j, k jsou kvaternionové jednotky, které se násobí podle pravidel $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Norma kvaternionu $q = a + bi + cj + dk$ je definována jako číslo

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Kvaterniony s normou 1 budeme nazývat jednotkové kvaterniony.

Příklad 20.1 Kvaternionové vyjádření zobrazení

$$f(w) = \frac{aw + b}{-\bar{b}w + \bar{a}},$$

Lemma 20.8 Norma součinu dvou kvaternionů je součin norem obou činitelů.

Věta 20.9 Necht' $T_1 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ a $T_2 : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ jsou rotace. Označme jimi určená zobrazení v rovině $z = 0$

$$f_1(w) = \frac{a_1 w + b_1}{-\bar{b}_1 w + \bar{a}_1},$$

a

$$f_2(w) = \frac{a_2 w + b_2}{c_2 w + d_2}$$

kde $a_1, b_1 \in \mathbf{C}$ a a_2, b_2 jsou komplexní čísla taková, že $|a_1|^2 + |b_1|^2 = 1 = |a_2|^2 + |b_2|^2$.

Označme dále $\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k$ a $\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k$ kvaternionové reprezentace zobrazení f_1 a f_2 . Potom součin kvaternionů

$$(\alpha_1 + \beta_1 i + \gamma_1 j + \delta_1 k)(\alpha_2 + \beta_2 i + \gamma_2 j + \delta_2 k)$$

je kvaternionovou reprezentací složeného zobrazení $f_1 f_2$.

Příklad 20.2 Kvaternionová reprezentace rotace kolem osy z o úhel 2α v kladném směru.

Věta 20.10 1. Rotace kolem osy $\mathbf{u} = (b, c, a)^T$ o úhel α v kladném směru je dána kvaternionem

$$\cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2}(ai + bj + ck).$$

Platí $\|\mathbf{u}\| = 1$ právě když $|q| = 1$.

2. Jednotkové kvaterniony q a r určují stejnou rotaci právě když $q = \pm r$.

3. Naopak jednotkový kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ určuje rotaci v $\mathbf{R}^3$, jejíž matice vzhledem ke standardní bázi se rovná

$$\begin{pmatrix} a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2bc - 2ad & 2bd + 2ac \\ 2bc + 2ad & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2cd - 2ab \\ 2bd - 2ac & 2cd + 2ab & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}.$$