Kapitola 18

Bilineární a kvadratické formy

Definice 18.1 $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor nad* $\mathbf{T}$. Bilineární forma *na prostoru* $\mathbf{V}$ *je zobrazení* $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ *splňující podmínky*

1. $f(a\mathbf{x} + b\mathbf{y}, \mathbf{z}) = af(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + bf(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ *a každé* $a, b \in \mathbf{T}$,

2. $f(\mathbf{x}, a\mathbf{y} + b\mathbf{z}) = af(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + bf(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbf{V}$ *a každé* $a, b \in \mathbf{T}$.

Příklad 18.1 Bilineární forma na $\mathbf{T}^n$ definovaná maticí $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n.

Definice 18.2 *Matice bilineární formy* f *vzhledem k bázi* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *je definována jako matice* $\{f\}_{\mathcal{X}} = (a_{ij})$, *kde* $a_{ij} = f(\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j)$ *pro každé* $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Tvrzení 18.1 *Jak se změní matice bilineární formy, změníme-li bázi. Je-li* f *bilineární forma na prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$, $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *a* $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *a* $\mathbf{P} = (p_{ij})$ *matice přechodu od báze* $\mathcal{X}$ *k bázi* $\mathcal{Y}$, *pak platí* $\{f\}_{\mathcal{Y}} = \mathbf{P}^T \{f\}_{\mathcal{X}} \mathbf{P}$.

Definice 18.3 *Dvě čtvercové matice* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *řádu* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *se nazývají* kongruentní, *pokud existuje regulární matice* $\mathbf{P}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$, *pro kterou platí* $\mathbf{A} = \mathbf{P}^T\mathbf{B}\mathbf{P}$.

Cvičení 18.1 *Relace kongruence je ekvivalence na množině všech čtvercových matic řádu n nad tělesem $\mathbf{T}$.*

Definice 18.4 1. *Jsou-li f, g dvě bilineární formy na prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak definujeme jejich* součet *$f+g$ jako bilineární formu, pro kterou platí $(f+g)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,*

2. *je-li f bilineární forma na $\mathbf{V}$ a $a \in \mathbf{T}$, pak definujeme součin af jako bilienární formu na $\mathbf{V}$, pro kterou platí $(af)(\mathbf{x}) = af(\mathbf{x})$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$*

Tvrzení 18.2 *Množina všech bilineárních forem na $\mathbf{V}$ s prvě definovanými operacemi sčítání bilineárních forem a násobení bilineární formy skalárem tvoří vektorový prostor.*

Vektorový prostor všech bilineárních forem na $\mathbf{V}$ budeme označovat $\mathbf{B}(\mathbf{V})$.

Věta 18.3 *Prostor $\mathbf{B}(\mathbf{V})$ je izomorfní s $\mathbf{T}^{n\times n}$, kde $n = \dim \mathbf{V}$. Má dimenzi n^2. Pro každou bilineární formu existuje právě jedna matice $\mathbf{A}$ taková, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}_T \mathbf{A} \mathbf{y}$.*

Definice 18.5 *Bilineární forma f na prostoru $\mathbf{V}$ se nazývá* symetrická, *platí-li $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.*

Věta 18.4 *Bilineární forma je symetrická právě když její matice vzhledem k libovolné bázi je symetrická.*

Definice 18.6 *Bilineární forma f na $\mathbf{V}$ se nazývá* diagonalizovatelná, *pokud existuje báze $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ve $\mathbf{V}$ taková, že matice $\{f\}_{\mathcal{X}}$ je diagonální.*

Důsledek 18.5 *Je-li f diagonalizovatelná, je symetrická.*

Lemma 18.6 *Buď f nenulová symetrická bilineární forma na $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ a nechť charakteristika $\mathbf{T}$ je různá od 2. Pak existuje $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ takové, že $f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \neq 0$.*

Věta 18.7 *Každá symetrická bilineární forma na prostporu $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$, kde charakteristika $\mathbf{T}$ je různá od 2, je diagonalizovatelná.*

Důsledek 18.8 *Je-li charakteristika $\mathbf{T}$ různá od 2, pak je každá symetrická matice nad $\mathbf{T}$ kongruentní nějaké diagonální matici.*

Příklad 18.2 Diagonalizace symetrických matic pomocí elementárních řádkových a sloupcových úprav.

Definice 18.7 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{T}$*. Funkce* $q : \mathbf{V} \to \mathbf{T}$ *se nazývá* kvadratická forma *na* $\mathbf{V}$*, pokud existuje symetrická bilineární forma* f *na* $\mathbf{V}$ *taková, že* $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$*. Bilineární forma* f *se v takovém případě nazývá* bilineární forma asociovaná ke kvadratické formě q*.*

Lemma 18.9 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{T}$ *a charakteristika* $\mathbf{T}$ *nechť je různá od 2. Je-li* q *kvadratická forma na* $\mathbf{V}$*, pak je bilineární forma asociovaná ke* q *určená jednoznačně.*

Příklad 18.3 Reálný kvadratický polynom v n proměnných jako kvadratická forma nad $\mathbf{R}^n$.

Věta 18.10 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem a* f *symetrická bilineární forma na* $\mathbf{V}$*. Pak existuje ortonormální báze* $\mathcal{X}$ *ve* $\mathbf{V}$ *taková, že* $\{f\}_{\mathcal{X}}$ *je diagonální.*

Důsledek 18.11 *Nechť* q *je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem. Pak existuje ortonormální báze* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *ve* $\mathbf{V}$ *a reálná čísla* $\lambda_1 \ldots, \lambda_n$ *taková, že pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *platí*

$$q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^2,$$

kde $[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = (a_1, \ldots, a_n)^T$ *jsou souřadnice vektoru* $\mathbf{x}$ *vzhledem k bázi* $\mathcal{X}$*, tj.* $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{u}_i$*.*

Je-li f *bilineární forma asociovaná ke* q*, pak lze za* $\mathcal{X}$ *zvolit libovolnou ortonormální bázi takovou, že matice* $\{f\}_{\mathcal{X}}$ *je diagonální.*

Příklad 18.4 Jak vypadá plocha v $\mathbf{R}^3$ definovaná rovnicí

$$2t_1^2 + 6t_1t_2 + 5t_1^2 - 2t_2t_3 + 2t_3^2 + 3t_1 - 2t_2 - t_3 + 14 = 0.$$

Věta 18.12 ***Sylvesterův zákon setrvačnosti pro symetrické bilineární formy*** *Buď f symetrická bilineární forma na reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem* $\mathbf{V}$. *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dvě báze ve* $\mathbf{V}$ *takové, že matice $\mathbf{A} = \{f\}_\mathcal{X}$ a $\mathbf{B} = \{f\}_\mathcal{Y}$ jsou diagonální, pak počet kladných prvků na hlavní diagonále v* $\mathbf{A}$ *se rovná počtu kladných prvků na hlavní diagonále v* $\mathbf{B}$. *Podobně platí rovnost pro počty záporných prvků na hlavních diagonálách obou matic.*

Definice 18.8 *Počet kladných prvků v diagonální matici $\{f\}_\mathcal{X}$ symetrické bilineární formy f na reálném vektorovém prostoru se skalárním součinem* $\mathbf{V}$ *vzhledem k bázi $\mathcal{X}$ se nazývá* index bilineární *formy f. Rozdíl mezi počtem kladných a záporných prvků na hlavní diagonále $\{f\}_\mathcal{X}$ se nazývá* signatura bilineární formy f. *Hodnost matice $\{f\}_\mathcal{X}$ se nazývá* hodnost bilineární formy f. *Index, signatura a hodnost bilineární formy se nazývají souhrně* invarianty bilineární formy f.

Podobně definujeme index, signaturu, hodnost a invarianty *kvadratické formy $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$.*

Všimněte si, že libovolné dva z těchto invariantů jednoznačně určují ten třetí.

Důsledek 18.13 *Sylvesterův zákon setrvačnosti pro reálné symetrické matice. Jsou-li* $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$ *regulární matice takové, že* $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ *a* $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}$ *jsou diagonální matice, pak počet kladných prvků na hlavní diagonále v* $\mathbf{P}^T\mathbf{AP}$ *se rovná počtu kladných prvků na hlavní diagonále v* $\mathbf{Q}^T\mathbf{AQ}$. *Podobně platí rovnost pro počty záporných prvků na hlavních diagonálách obou matic.*

Definice 18.9 *Index a signatura symetrických reálných matic.*

Důsledek 18.14 *Dvě reálné symetrické matice jsou kongruentní právě tehdy když mají stejné invarianty.*

Definice 18.10 *Reálná symetrická matice* $\mathbf{A}$ *řádu n se nazzývá* pozitivně definitní, *jestliže se její hodnost a index rovnají n. Nazývá se* pozitivně semidefinitní, *pokud se její index rovná signatuře.*

Věta 18.15 *Pro reálnou symetrickou matici* $\mathbf{A}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní*

1. $\mathbf{A}$ *je pozitivně semidefinitní,*

2. *všechna vlastní čísla matice* $\mathbf{A}$ *jsou nezáporná,*

3. *existuje matice* $\mathbf{U}$ *taková, že* $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{A}$.

Věta 18.16 *Pro reálnou symetrickou matici* $\mathbf{A}$ *řádu* n *jsou následující podmínky ekvivalentní*

1. $\mathbf{A}$ *je pozitivně definitní,*

2. *všechna vlastní čísla matice* $\mathbf{A}$ *jsou kladná,*

3. *existuje matice* $\mathbf{U}$ *taková, že* $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{A}$ *a hodnost* $\mathbf{U}$ *se rovná* n.

Věta 18.17 *Je-li* $\mathbf{A}$ *pozitivně definitní matice řádu* n, *pak předpis* $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ *definuje skalární součin na* $\mathbf{R}^n$. *Naopak, je-li* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *skalární součin na* $\mathbf{R}^n$, *pak existuje pozitivně definitní matice* $\mathbf{B}$ *taková, že* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.

Příklad 18.5 Konstrukce z tyčí v reálném prostoru dimenze n.

Věta 18.18 *Je-li* $\mathbf{A}$ *pozitivně definitní matice řádu* n, *pak předpis* $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{y}$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$ *definuje skalární součin na* $\mathbf{R}^n$. *Naopak, je-li* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ *skalární součin na* $\mathbf{R}^n$, *pak existuje pozitivně definitní matice* $\mathbf{B}$ *taková, že* $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{y}$ *pro každé* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$.