Kapitola 18

Bilineární a kvadratické formy

Definice 18.1 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Bilineární forma na prostoru* $\mathbf{V}$ *je zobrazení* $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ *splňující tyto podmínky:*

1. $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ *pro všechny vektory* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$;
2. $f(a\mathbf{x}, \mathbf{y}) = af(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *pro všechny vektory* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *a každé* $a \in \mathbf{T}$;
3. $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}+\mathbf{z}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$ *pro všechny vektory* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$;
4. $f(\mathbf{x}, a\mathbf{y}) = af(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *pro všechny vektory* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *a každé* $a \in \mathbf{T}$.

Definice 18.2 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$, $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze prostoru* $\mathbf{V}$ *a* $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ *bilineární forma na prostoru* $\mathbf{V}$. Matice bilineární formy f *vzhledem k bázi* $\mathcal{X}$ *je matice* $\{f\}_{\mathcal{X}} = (a_{ij})$ *řádu* n *daná předpisem* $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ *pro všechna* $i, j = 1, \ldots, n$. *Tj.*

$$\{f\}_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1) & f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) & \ldots & f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_n) \\ f(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1) & f(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2) & \ldots & f(\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_1) & f(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_2) & \ldots & f(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) \end{pmatrix}.$$

Lemma 18.1 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$, $\mathcal{X}$ *báze prostoru* $\mathbf{V}$ *a* $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ *bilineární forma na prostoru* $\mathbf{V}$. *Potom pro každou dvojici vektorů* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí, že*

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{X}}^T \{f\}_{\mathcal{X}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{X}}. \tag{18.1}$$

Přitom matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ *je vztahem (18.1) jednoznačně určena.*

Důkaz. Položme $n = \dim \mathbf{V}$ a nechť $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$, $[\mathbf{x}]_\mathcal{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ a $[\mathbf{y}]_\mathcal{X} = (y_1, \dots, y_n)^T$. Potom platí, že $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i$ a $\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{u}_j$ a

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{u}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j).$$

Snadno ale nahlédneme, že také $[\mathbf{x}]_\mathcal{X}^T \{f\}_\mathcal{X} [\mathbf{y}]_\mathcal{X} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$.

Předpokládejme, že čtvercová matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n splňuje (18.1). Potom pro všechna $i, j = 1, \dots, n$ platí, že $f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j) = [\mathbf{u}_i]_\mathcal{X}^T \mathbf{A} [\mathbf{u}_j]_\mathcal{Y} = a_{ij}$. Odtud plyne, že $\{f\}_\mathcal{X} = \mathbf{A}$. □

Tvrzení 18.2 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$ *dimenze* n *a buď* $f\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ *bilineární forma na tomto prostoru. Nechť* $\mathcal{X}$ *a* $\mathcal{Y}$ *jsou báze prostoru* $\mathbf{V}$. *Potom platí, že*

$$\{f\}_\mathcal{X} = \mathbf{P}^T \{f\}_\mathcal{Y} \mathbf{P},$$

kde $\mathbf{P} = [I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ *je matice přechodu od báze* $\mathcal{X}$ *k bázi* $\mathcal{Y}$.

Důkaz. Pro každou dvojici vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí, že $[\mathbf{u}]_\mathcal{X}^T \mathbf{P}^T \{f\}_\mathcal{Y} \mathbf{P} [\mathbf{v}]_\mathcal{X} = (\mathbf{P}[\mathbf{u}]_\mathcal{X})^T \{f\}_\mathcal{Y} (\mathbf{P}[\mathbf{v}]_\mathcal{X}) = ([I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}[\mathbf{u}]_\mathcal{X})^T \{f\}_\mathcal{Y} ([I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}[\mathbf{v}]_\mathcal{X}) = [\mathbf{u}]_\mathcal{Y}^T \{f\}_\mathcal{Y} [\mathbf{v}]_\mathcal{Y} = f(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Proto matice $\mathbf{P}^T \{f\}_\mathcal{Y} \mathbf{P}$ splňuje rovnost (18.1) a podle Lemmatu 18.1 platí, že $\{f\}_\mathcal{X} = \mathbf{P}^T \{f\}_\mathcal{Y} \mathbf{P}$. □

Definice 18.3 *Dvě čtvercové matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *řádu* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *se nazývají* kongruentní *(značíme* $\mathbf{A} \equiv \mathbf{B}$*), pokud existuje regulární matice* $\mathbf{P}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *pro kterou platí, že*

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P}.$$

Cvičení 18.1 *Ukažte, že relace kongruence je ekvivalencí na množině všech čtvercových matic nad tělesem* $\mathbf{T}$ *řádu* n.

Bilineární formy na daném vektorovém prostoru můžeme sčítat a násobit skaláry. Takto definujeme na množině všech těchto bilineárních forem strukturu vektorového prostoru. Definujme obě výše zmíněné operace precizně.

Definice 18.4 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$.

1. *Nechť* f, g *je dvojice bilineárních forem na prostoru* $\mathbf{V}$. Součet $(f + g)$ *definujeme předpisem*

   $$(f + g)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

   pro všechny $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

2. *Buď f bilineární forma na prostoru $\mathbf{V}$, nechť $a \in \mathbf{T}$.* Součin (af) *definujeme předpisem*

$$(af)(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(f(\mathbf{u}, \mathbf{v})),$$

pro všechny $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Tvrzení 18.3 *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Množina všech bilineárních forem na prostoru $\mathbf{V}$ tvoří spolu s výše definovanými operacemi součtu dvojice bilineárních forem a součinu bilineární formy a skaláru z tělesa $\mathbf{T}$ tvoří vektorový prostor.*

Důkaz. Nulový vektor tohoto prostoru je reprezentován bilineární formou $n: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ takovou, že $n(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ pro všechny dvojice vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Ověření všech axiomů vektorového prostoru je přímočaré a ponecháme jej proto na čtenáři. □

Definice 18.5 *Vektorový prostor tvořený všemi bilineárními formami na prostoru $\mathbf{V}$ budeme značit $\mathbf{B}(\mathbf{V})$.*

Věta 18.4 *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ dimenze n. Prostor $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ je izomorfní s $\mathbf{T}^{n \times n}$ a má tedy dimenzi n^2.*

Důkaz. Zvolme bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$. Podle Lemmatu 18.1 každé bilineární formě $f \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$ právě jedna čtvercová matice $\mathring{A} = \{f\}_{\mathcal{X}}$ řádu n splňující (18.1). Snadno nahlédneme, že $\{f + g\}_{\mathcal{X}} = \{f\}_{\mathcal{X}} + \{g\}_{\mathcal{X}}$ a $\{af\}_{\mathcal{X}} = a\{f\}_{\mathcal{X}}$ pro každé f, $g \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$ a každé $a \in \mathbf{T}$. Proto je předpisem $f \mapsto \{f\}_{\mathcal{X}}$ určeno prosté lineární zobrazení z prostoru $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ do prostoru všech čtvercových matic nad tělesem $\mathbf{T}$ řádu n. Je-li $\mathbf{A}$ čtvercová matice nad tělesem $\mathbf{T}$ řádu n je předpisem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}}^T \mathbf{A} \{\mathbf{y}\}_{\mathcal{X}}$, pro všechny $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ určena bilineární forma $f \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$ taková, že $\mathbf{A} = \{f\}_{\mathcal{X}}$. Proto je výše definované lineární zobrazení izomorfismem vektorových prostorů. Odtud již okamžitě plyne dokazované. □

Definice 18.6 *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.*

1. *Bilineární forma $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ se nazývá* symetrická, *jestliže $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ pro všechna* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

2. *Bilineární forma $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ se nazývá* antisymetrická, *jestliže $f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -f(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ pro všechna* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Snadno nahlédneme, že jak symetrické, tak antisymetrické bilineární formy tvoří podprostor vektorového prostoru $\mathbf{B}(\mathbf{V})$. Podprostor všech symetrických bilineárních forem budeme dále značit $\mathbf{S}(\mathbf{V})$ a podprostor všech antisymetrických bilineárních forem $\mathbf{A}(\mathbf{V})$.

Tvrzení 18.5 *Buď $\mathbf{T}$ těleso jehož charakteristika je různá od 2 a $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$. Každou bilineární formu $f\colon \mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{T}$ lze jednoznačně rozložit v součet $f = s_f + a_f$, symetrické bilineární formy s_f a antisymetrické bilineární formy a_f.*

Důkaz. Nejprve si uvědomme, že bilineární forma $g \in \mathbf{B}(\mathbf{V})$ která je současně symetrická a antisymetrická je nutně rovna nulové bilineární formě. Pro každou dvojici vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ je totiž potom $g(\mathbf{v},\mathbf{u}) = g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -g(\mathbf{u},\mathbf{v})$, odkud plyne, že $2g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$. Protože charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ je různá od dvou, plyne odtud, že $g(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$. Jsou-li s, t symetrické a a, b antisymetrické bilineární formy takové, že $s+a = t+b$. Potom je $s-t = b-a$ bilineární forma, která je zároveň symetrická a antisymetrická a proto je nulová. Odtud plyne, že $s = t$ a zároveň $a = b$. Vidíme tak, že každou bilineární formu lze rozložit nejvýše jedním způsobem v součet symetrické a antisymetrické bilineární formy.

Pro každou dvojici vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ položme

$$s_f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{u},\mathbf{v}) + f(\mathbf{v},\mathbf{u})}{2} \quad \text{a} \quad a_f(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \frac{f(\mathbf{u},\mathbf{v}) - f(\mathbf{v},\mathbf{u})}{2}$$

(v obou případech využíváme toho, že charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ je různá od dvou). Snadno nahlédneme, že takto definovaná zobrazení $s_f\colon \mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{T}$, resp. $a_f\colon \mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{T}$, určují symetrickou, resp. antisymetrickou, bilineární formu, a že $f = s_f + a_f$. $\square$

Předchozí tvrzení lze formulovat tak, že $\mathbf{B}(\mathbf{V}) = \mathbf{S}(\mathbf{V}) \oplus \mathbf{A}(\mathbf{V})$.

Lemma 18.6 *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ a $f\colon \mathbf{V}\times\mathbf{V}\to\mathbf{T}$ bilineární forma. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *Bilineární forma f je symetrická.*
2. *Matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ je symetrická pro každou bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$.*
3. *Matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ je symetrická pro nějakou bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$.*

Důkaz. (1. $\Rightarrow$ 2.) Předpokládejme, že je bilineární forma f symetrická, a buď $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbf{V}$. Potom pro každou dvojici vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí, že $[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}}^T \{f\}_{\mathcal{X}}^T [\mathbf{y}]_{\mathcal{X}} = ([\mathbf{y}]_{\mathcal{X}}^T \{f\}_{\mathcal{X}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{X}})^T = [\mathbf{y}]_{\mathcal{X}}^T \{f\}_{\mathcal{X}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. Proto matice $\{f\}_{\mathcal{X}}^T$ splňuje (18.1) a podle Lemmatu 18.1 je taková matice určená jednoznačně. Proto platí, že $\{f\}_{\mathcal{X}}^T = \{f\}_{\mathcal{X}}$. To znamená, že je matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ symetrická. (2. $\Rightarrow$ 3.) Zřejmé. (3. $\Rightarrow$ 1.) Buď $\mathcal{X}$ báze prostoru $\mathbf{V}$ taková, že matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ je symetrická. Potom pro každou dvojici vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [\mathbf{x}]_{\mathcal{X}}^T \{f\}_{\mathcal{X}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{X}} = ([\mathbf{x}]^T \{f\}_{\mathcal{X}} [\mathbf{y}]_{\mathcal{X}})^T = [\mathbf{y}]_{\mathcal{X}}^T \{f\}_{\mathcal{X}}^T [\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = [\mathbf{y}]_{\mathcal{X}}^T \{f\}_{\mathcal{X}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$. Vidíme, že bilineární forma f je symetrická. □

Podobně lze ukázat, že matice antisymetrických bilineárních forem jsou právě antisymetrické matice, tj. matice $\mathbf{A}$ splňující $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A}$.

Cvičení 18.2 *Buď $\mathbf{T}$ těleso charakteristiky různé od dvou a $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tímto tělesem dimeze n. Ukažte, že*

$$\dim \mathbf{S}(\mathbf{V}) = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{a} \quad \dim \mathbf{A}(\mathbf{V}) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Definice 18.7 *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad libovolným tělesem $\mathbf{T}$. Bilineární forma f na $\mathbf{V}$ se nazývá diagonalizovatelná, pokud existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$ taková, že je matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ diagonální.*

Z Lemmatu 18.6 okamžitě plyne následující:

Důsledek 18.7 *Buď f bilineární forma na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Je-li forma f diagonalizovatelná, potom je symetrická.*

Lemma 18.8 *Buď $\mathbf{T}$ těleso charakteristiky různé od dvou, $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ a $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ nenulová symetrická bilineární forma na tomto prostoru. Pak existuje vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ takový, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$.*

Důkaz. Protože je bilineární forma f nenulová, existují vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ takové, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$. Z předpokladu, že bilineární forma f je symetrická, dostaneme, že

$$0 \neq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})}{2}.$$

Proto je alespoň jedna z hodnot $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y})$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ a $f(\mathbf{y}, \mathbf{y})$ nenulová. □

Věta 18.9 *Buď $\mathbf{T}$ těleso charakteristiky různé od dvou a $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$. Bilineární forma f na $\mathbf{V}$ je symetrická právě když je diagonalizovatelná.*

Důkaz. ($\Leftarrow$) Je-li bilineární forma f diagonalizovatelná, je symetrická podle Důsledku 18.7. ($\Rightarrow$) Buď f symetrická bilineární forma na prostoru $\mathbf{V}$. Indukcí podle dimenze prostoru $\mathbf{V}$, kterou označíme n, ukážeme, že forma f je diagonalizovatelná. Každá bilineární forma na prostoru dimenze 1 je zřejmě diagonalizovatelná. Buď dáno $n > 1$ a předpokládejme, že dokazovaná implikace platí kdykoli je dimenze prostoru $\mathbf{V}$ menší než n. Je-li forma f nulová je diagonalizovatelná. Předpokládejme tedy, že f je nenulová. Potom podle Lemmatu 18.8 existuje $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ tak, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$. Zobrazením $\mathbf{y} \mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je určen lineární funkcionál $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{T}$. Označme $\mathbf{U}$ jádro tohoto funkcionálu. Potom je $\mathbf{U}$ podprostor prostoru $\mathbf{V}$ dimenze $n-1$ a protože $A(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$, je $\mathbf{x} \notin \mathbf{U}$. Označme $g\colon \mathbf{U} \times \mathbf{U} \to \mathbf{T}$ restrikci bilineární formy f na podprostor $\mathbf{U}$. Potom je zřejmě g symetrická bilineární forma na prostoru $\mathbf{U}$ a podle indukčního předpokladu existuje báze $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbf{U}$ taková, že matice $\{g\}_\mathcal{Y}$ je diagonální. Položme $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}\} \cup \mathcal{Y}$. Protože $\mathbf{x} \notin \mathbf{U}$ a $\dim \mathbf{U} = \dim \mathbf{V} - 1$, tvoří množina $\mathcal{X}$ bázi prostoru $\mathbf{V}$. Snadno nahlédneme, že

$$\{f\}_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \{g\}_\mathcal{Y} \end{pmatrix}.$$

Protože je matice $\{g\}_\mathcal{Y}$ diagonální, je pak také $\{f\}_\mathcal{X}$ diagonální. Ukázali jsme, že bilineární forma f je diagonalizovatelná. $\square$

Poznámka 18.1 *Důkaz předchozí věty dává návod jak pro symetrickou bilineární formu f najít bázi $\mathcal{X}$ tak, aby byla matice $\{f\}_\mathcal{X}$ diagonální.*

Důsledek 18.10 *Je-li charakteristika tělesa $\mathbf{T}$ různá od 2, pak je každá symetrická matice nad $\mathbf{T}$ kongruentní nějaké diagonální matici.*

Definice 18.8 *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$. Funkce $q\colon \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ se nazývá* kvadratická forma *na $\mathbf{V}$, pokud existuje symetrická bilineární forma f na $\mathbf{V}$ taková, že $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Symetrická bilineární forma f se v takovém případě nazývá* bilineární forma asociovaná *ke kvadratické formě q. Naopak q se nazývá* kvadratická forma určená *symetrickou bilineární formou f.*

Tvrzení 18.11 *Buď $\mathbf{T}$ těleso charakteristiky různé od 2, $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$ a $q\colon \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ kvadratická forma na $\mathbf{V}$. Potom je bilineární forma asociovaná ke kvadratické formě q určena jednoznačně.*

Důkaz. Buď f symetrická bilineární forma na $\mathbf{V}$ asociovaná ke q. Potom pro všechny $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ platí, že

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{q(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - q(\mathbf{u}) - q(\mathbf{v})}{2}.$$

Odtud plyne její jednoznačnost. □

Věta 18.12 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem a buď* $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ *symetrická bilineární forma. Potom existuje ortonormální báze* $\mathcal{X}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *taková, že matice* $\{f\}_{\mathcal{X}}$ *je diagonální.*

Důkaz. Buď $\mathcal{Y}$ nějaká ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$. Protože je bilineární forma f symetrická je také matice $\{f\}_{\mathcal{Y}}$ symetrická (podle Lemmatu 18.6). Podle Věty 17.15 existuje ortogonální matice $\mathbf{P}$ taková, že je součin $\mathbf{P}^{-1}\{f\}_{\mathcal{Y}}\mathbf{P}$ diagonální matice. Položme $n = \dim \mathbf{V}$ a pro každé $i = 1, \dots, n$ označme $\mathbf{x}_i = \{\mathbf{P}_{*i}\}_{\mathcal{Y}}$. Protože je báze $\mathcal{Y}$ ortonormální a matice $\mathbf{P}$ ortogonální, tvoří vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ ortonormální bázi; označme ji $\mathcal{X}$. Uvědomme si, že potom je $\mathbf{P}$ maticí přechodu od báze $\mathcal{Y}$ k bázi $\mathcal{X}$. Protože je $\mathbf{P}$ ortogonální matice, což znamená, že $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$, dostáváme rovnost $\{f\}_{\mathcal{X}} = \mathbf{P}^T\{f\}_{\mathcal{Y}}\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1}\{f\}_{\mathcal{Y}}\mathbf{P}$. To je ale diagonální matice. □

Důsledek 18.13 *Buď* q *kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem dimenze* m. *Potom existuje ortonormální báze* $\mathcal{X}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *a reálná čísla* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *taková, že pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *platí*

$$q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_m x_m^2,$$

kde $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}} = (x_1, \dots, x_m)^T$ *jsou souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{X}$.

Je-li f *symetrická bilineární forma asociovaná ke kvadratické formě* q, *lze za* $\mathcal{X}$ *volit libovolnou ortonormální bázi prostoru* $\mathbf{V}$, *pro kterou je matice* $\{f\}_{\mathcal{X}}$ *diagonální.*

Poznámka 18.2 *Všimněme si, že* $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ *jsou právě vlastní čísla matice* $\{f\}_{\mathcal{X}}$.

Lemma 18.14 *Buď* q *kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *a* f *s ní asociovaná symetrická bilineární forma. Nechť* $\mathcal{X}$ *je báze prostoru* $\mathbf{V}$ *taková, že matice* $\{f\}_{\mathcal{X}}$ *je diagonální. Položme* $\mathcal{X}^+ = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid q(\mathbf{x}) > 0\}$, $\mathcal{X}_0^- = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X} \mid q(\mathbf{x}) \leq 0\}$. *Potom platí, že*

1. *je-li* $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbf{L}(\mathcal{X}_+)$, *potom je* $q(\mathbf{u}) > 0$,
2. *je-li* $\mathbf{v} \in \mathbf{L}(\mathcal{X}_0^-)$, *potom je* $q(\mathbf{v}) \leq 0$.

Důkaz. 1. Označme vektory množiny $\mathcal{X}^+$ po řadě $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$. Buď $\mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbf{L}(\mathcal{X}^+)$. Potom je $\mathbf{u}$ lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$, existují proto reálná čísla $u_1, \dots, u_m$ taková, že $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^m u_i \mathbf{x}_i$. Protože $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, je alespoň jedno z čísel u_i nenulové. Protože je matice bilineární formy vzhledem k bázi $\mathcal{X}$ diagonální, platí, že $0 < \sum_{i=1}^m u_i^2 q(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^m u_i^2 f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^m f(u_i\mathbf{x}_i, u_i\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(u_i\mathbf{x}_i, u_j\mathbf{x}_j) = f(\sum_{i=1}^m u_i\mathbf{x}_i, \sum_{j=1}^m u_j\mathbf{x}_j) = f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = q(\mathbf{u})$. 2. Označme vektory množiny $\mathcal{X}_0^-$ po řadě $\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_k$. Buď $\mathbf{v} \in \mathbf{L}(\mathcal{X}_0^-$ libovolný vektor. Vektor $\mathbf{v}$ je lineární kombinací vektorů $\mathbf{x}'_1, \ldots, \mathbf{x}'_k$, tj. existují reálná čísla $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ taková, že $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^k v_i\mathbf{x}'_i$. Protože je matice $\{f\}_\mathcal{X}$ diagonální, platí, že $0 \geq \sum_{i=1}^k v_i^2 q(\mathbf{x}'_i) = \sum_{i=1}^m v_i^2 f(\mathbf{x}'_i, \mathbf{x}'_i) = \sum_{i=1}^m f(v_i\mathbf{x}'_i, v_i\mathbf{x}'_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f(v_i\mathbf{x}'_i, v_j\mathbf{x}'_j) = f(\sum_{i=1}^m v_i\mathbf{x}'_i, \sum_{j=1}^m v_j\mathbf{x}'_j) = f(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = q(\mathbf{v})$. □

Věta 18.15 (Sylvesterův zákon setrvačnosti.) *Buď f symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Nechť $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ jsou dvě báze prostoru $\mathbf{V}$ takové, že matice $\{f\}_\mathcal{X}$ a $\{f\}_\mathcal{Y}$ jsou diagonální. Potom se počet kladných, resp. počet záporných, resp. počet nulových prvků na diagonále matice $\{f\}_\mathcal{X}$ se rovná počtu kladných, resp. počtu záporných, resp. počtu nulových prvků na diagonále matice $\{f\}_\mathcal{Y}$.*

Důkaz. Počet nenulových prvků na diagonálách matic $\{f\}_\mathcal{X}$, resp. $\{f\}_\mathcal{Y}$ je roven jejich hodnostem. Vzhledem k tomu, že to jsou matice kongruentní, jsou jejich hodnosti stejné. Proto se také počty nulových prvků na diagonálách matic $\{f\}_\mathcal{X}$ a $\{f\}_\mathcal{Y}$ rovnají. K úplnému důkazu věty tedy stačí ověřit, že se počty kladných prvků na diagonálách matic $\{f\}_\mathcal{X}$ a $\{f\}_\mathcal{Y}$. Vzhledeme k symetrii dokonce stačí ukázat, že na diagonále matice $\{f\}_\mathcal{X}$ není více prvků než na diagonále matice $\{f\}_\mathcal{Y}$. Počet kladných prvků na diagonále matice $\{f\}_\mathcal{X}$ je roven počtu prvků množiny $\mathcal{X}^+$, který je roven dimenzi podprostoru $\mathbf{L}(\mathcal{X}^+)$. Podobně počet kladných prvků na diagonále matice $\{f\}_\mathcal{Y}$ odpovídá dimenzi prostoru $\mathbf{L}(\mathcal{Y}^+)$. Pro tu platí, že $\dim \mathbf{L}(\mathcal{Y}^+) + \dim \mathbf{L}(\mathcal{Y}_0^-) = \dim \mathbf{V}$. Pro spor předpokládejme, že $\dim \mathbf{L}(\mathcal{X}^+) > \dim \mathbf{L}(\mathcal{Y}^+)$. Potom $\dim \mathbf{L}(\mathcal{X}^+) + \dim \mathbf{L}(\mathcal{Y}_0^-) > \dim V$. Podle Věty o dimenzi součtu a průniku podprostorů je $\dim \mathbf{L}(\mathcal{X}^+) + \dim \mathbf{L}(\mathcal{Y}_0^-) = \dim(\mathbf{L}(\mathcal{X}^+) + \mathbf{L}(\mathcal{Y}_0^-)) + \dim(\mathbf{L}(\mathcal{X}^+) \cap \mathbf{L}(\mathcal{Y}_0^-))$. Odtud dostaneme, že $\dim(\mathbf{L}(\mathcal{X}^+) \cap \mathbf{L}(\mathcal{Y}_0^-)) > \dim \mathbf{V} - \dim(\mathbf{L}(\mathcal{X}^+) + \mathbf{L}(\mathcal{Y}_0^-)) \geq 0$. Proto existuje nenulový vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{L}(\mathcal{X}^+) \cap \mathbf{L}(\mathcal{Y}_0^-)$. Pro tento vektor platí podle Lemmatu 18.14.1, resp. Lemmatu 18.14.2, že $q(\mathbf{u}) > 0$, resp. $q(\mathbf{u}) \leq 0$. To je spor. □

Definice 18.9 *Buď f symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru a buď $\mathcal{X}$ báze tohoto prostoru taková, že je matice $\{f\}_\mathcal{X}$ diagonální. Potom nazýváme*

- *počet kladných prvků na diagonále matice $\{f\}_\mathcal{X}$* indexem *bilineární formy f,*

– *rozdíl mezi počtem kladných a záporných prvků na diagonále matice* $\{f\}_{\mathcal{X}}$ signaturou *bilineární formy* f,

– *hodnost matice* $\{f\}_{\mathcal{X}}$ hodností *bilineární formy* f.

Index, signatura a hodnost bilineární formy se nazývají souhrně invarianty *bilineární formy* f. *Podobně definujeme* index, signaturu, hodnost *a* invarianty *kvadratické formy* q *určené symetrickou bilineární formou* f.

Všimněte si, že libovolné dva z invariantů symetrické bilineární formy f (kvadratické formy q) jednoznačně určují ten třetí.

Definice 18.10 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor dimenze* n. *Bilineární forma* $f\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ *se nazývá* pozitivně definitní, *resp.* pozitivně semidefinitní, *jestliže se její hodnost a index rovnají* n, *resp. jestliže se její index rovná její signatuře.*

Tvrzení 18.16 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor.*

1. *Bilineární forma* $f\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ *je pozitivně semidefinitní právě když* $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ *pro každý vektor* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.

2. *Bilineární forma* $f\colon \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ *je pozitivně definitní právě když* $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) > 0$ *pro každý nenulový vektor* $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$.

Důkaz. Buď dána symetrická bilineární forma f na $\mathbf{V}$. Podle Věty 18.9 existuje báze $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ prostoru $\mathbf{V}$ taková, že je matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ diagonální.

1. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že forma f pozitivně je semidefinitní. Podle Definice 18.10 se index formy f rovná její signatuře. To znamená, že všechny prvky na diagonále matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ jsou nezáporné. Buď $\mathbf{u}$ libovolný vektor z prostoru $\mathbf{V}$. Položme $\{\mathbf{u}\}_{\mathcal{X}} = (u_1, \dots, u_n)^T$. Potom platí, že $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \{\mathbf{u}\}_{\mathcal{X}}^T \{f\}_{\mathcal{X}} \{\mathbf{u}\} = \sum_{i=1}^n f(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i) u_i^2 \geq 0$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0$ pro každý vektor $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$. Podle definice jsou je diagonála matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ tvořena prvky $f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_1), \dots, f(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_n)$, které jsou všechny nezáporné. Odtud je vidět, že je forma f pozitivně semidefinitní.

2. Dokážeme obdobně jako implikaci v předchozím bodě.

□

Věta 18.17 *Buď $f: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ pozitivně definitní bilineární forma na reálném vektorovém prostoru. Potom je předpisem $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, definován skalární součin na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$. Naopak, je-li $\mathbf{V}$ reálný vektorový prostor se skalárním součinem, je předpisem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, pro všechny $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, definována pozitivně definitní bilineární forma na $\mathbf{V}$.*

Důkaz. Vzhledem k Tvrzení 18.16.2 odpovídají axiomy skalárního součinu na reálném vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ vlastnostem charakterizujícím pozitivně definitní bilineární formy na $\mathbf{V}$. □

Poznámka 18.3 *V předchozí větě jsme ukázali, že pozitivně definitní bilineární formy ne reálných vektorových prostorech odpovídají skalárním součinům. Jiná situace je v případě komplexních vektorových prostorů. Zobrazení určené sklárními součiny na komplexních vektorových prostorech totiž nedefinují bilineární formy.*

Věta 18.18 (Sylvesterův zákon setrvačnosti pro matice.) *Buď $\mathbf{A}$ reálná symetrická matice řádu n. Nechť $\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}$ jsou reálné regulární matice řádu n takové, že součiny $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$ jsou diagonální matice. Pak se počty kladných, resp. záporných, resp. nulových prvků na hlavních diagonálách matic $\mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$ a $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}$ se rovnají.*

Důkaz. Plyne přímo z Věty 18.15. □

Definice 18.11 *Podobně jako v případě symetrických bilineárních (resp. kvadratických) forem definujeme* index, signaturu *a společně s hodností* invarianty *reálných symetrických matic.*

Nechť p, s a n jsou nezáporná celá čísla taková, že $2s \leq 2p \leq s + n$. Symbolem $\mathbf{E}_{p,s,n}$ označme diagonální matici (e_{ij}) řádu n takovou, že

$$e_{ii} = \begin{cases} 1 & : 1 \leq i \leq p, \\ 0 & : p < i \leq n + s - p, \\ -1 & : n + s - p < i \leq n. \end{cases}$$

Například

$$\mathbf{E}_{3,1,6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lemma 18.19 *Buď* $\mathbf{A}$ *reálná symetrická matice řádu* n *indexu* p *a signatury* s*. Potom platí, že* $2s \leq 2p \leq n + s$ *a matice* $\mathbf{A}$ *je kongruentní matici* $\mathbf{E}_{p,s,n}$*.*

Důkaz. Uvažme symetrickou bilineární formu f na aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$ určenou maticí $\mathbf{A}$ (tj. předpisem $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ pro všechny $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.) Podle Věty 18.9 existuje báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{R}^n$ taková, že matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ je diagonální. Navíc můžeme prvky báze $\mathcal{X}$ uspořádat tak, že matice (označme ji $\mathbf{D} = (d_{ij})$) bilineární formy f vzhledem k výsledné bázi je diagonální a platí $d_{11} \geq \ldots \geq d_{nn}$. Vzhledem k Větě 18.15 je p počet kladných prvků na diagonále matice $\mathbf{D}$. Označme q počet záporných prvků na této diagonále. Podle definice signatury je pak $s = p - q$, dokud $0 \leq q = p - s$ a $p + q \leq n$, odkud $2p \leq n + s$. Označme $\mathbf{C} = (c_{ij})$ diagonální matici takovou, že $c_{ii} = \sqrt{|d_{ii}|}$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Potom je $\mathbf{E}_{p,s,n} = \mathbf{C}^T\mathbf{D}\mathbf{C}$ a tedy $\mathbf{D} \equiv \mathbf{E}_{p,s,n}$. Protože $\mathbf{A} \equiv \mathbf{D}$, dostáváme tak $\mathbf{A} \equiv \mathbf{E}_{p,s,n}$. $\square$

Tvrzení 18.20 *Dvě reálné symetrické matice téhož řádu jsou kongruentní právě tehdy když mají stejné invarianty.*

Důkaz. Nechť $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ jsou reálné symetrické matice řádu n. ($\Rightarrow$) Jsou-li matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ kongruentní, pak mají stejné invarianty podle Důsledku 18.18. ($\Leftarrow$) Předpokládejme naopak, že matice $\mathbf{A}$ mají stejný index p a stejnou signaturu s. Podle Lemmatu 18.19 jsou obě matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ kongruentní matici $\mathbf{E}_{p,s,n}$ a tedy jsou i vzájemně kongruentní. $\square$

Definice 18.12 *Reálná symetrická matice* $\mathbf{A}$ *řádu* n *se nazývá* pozitivně definitní*, resp.* pozitivně semidefinitní*, jestliže se její hodnost a index rovnají* n*, resp. jestliže se její index rovná její signatuře.*

Věta 18.21 *Pro reálnou symetrickou matici* $\mathbf{A}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní*

1. $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní,*
2. *všechna vlastní čísla matice* $\mathbf{A}$ *jsou nezáporná,*
3. *existuje matice* $\mathbf{U}$ *taková, že* $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{A}$*.*

Důkaz. ($1 \Rightarrow 3$) Označme n hodnost a p index matice $\mathbf{A}$. Podle předpokladu je matice $\mathbf{A}$ pozitivně semidefinitiní a tedy její index je roven její signatuře. Podle Lemmatu 18.19 pak platí, že $\mathbf{A} \equiv \mathbf{E}_{p,p,n}$. Tato matice je diagonální, na prvních p místech její diagonály je číslo 1 a zbylé prvky na diagonále jsou nulové. Proto platí, že $\mathbf{E}_{p,p,n} = \mathbf{E}_{p,p,n}^T \mathbf{E}_{p,p,n}$. Protože jsou matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{E}_{p,p,n}$ kongruentní, existuje regulární matice $\mathbf{Q}$ tak, že $\mathbf{A} = \mathbf{Q}^T \mathbf{E}_{p,p,n} \mathbf{Q}$. Potom pro matici $\mathbf{U} = \mathbf{E}_{p,p,n}\mathbf{Q}$ platí, že $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{A}$. (3 $\Rightarrow$ 2) Buď λ libovolné vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ vlatní vektor příslušný tomuto vlastnímu číslu. Potom je $\lambda\|\mathbf{x}\|^2 = \lambda\mathbf{x}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T(\lambda\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{U}^T\mathbf{U}\mathbf{x} = (\mathbf{U}\mathbf{x})^T(\mathbf{U}\mathbf{x}) = \|\mathbf{U}\mathbf{x}\|^2$. Proto

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2} \geq 0.$$

(2 $\Rightarrow$ 1) Matice $\mathbf{A}$ je symetrická a tedy podle Věty 17.15 existuje ortogonální matice $\mathbf{P}$ taková, že $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ je diagonální matice na jejíž diagonále jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Protože je matice $\mathbf{P}$ ortogonální, platí, že $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$ a proto $\mathbf{D} = \mathbf{P}^T\mathbf{A}\mathbf{P}$. Speciálně je matice $\mathbf{A}$ s maticí $\mathbf{D}$ kongruentní. Protože jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ nezáporná, je pak matice $\mathbf{A}$ pozitivně definitní. $\square$

Věta 18.22 *Pro reálnou symetrickou matici* $\mathbf{A}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní*

1. $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní,*
2. *všechna vlastní čísla matice* $\mathbf{A}$ *jsou kladná,*
3. *existuje regulární matice* $\mathbf{U}$ *taková, že* $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{A}$.

Důkaz. Důkaz je obdobný jako ve Větě 18.22. V důkazu implikace (1 $\Rightarrow$ 3) dostaneme, že pro pozitivně definitní matici $\mathbf{A}$ je $p = n$ a tedy $\mathbf{E}_{p,p,n} = \mathbf{E}_{n,n,n} = \mathbf{I}_n$. Proto je matice $\mathbf{U} = \mathbf{E}_{p,p,n}\mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ regulární a platí, že $\mathbf{A} = \mathbf{U}^T\mathbf{U}$. (3 $\Rightarrow$ 2) Stejně jako v důkazu odpovídající implikace Věty 18.22 ukážeme, že je-li vlastní číslo matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{x}$ odpovídající vlastní vektor, potom platí, že

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{U}\mathbf{x}\|^2}{\|\mathbf{x}\|^2}.$$

Protože je matice $\mathbf{U}$ regulární a vektor $\mathbf{x}$ nenulový (vlastní vektory jsou podle definice nenulové), je $\mathbf{U}\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Proto je $\lambda > 0$. (2 $\Rightarrow$ 1) Stejně jako v důkazu Věty 18.22 najdeme podle Věty 17.15 diagonální matici $\mathbf{D}$ kongruentní matici $\mathbf{A}$. Přitom hlavní diagonála matice $\mathbf{D}$ je tvořena vlastními čísly matice $\mathbf{A}$. Protože jsou všechna vlastní čísla matice $\mathbf{A}$ kladná, je podle Věty 18.15 matice $\mathbf{A}$ pozitivně definitní. $\square$

Analogií Věty 18.17 zformulovanou pro matice je následující věta:

Věta 18.23 *Je-li* $\mathbf{A}$ *pozitivně definitní matice řádu* n*, pak je předpisem* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}$ *pro všechny* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ *definován skalární součin na* $\mathbf{R}^n$*. Naopak, je-li* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *skalární součin na* $\mathbf{R}^n$*, pak existuje pozitivně definitní matice* $\mathbf{B}$ *taková, že* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{y}$ *pro všechny* $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$