Kapitola 19

Izometrie v euklidovských prostorech

Definice 19.1 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Zobrazení* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *nazýváme* izometrie, *pokud pro každé dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí*

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|.$$

Tvrzení 19.1 *Je-li* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *izometrie, pak definujeme zobrazení* $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *předpisem* $T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$ *pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. *Potom platí*

1. $\|T(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ *pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
2. $\|T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$,
3. $\langle T(\mathbf{x}), T(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$,
4. *zobrazení* T *je ortogonální lineární zobrazení.*

Důsledek 19.2 *Každou izometrii* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lze vyjádřit jako složení* $f = PT$, *kde* $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je nějaké ortogonální lineární zobrazení a* $P : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je posunutí definované jako* $P(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{0})$

Definice 19.2 Determinant lineárního zobrazení $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, *kde* $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor nad libovolným tělesem* $\mathbf{T}$, *je determinant matice zobrazení* T *vzhledem k libovolné bázi* $\mathcal{X}$ *ve* $\mathbf{V}$. *Hodnotju determinantu lineárního zobrazení* T *zapisujeme* $\det T$.

Tvrzení 19.3 *Buď* $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *ortogonální zobrazení, pak* $\det T = \pm 1$.

Lemma 19.4 *Je-li $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ ortogonální zobrazení a $\mathcal{E}$ standardní báze ve $\mathbf{R}^2$, pak existuje úhel Θ takový, že*

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \text{ pokud } \det T = 1,$$

$$[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}, \text{ pokud } \det T = -1.$$

Věta 19.5 *Každá izometrie v prostoru $\mathbf{R}^2$ je buď složením rotace kolem středu souřadnic s posunutím nebo složením osové souměrnosti vzhledem k ose x s nějakou rotací kolem středu souřadnic a s posunutím.*

Definice 19.3 *Buď $\mathbf{V}$ reálný vektorový prostor se skalárním součinem. Lineární zobrazení $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ se nazývá* rotace *ve $\mathbf{V}$, pokud je T identické zobrazení nebo existuje podprostor $\mathbf{U}$ dimenze 2 prostoru $\mathbf{V}$ a v něm ortonormální báze $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ taková, že*

$$T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1 \cos\theta + \mathbf{u}_2 \sin\theta,$$

$$T(\mathbf{u}_2) = -\mathbf{u}_1 \sin\theta + \mathbf{u}_2 \cos\theta,$$

a $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}^\perp$.

Zobrazení T se nazývá reflexe *ve $\mathbf{V}$, pokud existuje jednodimenzionální podprostor $\mathbf{U}$ prostoru $\mathbf{V}$ takový, že $T(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ a $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{U}^\perp$.*

Tvrzení 19.6 *Složení libovolných dvou reflexí ve $\mathbf{V}$ je nějaká rotace ve $\mathbf{V}$.*

Věta 19.7 *Každá izometrie v prostoru $\mathbf{V}$ dimenze 2 je buď složením rotace kolem středu souřadnic s posunutím nebo složením reflexe vzhledem k ose x s nějakou rotací kolem středu souřadnic a s posunutím.*

Věta 19.8 *Buď T ortogonální zobrazení na reálném prostoru $\mathbf{V}$ dimenze 2 se skalárním součinem. Pak je T buď rotace nebo reflexe. Rotace je to právě když $\det T = 1$, reflexe je to právě když $\det T = -1$.*

Důsledek 19.9 *V prostoru dimenze 2 je složení rotace s reflexí (v libovolném pořadí) zase reflexe.*

Definice 19.4 *Je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ dva podprostory $\mathbf{V}$ takové, že $\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{\mathbf{0}\}$ a $\mathbf{X} + \mathbf{Y} = \mathbf{V}$. Pak říkáme, že $\mathbf{V}$ je* direktní součet *podprostorů $\mathbf{X}$ a $\mathbf{Y}$ a píšeme $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$.*

Tvrzení 19.10 *Je-li* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ *dva podprostory* $\mathbf{V}$*, pak jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. $\mathbf{V} = \mathbf{X} \oplus \mathbf{Y}$,
2. *je-li* $\mathcal{X}$ *báze v* $\mathbf{X}$ *a* $\mathcal{Y}$ *báze v* $\mathbf{Y}$*, pak* $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ *je báze v* $\mathbf{V}$,
3. *každý prvek* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ *lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru* $\mathbf{u} = \mathbf{x} + \mathbf{y}$*, kde* $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ *a* $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$.

Poznámky o tom, jak interpretovat $\mathbf{X} \oplus \mathbf{Y} \oplus \mathbf{Z}$.

Lemma 19.11 *Buď* T *lineární zobrazení na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem. Pak existuje invariantní podprostor* $\mathbf{U}$ *zobrazení* $\mathbf{V}$*, který má dimenzi 1 nebo 2.*

Věta 19.12 *Buď* $T : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *ortogonální lineární zobrazení na reálném prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem. Pak existují navzájem ortogonální podprostory* $\mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_m$ *ve* $\mathbf{V}$ *takové, že*

1. *každý podprostor* $\mathbf{W}_k$ *je invariantní podprostor zobrazení* T,
2. $\dim \mathbf{W}_k$ *je buď 1 nebo 2 pro každé* $k = 1, \ldots, m$,
3. $\mathbf{V} = \mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{W}_m$.

Jakkoliv poslední věta popisuje, jak vypadá libovolné ortogonální zobrazení na reálném prostoru se skalárním součinem, neříká nic o jednoznačnosti rozkladu $\mathbf{V}$ na direktní součet $\mathbf{W}_1 \oplus \mathbf{W}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbf{W}_m$.

Věta 19.13 *Nechť* $T, \mathbf{V}, \mathbf{W}_1, \ldots, \mathbf{W}_m$ *jsou jako v předchozí Větě 19.12. Označme* $T_{\mathbf{W}_i}$ *zúžení zobrazení* T *na invariantní podprostor* $\mathbf{W}_i$*. Potom platí*

1. *počet indexů* i*, pro které je* $T_{\mathbf{W}_i}$ *reflexe, je sudý nebo lichý v závislosti na tom, je-li* $\det T = 1$ *nebo* $\det T = -1$,
2. *vždy je možné najít rozklad jako ve Větě 19.12, ve kterém je počet indexů* i*, pro které je* $T_{\mathbf{W}_i}$ *reflexe, nula nebo jedna v závislosti na tom, je-li* $\det T = 1$ *nebo* $\det T = -1$.

Tvrzení 19.14

1. *Je-li* $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *nekonstantní polynom s reálnými koeficienty a* $z \in \mathbf{C}$ *nějaký jeho kořen, pak* $\overline{z}$ *je také kořen* $p(x)$,

2. *každý polynom lichého stupně s reálnými koeficienty má aspoň jeden reálný kořen.*

Příklad 19.1 Ortogonální zobrazení a rotace v $\mathbf{R}^3$.