Kapitola 19

Izometrie v eukleidovských prostorech

Definice 19.1 *Buď* $\mathbf{V}$ *komplexní nebo reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Zobrazení* $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *nazýváme* izometrií *pokud pro každé dva vektory* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí rovnost*

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Tvrzení 19.1 *Složením dvou izometrií na komplexním nebo reálném vektoroném prostoru se skalárním součinem je opět izometrie.*

Důkaz. Buď $\mathbf{V}$ komplexní nebo reálný vektorový prostor se skalárním součinem a f, g izometrie na $\mathbf{V}$. Potom pro každé dva vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí, že $\|gf(\mathbf{x}) - gf(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$. $\square$

Tvrzení 19.2 *Buď* $f\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *izometrie na komplexním (resp. reálném) vektorovém prostoru se skalárním součinem. Definujme zobrazení* $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *předpisem* $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$ *pro všechny* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. *Potom platí, že*

1. $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ *pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
2. $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ *pro všechny* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$,
3. *T je unitární (resp. ortogonální) zobrazení. Speciálně je zobrazení T lineární.*

Důkaz. Postupně ukážeme jednotlivé body tvrzení.

1. Pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí, že $\|T(\mathbf{x})\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{0}\| = \|\mathbf{x}\|$.

2. Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Potom platí, že $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0}) - (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{0}))\| = \|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

3. Podle Lemmatu 17.9 je T unitární (resp. ortogonální) zobrazení. Podle Lemmatu 17.10 je zobrazení T lineární.

□

Definice 19.2 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor a* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *libovolný vektor.* Posunutím (o vektor $\mathbf{v}$) *budeme rozumět zobrazení* $P: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *dané předpisem* $P(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{v}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Poznamenejme, že pokud je $\mathbf{v}$ nenulový vektor potom posunutí o vektor $\mathbf{v}$ není lineární zobrazení.

Důsledek 19.3 *Buď* $\mathbf{V}$ *komplexní (resp. reálný) vektorový prostor se skalárním součinem. Každou izometrii* $f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lze vyjádřit jako složení* $f = PT$, *kde* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je unitární (resp. ortogonální) zobrazení a* $P: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je posunutí definované předpisem* $P(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + f(\mathbf{0})$ *pro všechny vektory* $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

Důkaz. Předpisem $P(\mathbf{y}) = \mathbf{y} + f(\mathbf{0})$, pro všechny $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$, je zřejmě definováno posunutí a podle Tvrzení 19.2 je zobrazení $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ dané předpisem $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$ pro všechny $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ unitární (resp. ortogonální). Pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ pak dostaneme, že $PT(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})) + f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{x})$.
□

Poznámka 19.1 *Vidíme tedy, že unitární (resp. ortogonální) zobrazení prostoru* $\mathbf{V}$ *(komplexního, resp. reálného prostoru se skalárním součinem) jsou právě izometrie tohoto prostoru zachovávající počátek, tj. izomterie* $f: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *takové, že* $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Definice 19.3 *Snadno nahlédneme, případně použijeme Tvrzení 15.8 a 15.9, že podobné matice mají stejný determinant. Protože matice daného lineárního zobrazení vzhledem ke dvěma bazím jsou podobné, mají týž determinant. Můžeme tedy definovat* determinant lineárního zobrazení $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *(budeme jej značit* $\det A$*) jako determinant matice tohoto zobrazení vzhledem k libovolně zvolené bázi.*

Tvrzení 19.4 *Buď* $\mathbf{V}$ *complexní (resp. reálný) vektorový prostor se skalárním součinem. Je-li* $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *unitární (resp. ortogonální) zobrazení, potom je* $|\det T| = 1$*. Speciálně, je-li* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{R}$ *a* T *ortogonální zobrazení, je* $\det T = \pm 1$.

Důkaz. Buď $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ unitární (resp. ortogonální) zobrazení. Podle Věty 17.11 je potom $TT^* = I$ (kde I značí identický izomorfismus prostoru $\mathbf{V}$). Zvolme libovolnou bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$. Podle Věty 16.11 je $[T^*]_{\mathcal{X}} = [T]^*_{\mathcal{X}}$, odkud plyne, že $\det[T^*]_{\mathcal{X}} = \det[T]^*_{\mathcal{X}} = \overline{\det[T]_{\mathcal{X}}}$. Proto je podle definice $\det T^* = \overline{\det T}$. Odtud dostaneme, že $1 = \det I = \det(TT^*) = \det T \det T^* = \det T \overline{\det T} = |\det T|^2$. To znamená, že $|\det T| = 1$. Je-li $\mathbf{V}$ reálný vektorový prosotor a T ortogonální zobrazení, je $\det T \in \mathbf{R}$. Odtud je vidět, že pak $\det T = \pm 1$. □

Ve zbytku kapitoly se omezíme na reálné vektorové prostory se skalárním součinem. Pokusíme se popsat jak na těchto prostorech mohou izometrie vypadat. Začneme izometriemi reálné roviny.

Lemma 19.5 *Nechť* a, b *jsou reálná čísla taková, že* $a^2 + b^2 = 1$*. Potom existuje právě jedno* $0 \le \alpha < 2\pi$ *takové, že* $a = \cos\alpha$ *a zároveň* $b = \sin\alpha$.

Důkaz. Uvažme komplexní číslo $z = a + ib$. Protože platí $a^2 + b^2 = 1$, leží číslo z na jednotkové kružnici a existuje tedy $0 \le \alpha < 2\pi$ takové, že $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$. Porovnáním komplexní a reálné části čísla z dostaneme, že $a = \cos\alpha$ a $b = \sin\alpha$.

Jsou-li $0 \le \alpha < \beta < 2\pi$, platí, že $\cos\alpha + i\sin\alpha \ne \cos\beta + i\sin\beta$. Proto buďto $\cos\alpha \ne \cos\beta$ nebo $\sin\alpha \ne \sin\beta$. Odtud je vidět, že číslo $0 \le \alpha < 2\pi$ splňující $a = \cos\alpha$ a zároveň $b = \sin\alpha$ je určeno jednoznačně. □

Lemma 19.6 *Buď dán reálný vektorový prostor se skalárním součinem* $\mathbf{V}$ *takový, že* $\dim \mathbf{V} = 2$ *a nějaká jeho ortonormální báze* $\mathcal{X}$*. Buď* $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *ortogonální zobrazení. Potom existuje právě jedno* $0 \le \alpha < 2\pi$ *tak, že*

$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, & \textit{pokud } \det T = 1, \\ \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}, & \textit{pokud } \det T = -1. \end{cases}$$

Důkaz. Protože je T ortogonální zobrazení, tvoří podle Věty 17.11 obraz ortonormální báze $\mathcal{X}$ při tomto zobrazení opět ortonormální bázi. To znamená, že je matice $[T]_{\mathcal{X}} = (t_{ij})$ otogonální, speciálně sloupce této matice tvoří vektory délky 1. Proto platí, že $t_{1j}^2 + t_{2j}^2 = 1$ pro $j = 1, 2$. Odtud a z Lemmatu 19.5 plyne, že existují jednoznačně určená $0 \leq \alpha, \beta < 2\pi$ taková, že $t_{11} = \cos\alpha$ a $t_{12} = \sin\alpha$, $t_{21} = \cos\beta$ a $t_{22} = \sin\beta$.

Podle Tvrzení 19.4 je $\det[T]_{\mathcal{X}} = \det T = \pm 1$. Je-li $\det T = 1$, dostáváme rovnost $t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = 1$ a tedy $1 = \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\beta - \alpha)$. To je ekvivalentní tomu, že $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro nějaké celé číslo k. Odtud plyne, že $\cos\beta = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{2} - \sin\alpha\sin\frac{\pi}{2} = -\sin\alpha$ a $\sin\beta = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{2} = \cos\alpha$. Odtud dostaneme, že

$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Předpokládejme, že $\det T = -1$. To znamená, že $-1 = t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21} = \cos\alpha\sin\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\beta - \alpha)$. To je ekvivalentní tomu, že $\beta - \alpha = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ pro nějaké celé číslo k. Odtud plyne, že $\cos\beta = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \cos\alpha\cos(-\frac{\pi}{2}) - \sin\alpha\sin(-\frac{\pi}{2}) = \cos\alpha\cos\frac{\pi}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\pi}{2} = \sin\alpha$ a $\sin\beta = \sin(\alpha - \frac{\pi}{2} + 2k\pi) = \sin\alpha\cos(-\frac{\pi}{2}) + \cos\alpha\sin(-\frac{\pi}{2}) = \sin\alpha\cos\frac{\pi}{2} - \cos\alpha\sin\frac{\pi}{2} = -\cos\alpha$. Odtud dostaneme, že

$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

□

Poznámka 19.2 *Všimeme si, že v důkazu předchozí věty jsme využili jen to, že sloupce matice $[T]_{\mathcal{X}}$ (tedy obrazy vektorů ortonormální báze $\mathcal{X}$) mají jednotkovou délku a že $\det T = \pm 1$. Platí tedy, že lineární zobrazení $T\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, které neměnί délky vektorů nějaké ortonormální báze a zachovává obsah (tj. $|\det T| = 1$) je nutně ortogonální (samozřejmě za předpokladu $\dim \mathbf{V} = 2$).*

Cvičení 19.1 *Uvažme vektorový prostor $\mathbf{R}^2$ se standardním skalárním součinem a nechť $\mathcal{E}$ značí standardní bázi tohoto prostoru. Rozmyslete si, že*

1. *lineární zobrazení $T\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dané maticí*

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

   je otočením o úhel α (se středem v počátku souřadnic);

2. *lineární zobrazení* $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ *dané maticí*

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

je osovou souměrností s osou určenou rovnicí

$$\sin\frac{\alpha}{2}x - \cos\frac{\alpha}{2}y = 0,$$

tj. svírající s osou x *úhel* $\frac{\alpha}{2}$.

Tvrzení 19.7 *Každá izometrie v prostoru* $\mathbf{R}^2$ *je buďto složením rotace kolem středu souřadnic s posunutím nebo složením osové souměrnosti vzhledem k ose* x *s nějakou rotací kolem středu souřadnic a s posunutím.*

Důkaz. Podle Důsledku 19.3 je každá izometrie v $\mathbf{R}^2$ složením ortogonálního zobrazení a posunutí. Podle Lemmatu 19.6 je každé ortogonální zobrazení v rovině $\mathbf{R}^2$ buďto rotací kolem středu souřadnic nebo osovou souměrností podle osy procházející středem souřadnic. Stačí ukázat, že každá taková osová souměrnost je složením osové souměrnosti vzhledem k ose x s rotací kolem středu souřadnic. Konkrétně platí, že osová souměrnost vzhledem k ose svírající s osou x úhel $\alpha/2$ je složením osové souměrnosti vzhledem k ose x s rotací kolem středu souřadnic o úhel α. Značí-li totiž O osovou souměrnost vzhledem k ose x, T osovou souměrnost vzhledem k ose svírající s osou x úhel $\alpha/2$ a R rotaci kolem středu souřadnic o úhel α, potom platí, že

$$[R]_{\mathcal{E}}[O]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = [T]_{\mathcal{E}}.$$

Proto $RO = T$. □

Definice 19.4 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem.*

(a) *Lineární zobrazení* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *se nazývá* rotace *ve* $\mathbf{V}$, *pokud existují podprostor* $\mathbf{U}$ *dimenze* 2 *prostoru* $\mathbf{V}$, *ortonormální báze* $\mathcal{O} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ *prostoru* $\mathbf{U}$ *a úhel* $0 \le \alpha < 2\pi$ *tak, že* $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ *pro všechna* $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^\perp$ *a*

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1\cos\alpha + \mathbf{u}_2\sin\alpha, \\ T(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1\sin\alpha - \mathbf{u}_2\cos\alpha. \end{aligned}$$

(b) *Lineární zobrazení* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *se nazývá* reflexe *ve* $\mathbf{V}$, *pokud existuje podprostor* $\mathbf{U}$ *dimenze* 1 *prostoru* $\mathbf{V}$ *takový, že* $T(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ *pro každý vektor* $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ *a* $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ *pro všechna* $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^\perp$.

Poznámka 19.3 *Jako v předešlé definici buď V reálný vektorový prostor se skalárním součinem dimenze* $n \geq 2$. *Potom je lineární zobrazení* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *rotací právě když existují ortonormální báze* $\mathcal{X}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *a úhel* $0 \leq \alpha < 2\pi$ *tak, že*

$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & \mathbf{0} \\ \sin\alpha & \cos\alpha & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Podobně je lineární zobrazení $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *reflexí právě když existuje ortonormální báze* $\mathcal{X}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *taková, že*

$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 19.8 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem dimenze 2. Buď* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *ortogonální zobrazení.*

1. *Je-li* $\det T = 1$, *potom existují ortonormální báze* $\mathcal{Y}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *a úhel* $0 \leq \beta \leq \pi$ *tak, že*

$$[T]_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

2. *Je-li* $\det T = -1$, *potom existuje ortonormální báze* $\mathcal{Y}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *taková, že*

$$[T]_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Důkaz. Buď $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ libovolná ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$.

1. Je-li $\det T = 1$, pak podle Lemmatu 19.6 existuje $0 \leq \alpha < 2\pi$ tak, že

$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Je-li $0 \leq \alpha \leq \pi$ položíme prostě $\beta = \alpha$. V případě, že $\pi < \alpha < 2\pi$, položme $\mathcal{Y} = \{\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2\}$. Je zřejmé, že $\mathcal{Y}$ je opět ortonotmální báze prostru $\mathbf{V}$ a snadno spočítáme, že

$$[T]_{\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix},$$

kde $\beta = 2\pi - \alpha$. Protože $\pi < \alpha < 2\pi$, platí, že $0 < \beta < \pi$.

2. Je-li $\det T = -1$, pak podle Lemmatu 19.6 existuje $0 \leq \alpha < 2\pi$ tak, že
$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}.$$
Položme $\mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_1 \cos\frac{\alpha}{2} + \mathbf{x}_2 \sin\frac{\alpha}{2}$, $\mathbf{y}_2 = -\mathbf{x}_1 \sin\frac{\alpha}{2} + \mathbf{x}_2 \cos\frac{\alpha}{2}$ a $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$. Snadno ověříme, že $\mathcal{Y}$ je ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$. Matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ je rovna
$$[I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\alpha}{2} & \sin\frac{\alpha}{2} \\ -\sin\frac{\alpha}{2} & \cos\frac{\alpha}{2} \end{pmatrix}.$$
Odtud přímým výpočtem dostaneme, že
$$[T]_{\mathcal{Y}} = [I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}[T]_{\mathcal{X}}[I]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

Věta 19.9 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem dimenze 2. Buď* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *ortogonální zobrazení. Potom je* T *buďto rotace nebo reflexe. Přitom* T *je rotace právě tehdy když* $\dim T = 1$ *a reflexe právě tehdy když* $\dim T = -1$.

Důkaz. Podle Tvrzení 19.4 je $\det T = \pm 1$. Je-li $\det T = 1$ je T podle Lemmatu 19.6 rotací. Naopak každá rotace je ortogonálním zobrazením s determinanetem rovným 1. Je-li $\det T = -1$ je T podle Lemmat 19.6 a 19.8 reflexí a naopak každá reflexe je ortogonálním zobrazením s determinantem rovným -1. □

Tvrzení 19.10 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem.*

1. *Složením dvou reflexí ve* $\mathbf{V}$ *získáme rotaci ve* $\mathbf{V}$.

2. *Je-li* $\dim V = 2$*, pak složením reflexe a rotace ve* $\mathbf{V}$ *získáme opět reflexi ve* $\mathbf{V}$.

Důkaz. Buď $\mathbf{V}$ reálný vektorový prostor se skalárním součinem.

1. Nechť T_i, $i = 1, 2$ je dvojice reflexí ve $\mathbf{V}$. Pro $i = 1, 2$ buď $\mathbf{U}_i$ podprostor dimenze 1 takový, že $T_i(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{U}_i$ a $T_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pro všechna $\mathbf{v} \in \mathbf{U}_i^{\perp}$. Položme $T = T_2 T_1$ a $\mathbf{U} = \mathbf{U}_2 + \mathbf{U}_1$.

Je-li $U_1 = U_2$, potom nutně $T_1 = T_2$ (je to vidět z definice) a proto je $T = T_2T_1 = T_1^2$ identické zobrazení. Identické zobrazení je podle definice rotací a proto v tomto případě dokazované tvrzení platí.

Předpokládejme, že $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$. Potom je nutně $\dim \mathbf{U} = 2$ a tedy $\dim \mathbf{U}^\perp = n - 2$. Protože $\mathbf{U}_1 \neq \mathbf{U}_2$, je také $\mathbf{U}_1^\perp \neq \mathbf{U}_2^\perp$ a vzhledem k tomu, že $\dim \mathbf{U}_1^\perp = \dim \mathbf{U}_2^\perp = n - 1$, je pak $\mathbf{U}_1^\perp + \mathbf{U}_2^\perp = \mathbf{V}$. Podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů (Věta 12.12) je $\dim(\mathbf{U}_1^\perp \cap \mathbf{U}_2^\perp) = \dim \mathbf{U}_1^\perp + \dim \mathbf{U}_2^\perp - \dim(\mathbf{U}_1^\perp + \mathbf{U}_2^\perp) = (n-1) + (n-1) - n = n - 2 = \dim \mathbf{U}^\perp$. Zřejmě platí, že $\mathbf{U}_2^\perp \cap \mathbf{U}_1^\perp \subseteq \mathbf{U}^\perp$, odkud dostáváme rovnost $\mathbf{U}_2^\perp \cap \mathbf{U}_1^\perp = \mathbf{U}^\perp$. Odtud je vidět, že $T_i(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}^\perp$ a každé $i = 1, 2$ a tedy $T(\mathbf{y}) = \mathbf{y}$ pro všechna $\mathbf{y} \in \mathbf{U}^\perp$. Protože je T ortogonální zobrazení, je potom $\mathbf{U} = (\mathbf{U}^\perp)^\perp$ invariantním podprostorem T. Je-li totiž $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ a $\mathbf{y} \in \mathbf{U}^T$, potom $\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y}\rangle = \langle T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = 0$. Proto $T(\mathbf{x}) \in (\mathbf{U}^\perp)^\perp = \mathbf{U}$. Označme $T_{\mathbf{U}}$, resp. $T_{\mathbf{U}^\perp}$ restrikci zobrazení T na podprostor $\mathbf{U}$, resp. $\mathbf{U}^\perp$. Všimněme si, že obě tyto restrikci jsou ortogonálními zobrazeními na daných podprostorech. Zvolme ortonormální báze $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ prostoru $\mathbf{U}$ a $\mathcal{Y} = \{\mathbf{u}_3, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ prostoru $\mathbf{U}^\perp$. Protože $\mathbf{U} \cap \mathbf{U}^\perp = \{\mathbf{0}\}$, je $\mathcal{Z} = \mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ bazí prostoru $\mathbf{V}$. Protože jak $\mathbf{U}$ tak $\mathbf{U}^\perp$ jsou invariantní podprostory prostoru $\mathbf{V}$, platí, že

$$[T]_{\mathcal{Z}} = \begin{pmatrix} [T_{\mathbf{U}}]_{\mathcal{X}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [T_{\mathbf{U}^\perp}]_{\mathcal{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [T_{\mathbf{U}}]_{\mathcal{X}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{n-2} \end{pmatrix}.$$

Odtud dostaneme, že $\det T_{\mathbf{U}} = \det T = \det T_2T_1 = \det T_2 \det T_1 = (-1)^2 = 1$. Tedy $T_{\mathbf{U}}$ je ortogonální zobrazení na prostoru $\mathbf{U}$ dimenze 2 jehož determinant je roven 1. Podle Lemmatu 19.6 pak existuje $0 \leq \alpha < 2\pi$ tak, že

$$[T_{\mathbf{U}}]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Odtud plyne, že

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= \mathbf{u}_1 \cos\alpha + \mathbf{u}_2 \sin\alpha, \\ T(\mathbf{u}_2) &= \mathbf{u}_1 \sin\alpha - \mathbf{u}_2 \cos\alpha \quad a \end{aligned}$$

$T(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i$ pro všechna $i = 3, \ldots, n$ (a tedy $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ pro všechna $\mathbf{v} \in \mathbf{U}^\perp$). To znamená, že T je rotace.

2. Předpokládejme, že $\dim \mathbf{V} = 2$. Nechť T_1 je reflexe a T_2 je rotace ve $\mathbf{V}$. Obě tato zobrazení jsou ortogonální a tedy také jejich složení $T = T_2T_1$

a $T' = T_1T_2$ jsou ortogonální zobrazení. K tomu abychom ukázali, že zobrazení T a T' jsou refelexe, stačí podle Věty 19.9 ukázat, že $\det T = \det T' = -1$. To je snadné, neboť $\det T = \det T_2T_1 = \det T_2 \det T_1 = 1 \cdot (-1) = -1$ a $\det T' = \det T_1T_2 = \det T_1 \det T_2 = (-1) \cdot 1 = -1$.

□

Nechť $u = a+ib$ a $v = c+id$. Připomeňme, že číslo komplexně sdružené k číslu u, které značíme $\overline{u}$, je číslo $\overline{u} = a-ib$, a že platí $\overline{u}\cdot\overline{v} = (a-ib)(c-id) = (ac-bd)-i(ad+bc) = \overline{(uv)}$ a $\overline{u}+\overline{v} = (a-ib)+(c-id) = (a+b)-i(c+d) = \overline{u+v}$.

Tvrzení 19.11 *Buď $f(x)$ polynom s reálnými koeficienty a u komplexní číslo. Potom platí, že $f(\overline{u}) = \overline{f(u)}$.*

Důkaz. Tvrzení ukážeme indukcí podle stupně polynomu f. Jeho platnost je zřejmá v případě, že je stupeň polynomu f roven nule. Buď $0 < n$ přirozené číslo a předpokládejme, že dokazované tvrzení platí pro všechny polynomy stupně menšího než n. Buď $f(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$ polynom s reálnými koeficienty stupně n a u komplexní číslo. Položme $g(x) = a_nx^{n-1} + \ldots + a_2x + a_1$. Snadno nahlédneme, že $f(x) = g(x)x + a_0$. Podle indukčního předpokladu je $g(\overline{u}) = \overline{g(u)}$. Dále $a_0 = \overline{a_0}$, protože f je reálný polynom a a_0 je tedy reálné číslo. Proto platí, že $f(\overline{u}) = g(\overline{u})\overline{u} + a_0 = \overline{g(u)}\overline{u} + a_0 = \overline{g(u)u} + \overline{a_0} = \overline{g(u)u + a_0} = \overline{f(u)}$. □

Důsledek 19.12 *Buď $f(x)$ polynom s reálnými koeficienty a u komplexní číslo. Je-li u kořenem polynomu f pak je také $\overline{u}$ kořenem polynomu f.*

Důkaz. Vzhledem k Tvrzení 19.11 platí, že $f(\overline{u}) = \overline{f(u)} = \overline{0} = 0$. □

Označme $\deg f$ stupeň polynomu f a připomeňme, že $\deg gh = \deg g + \deg h$ pro každou dvojici nenulových polynomů g, h.

Lemma 19.13 *Jsou-li f a $0 \neq g$ polynomy s reálnými koeficienty a h komplexní polynom takové, že $f = gh$, potom jsou všechny koeficienty polynomu h reálné.*

Důkaz. Reálné polynomy totiž můžeme dělit se zbytkem a proto $f = gp + q$ pro nějaké reálné polymy p a q, kde je navíc $\deg q < \deg g$. Potom ale $0 = f - f = gh - (gp + q) = g(h - p) - q$, odkud $q = g(h - p)$. Pokud by platilo, že $h - p \neq 0$ (polynom g je nenulový podle předpokladu), dostali bychom $\deg q < \deg g \leq \deg g + \deg(h-p) = \deg q$, což vede ke sporu. Proto $h - p = 0$ a tedy $h = p$ je reálný polynom. □

Tvrzení 19.14 *Každý nekonstantní polynom f s reálnými koeficienty, který nemá reálný kořen, je dělitelný nějakým polynomem g stupňe 2 s reálnými koeficienty. Tento polynom lze volit ve tvaru $g(x) = (x-u)(x-\overline{u})$, kde u, $\overline{u}$ jsou komplexně sdružené komplexní kořeny polynomu f.*

Důkaz. Využijeme toho, že těleso komplexních čísel je algebraicky uzavřené. To znamená, že existuje nějaký komplexní kořen $u = a+ib$ polynomu f. Potom platí, že $f(x) = (x-u)g(x)$ pro nějaký (komplexní) polynom g. Podle Důsledku 19.12 je také číslo $\overline{u}$ komplexně sdružené s u kořenem polynomu f. Protože polynom f nemá reálný kořen, je nutně $u \neq \overline{u}$. Proto $0 = f(\overline{u}) = (\overline{u}-u)g(\overline{u})$. Protože $u \neq \overline{u}$, je $\overline{u} - u \neq 0$ a tedy nutně $g(\overline{u}) = 0$. To znamená, že existuje polynom h tak, že $g(x) = (x-\overline{u})h(x)$. Odtud dostaneme, že $f(x) = (x-u)(x-\overline{u})h(x) = (x^2 - (u+\overline{u})x + u\overline{u})h(x)$. Snadno nahlédneme, že $u\overline{u} = a^2 + b^2$ a $u + \overline{u} = 2a$. Vzhledem k Lematu 19.13 je polynom f dělitelný reálným polynomem $x^2 - (a^2+b^2)x + 2a$. $\square$

Důsledek 19.15 *Polynomy nad tělesem reálných čísel mají tyto vlastnosti:*

1. *Každý nekonstantní reálný polynom je dělitelný reálným polynem stupně* 1 *nebo* 2.
2. *Každý polynom s reálnými koeficienty lichého stupně má reálný kořen.*

Důkaz. Ukážeme postupně obě tvrzení.

1. Buď f nekonstatní polynom s reálnými koeficienty. Má-li f reálný kořen a, potom je dělitelný polynomem $x - a$ stupně 1. Pokud f nemá žádný reálný kořen, pak je podle Tvrzení 19.14 dělitelný nějakým reálým polynomem stupně 2.
2. Buď f reálný polynom stupně $2n+1$. Indukcí podle n ukážeme, že má polynom f reálný kořen. Je-li $n = 0$, potom je f polynom stupně 1 a tedy $f(x) = ax + b$ pro nějakou dvojici reálných čísel $0 \neq a, b$. Pak je $-\frac{b}{a}$ reálným kořenem f. Buď $n > 0$ a předpokládejme, že každý reálný polynom stupně $2k+1$, kde $k < n$, má kořen. Pro spor předpokládejme, že polynom f nemá reálný kořen. Podle Tvrzení 19.14 je polynom f dělitelný reálným polynomem g stupně 2. Proto $f = gh$ pro nějaký reálný polynom h a platí, že $\deg h = \deg f - \deg g = \deg f - 2 = 2(n-1) + 1$. Podle indukčního předpokladu má polynom h reálný kořen. Ten je zároveň kořenem polynomu f.

$\square$

Lemma 19.16 *Každé lineární zobrazení na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *dimenze alespoň 3 má netriviální invariantní podprostor dimenze nejvýše 2.*

Důkaz. Buď $\mathbf{V}$ reálný prostor dimenze alespoň 3 a $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení. Má-li zobrazení A reálné vlastní číslo ρ, generuje libovolný vlastní vektor příslušný tomuto vlastnímu číslu jednodimenzionální invariantní podprostor zobrazení A. Proto můžeme předpokládat, že charakteristický polynom p_A lineárního zobrazení A nemá žádné reálné kořeny. Podle Lemmatu 19.14 je pak polynom p_A dělitelný nějakým reálným polynomem $q(x) = x^2 + bx + c = (x - u)(x - \overline{u})$ stupně 2, kde u a $\overline{u}$ jsou komplexní kořeny polynomu p_A. Zvolme libovolně bázi prostoru $\mathbf{V}$ a označme $\mathbf{A}$ matici zobrazení A vzhledem k této bázi. Polynom p_A je pak nejen charakteristickým polynomem zobrazení A, ale také matice $\mathbf{A}$ a jeho kořeny jsou tedy jejími vlastními čísly. Proto je matice $g(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + b\mathbf{A} + c\mathbf{I} = (\mathbf{A} - u\mathbf{I})(\mathbf{A} - \overline{u}\mathbf{I})$ singulární. Odtud plyne, že existuje nenulový vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tak, že $A^2(\mathbf{x}) + bA(\mathbf{x}) + c\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Položme $\mathbf{y} = A(\mathbf{x}) + b\mathbf{x}$. Potom platí, že $A(\mathbf{x}) = \mathbf{y} - b\mathbf{x}$ a $A(\mathbf{y}) = A^2(\mathbf{x}) + bA(\mathbf{x}) = -c\mathbf{x}$ a tedy vektory $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ generují invariantní podprostor $\mathbf{V}$. Tento podprostor je netriviální, neboť $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, a má dimenzi nejvýše 2, neboť je generován dvojicí vektorů $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. $\square$

Věta 19.17 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem a* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *ortogonální zobrazení. Potom existují po dvou ortogonální invariantní podprostory* $\mathbf{W}_1, \dots, \mathbf{W}_m$ *dimenze nejvýše 2 takové, že* $\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{W}_i$*, tj. jejichž sjednocení generuje prostor* $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. Větu ukážeme indukcí podle dimenze prostoru $\mathbf{V}$. Je-li $\dim \mathbf{V} \leq 2$, položíme $m = 1$ a $\mathbf{W}_1 = \mathbf{V}$. Buď $2 < n = \dim \mathbf{V}$ a předpokládejme, že platí pro všechna ortognální zobrazení na reálných vektorových prostorech dimenze menší než n. Podle Lemmatu 19.16 existuje netriviální T-invariantní podprostor $\mathbf{W}_1$ prostoru $\mathbf{V}$ dimenze nejvýše 2. Označme T_1 restrikci zobrazení T na podprostor W_1. Tato restrikce je zřejmě opět ortogonálním zobrazením a podle Tvrzení 19.4 je $\det T_1 = \pm 1$, odkud je vidět, že je zobrazení $T_1: \mathbf{W}_1 \to \mathbf{W}_1$ izomorfismus. Proto má každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_1$ jednoznačně určený vzor $T_1^{-1}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_1$ takový, že $\mathbf{x} = T(T_1^{-1}(\mathbf{x}))$. Nechť $\mathbf{y} \in \mathbf{W}_1^{\perp}$ a $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_1$ jsou libovolně zvolené vektory. Protože je T ortogonální zobrazení a $T_1^{-1}(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_1$ platí potom, že $\langle \mathbf{x}, T(\mathbf{y}) \rangle = \langle T(T_1^{-1}(\mathbf{x})), T(\mathbf{y}) \rangle = \langle T_1^{-1}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = 0$. Proto je $T(\mathbf{y}) \in \mathbf{W}_1^{\perp}$ a to znamená, že $\mathbf{W}_1^{\perp}$ je invariantní podprostor vzhledem k zobrazení T. Protože je podprostor $\mathbf{W}_1$ netriviální, je $\dim \mathbf{W}_1^\perp < n$ a podle indukčního předpokladu existují po dvou ortogonální T-invariantní podprostory $\mathbf{W}_2, \ldots, \mathbf{W}_m$ dimenze nejvýše 2 takové, že $\mathbf{W}_1^\perp = \sum_{i=2}^m \mathbf{W}_i$. Odtud snadno nahlédneme, že podprostory $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_m$ tvoří hledaný rozhlad prostoru $\mathbf{V}$. $\square$

Všimněme si, že rotaci o úhel $\alpha = \pi$ ve dvoudimenzionálním reálném vektorovém prostoru dostaneme jako složení dvou reflexí jejichž osy jsou vzájemně kolmé. Odtud, z Lemmatu 19.8 a z Věty 19.17 plyne následující popis ortogonálních zobrazení na reálných vektorových prostorech se skalárním součinem.

Věta 19.18 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem a* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *ortogonální zobrazení. Potom existuje ortonormální báze* $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\ell, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$, *kde* $\dim \mathbf{V} = 2k + \ell + m$ *a* $\mathbf{W}_i = \mathbf{L}(\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i\})$, $i = 1, \ldots, k$, $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_\ell\})$ *a* $\mathbf{K} = \mathbf{L}(\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\})$ *jsou invariantní po dvou ortogonální podprostory a*

- *restrikce* $T_{\mathbf{W}_i}$ *(pro* $i = 1, \ldots, k$*) zobrazení* T *na podprostor* $\mathbf{W}_i$ *je rotace o úhel* α_i *pro nějaké* $0 < \alpha_i < \pi$,
- *restrikce* $T_{\mathbf{U}}$ *zobrazení* T *na podprostor* $\mathbf{U}$ *je středová souměrnost, tj. zobrazení dané předpisem* $T_{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ *pro všechny* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *a*
- *restrikce* $T_{\mathbf{K}}$ *zobrazení* T *na podprostor* $\mathbf{K}$ *je identita.*

Matice $[T]_{\mathcal{X}}$ *je pak blokově diagonální tvaru*

$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} [T_{\mathbf{W}_1}]_{\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}'_1\}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & [T_{\mathbf{W}_2}]_{\{\mathbf{x}_2, \mathbf{x}'_2\}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & [T_{\mathbf{W}_k}]_{\{\mathbf{x}_k, \mathbf{x}'_k\}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{I}_\ell & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{pmatrix},$$

kde

$$[T_{\mathbf{W}_i}]_{\{\mathbf{x}_i, \mathbf{x}'_i\}} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_i & -\sin \alpha_i \\ \sin \alpha_i & \cos \alpha_i \end{pmatrix}$$

pro $i = 1, \ldots, k$.

Důsledek 19.19 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor dimenze* 3 *se skalárním součinem a* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *ortogonální zobrazení. Potom existuje ortogonální* *báze* $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *a úhel* $0 \leq \alpha \leq \pi$ *taková, že*

$$[T]_{\mathcal{X}} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \textit{pokud } \det T = 1, \\ \\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, & \textit{pokud } \det T = -1. \end{cases}$$

V případě, že $\det T = 1$*, je* T *otočením kolem osy určené vektorem* $\mathbf{x}_3$ *o úhel* α*. Pokud* $\det T = -1$*, je* T *otočením kolem osy určené vektorem* $\mathbf{x}_3$ *o úhel* α *složeným s reflexí podle roviny generované vektory* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$.

Cvičení 19.2 *Ukažte, že každé ortogonální zobrazení na reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem dimenze* n *je složením nejvýše* n *reflexí.*