Kapitola 17

Normální, ortogonální a unitární zobrazení

V této kapitole budeme zkoumat výhradně prostory se skalárním součinem. Těleso skalárů proto vždy bude buďto těleso $\mathbf{R}$ reálných čísel nebo těleso $\mathbf{C}$ komplexních čísel.

Lemma 17.1 *Nechť A je lineární zobrazení na prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem. Je-li λ vlastní číslo lineárního zobrazení A, potom je $\overline{\lambda}$ vlastní číslo adjungovaného zobrazení A^*.*

Důkaz. Buď $\mathcal{X}$ ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$. Podle Věty 16.11 platí, že $[A]_{\mathcal{X}}^* = [A^*]_{\mathcal{X}}$. Protože je λ vlastní číslo zobrazení A je $p_A(\lambda) = \det([A]_{\mathcal{X}} - \lambda\mathbf{I}) = 0$. Aplikujeme-li Tvrzení 16.12 dostaneme, že $([A]_{\mathcal{X}} - \lambda\mathbf{I})^* = [A]_{\mathcal{X}}^* - \overline{\lambda}\mathbf{I} = [A^*]_{\mathcal{X}} - \overline{\lambda}\mathbf{I}$. Platí, že $\det\mathbf{B}^* = \det\overline{\mathbf{B}}^T = \det\overline{\mathbf{B}} = \overline{\det\mathbf{B}}$ pro každou komplexní čtvercovou matici řádu n. Proto $p_{A^*}(\overline{\lambda}) = \det([A^*]_{\mathcal{X}} - \overline{\lambda}\mathbf{I}) = \det([A]_{\mathcal{X}} - \lambda\mathbf{I})^* = \overline{\det([A]_{\mathcal{X}} - \lambda\mathbf{I})} = \overline{0} = 0$. Proto je $\overline{\lambda}$ vlastním číslem adjungovaného zobrazení A^*. $\square$

Připomeňme si několik základních vlastností polynomů nad daným tělesem $\mathbf{T}$. Polynomy lze dělit se zbytkem. To znamená, že je-li g nenulový polynom stupně k pak pro každý polynom f najdeme pomocí Eukleidova algoritmu jednoznačně určené polynomy h a r tak, že stupeň polonymu r je menší než k a $f = gh + r$. Řekneme, že polynom g dělí polynom f, značíme $g \mid h$, existuje-li polynom h tak, že $f = gh$. Prvek $a \in \mathbf{T}$ je kořenem polynomu f právě když $(x - a) \mid f$. Vydělíme-li totiž polynom f polynomem $(x - a)$ se zbytkem, dostaneme $f(x) = (x - a)g(x) + r$, kde r je polynom stupně menšího než jedna. To znamená, že $r \in \mathbf{T}$ a snadno nahlédneme, že

a je kořenem polynomu f právě když je $r = 0$. To nastane právě tehdy když $(x - a) \mid f(x)$.

Lemma 17.2 *Nechť f, g jsou polynomy nad tělesem $\mathbf{T}$ takové, že $g \mid f$. Jestliže se polynom f rozkládá v součin lineárních činitelů, pak se také polynom g rozkládá v součin lineárních činitelů.*

Důkaz. Lemma ukážeme indukcí podle stupně polynomu f. Je-li stupeň polynomu f nejvýše 1 tvrzení zřejmě platí. Předpokládejme, že f je polynom stupně $n \geq 1$ a že tvrzení platí pro všechny polynomy menšího stupně. Podle předpokladu existuje polynom h tak, že $f = gh$. Buď $f(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_n)$ rozklad polynomu f v součin lineárních činitelů, kde $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{T}$. Polome $f_n(x) = (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1})$ a všimněme si, že $0 = f(a_n) = g(a_n)h(a_n)$ a tedy a_n je kořenem některého z polynomů g a h. Je-li $g(a_n) = 0$, je $g(x) = g_n(x)(x - a_n)$ a $f_n = g_n h$. Podle indukčního předpokladu (stupeň polynomu f_n je $n - 1$) se polynom g_n rozkládá v součin lineárních činitelů. Potom je i polynom $g(x) = g_n(x)(x - a_n)$ součinem lineárních činitelů. Je-li $h(a_n) = 0$, potom je $h(x) = h_n(x)(x - a_n)$ pro nějaký polynom h_n nad tělesem $\mathbf{T}$. Pak platí, že $f_n = gh_n$ a polynom g se rozkládá v součin lineárních činitelů podle indukčního předpokladu. $\square$

Lemma 17.3 *Buď $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení a $\mathbf{U}$ invariantní podprostor prostoru $\mathbf{V}$ vzhledem k zobrazení A. Označme B restrikci zobrazení A na podprostor $\mathbf{U}$ a buď p_A, resp. p_B charakteristický polynom zobrazení A, resp. B. Potom polynom p_B dělí polynom p_A.*

Důkaz. Položme $n = \dim \mathbf{V}$ a $m = \dim \mathbf{U}$. Zvolme bázi $\mathcal{Y}$ podprostoru $\mathbf{U}$ a rozšiřme ji na bázi $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$. Protože je $\mathbf{U}$ invariantní podprostor zobrazení A, je matice tohoto zobrazení vzhledem k bázi $\mathcal{X}$ tvaru

$$[A]_{\mathcal{X}} = \begin{pmatrix} [B]_{\mathcal{Y}} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{C}$, resp. $\mathbf{D}$ jsou matice řádu $m \times (n-m)$, resp. $(n-m) \times (n-m)$. Odtud snadno nahlédneme, že $p_A = p_B \cdot p_{\mathbf{D}}$, kde $p_{\mathbf{D}}$ je charakteristický polynom matice D. $\square$

Věta 17.4 (Schurova věta) *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$ (komplexních nebo reálných čísel) se skalárním součinem a $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení na tomto prostoru. Předpokládejme, že charakteristický polynom p_A zobrazení A se rozkládá nad tělesem $\mathbf{T}$ v součin lineárních činitelů. Potom existuje ortonormální báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$ taková, že matice $[A]_{\mathcal{X}}$ je horní trojúhelníková.*

Důkaz. Větu ukážeme indukcí podle dimenze n prostoru $\mathbf{V}$. Tvrzení zřejmě platí pokud $n = 1$. Předpokládejme, že $n > 1$ a tvrzení platí kdykoliv je prostor $\mathbf{V}$ dimenze menší než n. Protože se charakteristický polynom p_A zobrazení A rozkládá nad tělesem $\mathbf{T}$ v součin lineárních činitelů, má v tomto tělese nějaký kořen a tedy zobrazení A má v tělese $\mathbf{T}$ nějaké vlastní číslo λ. Podle Lemmatu 17.1 je $\overline{\lambda}$ vlastní číslo adjungovaného zobrazení A^*. Buď $\mathbf{v}$ vlastní vektor zobrazení A^* příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$ takový, že $\|\mathbf{v}\| = 1$. Označme $\mathbf{U}$ ortogonální doplňek vektoru $\mathbf{v}$ v prostoru $\mathbf{V}$. Podle Tvrzení 14.6 je $\dim \mathbf{U} = n - 1$. Nechť $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ je libovolný vektor. Potom $\langle \mathbf{v}, A(\mathbf{u})\rangle = \langle A^*(\mathbf{v}), \mathbf{u}\rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = \overline{\lambda}\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle = 0$. Proto $A(\mathbf{u}) \in \mathbf{U}$ a tedy $A(\mathbf{U}) \subseteq \mathbf{U}$, jinými slovy, $\mathbf{U}$ je invariantní podprostor zobrazení A. Označme B restrikci zobrazení A na podprostor $\mathbf{U}$. Potom charakteristický polynom zobrazení p_B zobrazení B dělí p_A podle Lemmatu 17.3 a tedy se rozkládá na lineární činitele podle Lemmatu 17.2. Podle indukčního předpokladu existuje ortonormální báze $\mathcal{Y}$ prostoru $\mathbf{U}$ taková, že matice $[B]_\mathcal{Y}$ je horní trojúhelníková. Položme $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \cup \{\mathbf{v}\}$. Všimněme si, že $\mathcal{X}$ je ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$ a matice zobrazení A vzhledem k této bázi je tvaru

$$[A]_\mathcal{X} = \begin{pmatrix} [B]_\mathcal{Y} & \mathbf{c} \\ \mathbf{0} & d \end{pmatrix},$$

kde $\mathbf{c} \in \mathbf{T}^{n-1}$ a $d \in \mathbf{T}$. Protože je dle předpokladu matice $[B]_\mathcal{Y}$ horní trojúhelníková, je také matice $[A]_\mathcal{X}$ horní trojúhelníková. □

Definice 17.1 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor a* $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení. Řekneme, že* A *je* normální zobrazení, *jestliže* $A^*A = AA^*$.

Buď $\mathbf{A}$ *čtvercová matice řádu* n *nad tělesem komplexních čísel. Řekneme, že* $\mathbf{A}$ *je* normální matice, *jestliže platí* $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$.

Tvrzení 17.5 *Nechť* $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je normální lineární zobrazení. Pak platí:*

1. $\|A(\mathbf{x})\| = \|A^*(\mathbf{x})\|$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

2. *Pro každý skalár* λ *je zobrazení* $A - \lambda I$, *kde* I *značí identické zobrazení, také normální.*

3. *Je-li* $\mathbf{x}$ *vlastní vektor zobrazení* A *příslušný vlastnímu číslu* λ, *je* $\mathbf{x}$ *vlastní vektor lineárního zobrazení* A^* *příslušný vlastnímu číslu* $\overline{\lambda}$.

4. *Jsou-li* $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ *vlastní vektory lineárního zobrazení* A, *příslušné různým vlastním číslům* λ_1 *a* λ_2, *potom jsou vektory* $\mathbf{x}_1$ *a* $\mathbf{x}_2$ *na sebe kolmé.*

Důkaz.

1. Z normality zobrazení A dostaneme, že $\|A(\mathbf{x})\|^2 = \langle A(\mathbf{x}), A(\mathbf{x})\rangle = \langle A^*A(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle = \langle AA^*(\mathbf{x}), \mathbf{x}\rangle = \overline{\langle \mathbf{x}, AA^*(\mathbf{x})\rangle} = \overline{\langle A^*(\mathbf{x}), A^*(\mathbf{x})\rangle} = \|A^*(\mathbf{x})\|^2$. Po odmocnění dostaneme dokazovanou rovnost.

2. Tento bod plyne snadno z Tvrzení 16.12. Výpočet ponecháme jako cvičení.

3. Položme $B = A - \lambda I$. Protože je $\mathbf{x}$ vlastní vektor zobrazení A příslušný vlastnímu číslu λ, je $B(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. Z Tvrzení 16.12 plyne, že $B^* = A^* - \overline{\lambda} I$ a vzhledem k předchozímu bodu je B normální zobrazení, t.j., $BB^* = B^*B$. Odtud plyne, že $\langle B^*(\mathbf{x}), B^*(\mathbf{x})\rangle = \langle B^*(\mathbf{x}), B^*(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}, BB^*(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}, BB^*(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}, B^*B(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}, B^*(\mathbf{0})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{0}\rangle = 0$. Proto je $B^*(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, odkud plyne dokazované.

4. Vzhledem k předchozímu bodu platí, že $\lambda_2\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = \langle \mathbf{x}_1, \lambda_2\mathbf{x}_2\rangle = \langle \mathbf{x}_1, A(\mathbf{x}_2)\rangle = \langle A^*(\mathbf{x}_1), \mathbf{x}_2\rangle = \langle \overline{\lambda_2}\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = \lambda_2\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle$. Odtud plyne, že $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = 0$. Vzhledem k tomu, že jsou vlastní čísla λ_1 a λ_2 různá, dostáváme odtud, že $\langle \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\rangle = 0$.

□

Věta 17.6 *Buď $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ endomorfismus komplexního vektorového prostoru $\mathbf{V}$. Potom je A normální lineární zobrazení právě když existuje ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$ složená z vlastních vektorů zobrazení A.*

Důkaz. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že existuje ortonormální báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$ složená z vlastních vektorů zobrazení A. Potom je matice $[A]_{\mathcal{X}}$ zobrazení A vzhledem k bázi $\mathcal{X}$ diagonální a vzhledem k Větě 16.11 je $[A^*]_{\mathcal{X}} = [A]^*_{\mathcal{X}}$. Proto je matice $[A^*]_{\mathcal{X}}$ také diagonální a obě matice spolu komutují. Proto platí, že

$$[AA^*]_{\mathcal{X}} = [A]_{\mathcal{X}}[A^*]_{\mathcal{X}} = [A^*]_{\mathcal{X}}[A]_{\mathcal{X}} = [A^*A]_{\mathcal{X}}.$$

Odtud dostáváme, že $AA^* = A^*A$.

($\Rightarrow$) Předpokládejme, že A je normální lineární zobrazení. Implikaci ukážeme indukcí podle dimenze prostoru $\mathbf{V}$. V případě, že $\dim \mathbf{V} = 1$ je zřejmě splněna. Buď $n > 1$ a předpokládejme, že dokazovaná implikace platí kdykoli je $\dim \mathbf{V} < n$ a nechť $\dim \mathbf{V} = n$. Protože uvažujeme prostor $\mathbf{V}$ nad algebraicky uzavřeným tělesem komplexních čísel rozkládá se charakteristický polynom zobrazení $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ v součin lineárních činitelů. Podle Schurovy Věty 17.4 existuje ortonormální báze $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\}$ prostoru $\mathbf{V}$ taková, že matice $[A]_{\mathcal{X}}$ je horní trojúhelníková. Položme $\mathbf{U} = \mathbf{L}(\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{n-1}\})$ a uvědomme si, že z předchozího plyne, že $\mathbf{U} = \{\mathbf{x}_n\}^\perp$ je invariantní podprostor zobrazení A dimenze $n-1$. Restrikce zobrazení A na podprostor $\mathbf{U}$ je opět normální lineární zobrazení a podle indukčního předpokladu tak existuje ortonormální $\mathcal{Y}$ složená z jejích vlastních vektorů. Ty jsou však zřejmě vlastními vektory zobrazení A. Ukážeme, že $\mathbf{x}_n$ je vlastní vektor zobrazení A. Podle Tvrzení 17.5 stačí ukázat, že $\mathbf{x}_n$ je vlastní vektor zobrazení A^*. Pro každé $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ je $\langle A^*(\mathbf{x}_n), \mathbf{u}\rangle = \langle \mathbf{x}_n, A(\mathbf{u})\rangle = 0$, neboť $A(\mathbf{u}) \in \mathbf{U}$ (protože je $\mathbf{U}$ invariantní podprostor zobrazení A) a $\mathbf{U} = \{\mathbf{x}_n\}^\perp$. Odtud plyne, že $\mathcal{Y} \cup \{\mathbf{x}_n\}$ je hledaná ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$ složená z vlastních vektorů zobrazení A. □

Definice 17.2 *Lineární zobrazení $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ se nazývá* samoadjungované *(též* hermitovské*), pokud platí, že $A = A^*$.*

Reálná (resp. komplexní) matice $\mathbf{A}$ se nazývá symetrická *(resp.* hermitovská*, pokud platí, že $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.*

Lemma 17.7 *Nechť $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je samoadjungované lineární zobrazení.*

1. *Potom jsou všechna vlastní čísla zobrazení A reálná.*
2. *Je-li $\mathbf{V}$ prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ reálných čísel, polynom p_A se rozkládá v součin lineárních činitelů.*

Důkaz.

1. Je-li λ vlastní číslo zobrazení A a $\mathbf{x}$ vlastní vektor příslušný λ, je podle Tvrzení 17.5(3) $\mathbf{x}$ vlastní vektor příslušný vlastnímu zobrazení A^* příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$. Protože je zobrazení A samoadjungované, je $A = A^*$ a tedy $\lambda = \overline{\lambda}$. To znamená, že $\lambda \in \mathbf{R}$.
2. Zvolme libovolnou bázi prostoru $\mathbf{V}$ a buď $\mathbf{A}$ matice zobrazení A vzhledem k této bázi. Potom je $p_A = p_{\mathbf{A}}$. Nad tělesem komplexních čísel se polynom $p_{\mathbf{A}}$ rozkládá v součin lineárních činitelů, přitom jeho kořeny jsou právě vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Matice samoadjungovaného zobrazení je hermitovská, a proto $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$. Podle Tvrzení 17.5(3) jsou všechna vlastní čísla hermitovské matice reálná a tedy polynom $p_{\mathbf{A}}$ se rozkládá v součin lineárních činitelů nad $\mathbf{R}$.

□

Věta 17.8 *Buď* $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *endomorfismus* reálného *prostoru* $\mathbf{V}$*. Potom je* A *samoadjungované zobrazení právě když existuje ortonormální báze prostoru* $\mathbf{V}$ *složená z vlastních vektorů zobrazení* A*.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Podle Lemmatu 17.7 se charakteristický polynom zobrazení A rozkládá v součin lineárních činitelů. Existenci ortonormální báze složené z vlastních vektorů zobrazení A ukážeme pomocí Schurova lemmatu podobně jako ve Větě 17.6. ($\Leftarrow$) Buď $\mathcal{X}$ ortonormální báze složená z vlastních vektorů zobrazení A. Matice $[A]_{\mathcal{X}}$ vzhledem k bázi složené z vlastních vektorů zobrazení A je diagonální a protože je reálná, platí, že $[A]_{\mathcal{X}} = [A]^*_{\mathcal{X}}$. Protože je $\mathcal{X}$ ortonormální báze, plyne z Věty 16.11, že $[A]^*_{\mathcal{X}} = [A^*]_{\mathcal{X}}$. Odtud dostáváme, že $A = A^*$. □

Definice 17.3 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{C}$ *(resp. nad* $\mathbf{R}$*). Lineární zobrazení* $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *se nazývá* unitární *(resp.* ortogonální*), jestliže*

$$\langle A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

pro každé dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$*.*

Věta 17.9 *Buď* $\mathbf{V}$ *komplexní (resp. reálný) vektorový prostor. Pro lineární zobrazení* $A: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. $AA^* = A^*A = I$*, kde* $I: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je identické zobrazení.*
2. A *je unitární (resp. ortogonální) zobrazení.*
3. *Je-li* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *ortonormální báze prostoru* $\mathbf{V}$ *je* $A(\mathcal{X}) = \{A(\mathbf{u}_1), \ldots, A(\mathbf{u}_n)\}$ *opět ortonormální báze.*
4. *Existuje ortonormální báze* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *prostoru* $\mathbf{V}$*, taková, že* $A(\mathcal{X}) = \{A(\mathbf{u}_1), \ldots, A(\mathbf{u}_n)\}$ *je opět ortonormální báze.*
5. *Pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *platí, že* $\|A(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$*.*

Důkaz.

(1. $\Rightarrow$ 2.) Předpokládejme, že $A^*A = I$. Potom pro každou dvojici vektorů $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí, že $\langle A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y}) \rangle = \langle A^*A(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Předpokládejme, že A je unitární (resp. ortogonální) zobrazení a buď $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$. Potom pro každé $1 \leq i < j \leq n$ platí, že $\langle A(\mathbf{u}_i), A(\mathbf{u}_j) \rangle = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = \delta_{ij}$. Proto je $A(\mathcal{X}) = \{A(\mathbf{u}_1), \ldots, A(\mathbf{u}_n)\}$ opět ortonormální báze.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Zřejmé.

(4. $\Rightarrow$ 5.) Buď $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ ortonormální báze prostoru $\mathbf{V}$ taková, že $A(\mathcal{X}) = \{A(\mathbf{u}_1), \ldots, A(\mathbf{u}_n)\}$ opět ortonormální báze. Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor prostoru $\mathbf{V}$. Snadno nahlédneme, že $\{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}} = \{A(\mathbf{x})\}_{A(\mathcal{X})}$. Položme $\{A(\mathbf{x})\}_{A(\mathcal{X})} = \{\mathbf{x}\}_{\mathcal{X}} = (a_1, \ldots, a_n)^T$. Potom $\|A(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

(5. $\Rightarrow$ 2.) Nechť $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ je dvojice vektorů. Roznásobením dostaneme, že $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ a zároveň $\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 = \langle \mathbf{x}+i\mathbf{y}, \mathbf{x}+i\mathbf{y}\rangle = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 + 2i\mathrm{Im}\,\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$. Odtud odvodíme, že

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \frac{\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2}{2} + \frac{\|\mathbf{x}+i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|^2}{2}.$$

Proto je-li $\|A(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, pak $\langle A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle$ pto každou dvojici vektorů $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Předpokládejme, že A je unitární (resp. ortogonální) zobrazení. Potom pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí, že $\langle A^*A(\mathbf{x}), \mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x})\rangle = \langle A(\mathbf{x}), A(\mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x}))\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x})\rangle$, odkud dostaneme, že $\langle \mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x}), \mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x})\rangle - \langle A^*A(\mathbf{x}), \mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x})\rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} - A^*A(\mathbf{x})\rangle = 0$. Proto $\mathbf{x} = A^*A(\mathbf{x})$. Podobně ukážeme, že $\mathbf{x} = AA^*(\mathbf{x})$.

□

Důsledek 17.10 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor a nechť* $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je lineární zobrazení. Potom* $\mathbf{V}$ *má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů lineárního zobrazení* A *a všechna vlastní čísla tohoto zobrazení mají absolutní hodnotu rovnou* 1 *právě když je zobrazení* A *zároveň samoadjungované a ortogonální.*

Důkaz. Podle Věty 17.8 je lineární zobrazení A samoadjungované právě když existuje ortonormální báze $\mathcal{X}$ prostoru $\mathbf{V}$ složená z vlastních vektorů A. Matice $[A]_{\mathcal{X}} = (a_{ij})$ lineárního zobrazení A vzhledem k bázi $\mathcal{X}$ je potom diagonální a na její diagonále jsou vlastní čísla zobrazení A. Podle Věty 17.9 je zobrazení A ortogonální právě když $AA^* = A^*A = I$, což nastane právě tehdy když $[A]_{\mathcal{X}}^T = [A]_{\mathcal{X}}^{-1}$. Protože je matice A diagonální, toto nastane právě když $a_{ii} = a_{ii}^{-1}$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, kde $n = \dim V$, tedy právě když je absolutní hodnota všech prvků na diagonále matice $[A]_{\mathcal{X}}$ rovna jedné. □

Důsledek 17.11 *Buď* $\mathbf{V}$ *komplexní vektorový prostor a nechť* $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je lineární zobrazení. Potom* $\mathbf{V}$ *má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů lineárního zobrazení* A *a všechna vlastní čísla tohoto zobrazení mají absolutní hodnotu rovnou* 1 *právě když je zobrazení* A *unitární.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Buď $\mathcal{X}$ ortonormální báze prostoru složená z vlastních vektorů zobrazení A které všechny leží na jednotkové kružnici. Matice $[A]_{\mathcal{X}}$ je pak diagonální a vzhledem k tomu, že na její diagonále jsou vlastní čísla která všechna leží na jednotkové kružnici, platí, že $[A]_{\mathcal{X}}[A]^*_{\mathcal{X}} = [A]^*_{\mathcal{X}}[A]_{\mathcal{X}} = \mathbf{I}$. Podle Věty 16.11 je $[A]^*_{\mathcal{X}} = [A^*]_{\mathcal{X}}$, odkud dostaneme, že $AA^* = A^*A = I$ a tedy zobrazení A je unitární podle Věty 17.9. ($\Leftarrow$) Je-li zobrazení A unitární, potom je $AA^* = A^*A = I$ podle Věty 17.9 a tedy je normální. Zvolme libovolné vlastní číslo λ zobrazení A a buď $\mathbf{v}$ příslušný vlastní vektor. Podle Tvrzení 17.5 je $\mathbf{v}$ také vlastní vektor zobrazení A^*, v tomto případě příslušný vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$. Proto platí, že $\mathbf{v} = A^*A(\mathbf{v}) = A^*(\lambda\mathbf{v}) = \lambda A^*(\mathbf{v}) = \lambda\overline{\lambda}\mathbf{v} = |\lambda|^2\mathbf{v}$. Proto $1 = |\lambda|$ a tedy vlastní číslo λ leží na jednotkové kružnici. □

Tvrzení 17.12 *Buď* $\mathbf{V}$ *komplexní (reálný) vektorový prostor a* $A\colon \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení. Potom je* A *unitární (ortonormální) právě tehdy když je matice* $[A]_{\mathcal{X}}$ *unitární (ortogonální) pro každou ortonormální bázi* $\mathcal{X}$ *ve* $\mathbf{V}$.

Důkaz. Plyne okamžitě z Věty 17.9 (2. $\Leftrightarrow$ 3.). □

Věta 17.13 *Platí následující:*

1. *Komplexní matice* $\mathbf{A}$ *je normální právě tehdy když existuje unitární matice* $\mathbf{U}$ *taková, že* $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ *je diagonální matice.*

2. *Reálná matice* $\mathbf{A}$ *je symetrická právě tehdy když existuje ortogonální matice* $\mathbf{P}$ *taková, že* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ *je diagonální matice.*

Důkaz.

1. ($\Rightarrow$) Předpokládejme, že je $\mathbf{A}$ normální matice řádu n. Uvažme lineární zobrazení $A\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ dané předpisem $A(\mathbf{v}) = \mathbf{A}\mathbf{v}$ pro každé $\mathbf{v} \in \mathbf{C}^n$. Protože je matice $\mathbf{A}$ normální, je normální také zobrazení A a tedy podle Věty 17.8 existuje ortonormální báze $\mathcal{X}$ složená z vlastních vektorů zobrazení A. Buď $\mathbf{U}$ matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ ke standardní bázi prostoru $\mathbf{C}^n$ a označme $\mathbf{D}$ diagonální matici s vlastními vektory zobrazení A na diagonále (v pořadí odpovídající pořadí vektorů báze $\mathcal{X}$). Potom $\mathbf{D} = \mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$. ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že existuje unitární

matice $\mathbf{U}$ taková, že $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D}$, kde $\mathbf{D}$ je diagonální matice. Protože je $\mathbf{U}$ unitární matice, platí, že $\mathbf{U}^*\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^* = \mathbf{I}_n$. Odtud dostaneme, že $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*$ a dále $\mathbf{A}^*\mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*)^*(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*) = \mathbf{U}\mathbf{D}^*\mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}\mathbf{D}^*\mathbf{D}\mathbf{U}^* = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{D}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*\mathbf{U}\mathbf{D}^*\mathbf{U}^* = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*(\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^*)^* = \mathbf{A}\mathbf{A}^*$. To znamená, že je matice $\mathbf{A}$ normální.

2. ($\Rightarrow$) Buď $\mathbf{A}$ symetrická matice řádu n a $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ lineární zobrazení dané předpisem $A(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u}$ pro všechny vektory $\mathbf{u} \in \mathbf{R}^n$. Protože je $\mathbf{A}$ symetrická, je zobrazení A samoadjungované a tedy podle Věty 17.8 existuje ortonormální báze prostoru $\mathbf{R}^n$ složená z vlastních vektorů zobrazení A. Podobně jako v předchozím případě buď $\mathbf{P}$ matice přechodu od této báze ke standardní bázi prostoru $\mathbf{R}^n$. Potom je $\mathbf{P}$ ortogonální matice a součin $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ je diagonální matice (na jejíž diagonále jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$). ($\Leftarrow$) Předpokládejme, že existuje ortogonální matice $\mathbf{P}$ a diagonální matice $\mathbf{D}$ taková, že $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$. Protože je $\mathbf{P}$ ortogonální matice, $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}^{-1}$, a tedy $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T$. Odtud dostaneme, že $\mathbf{A}^T = (\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T)^T = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^T = \mathbf{A}$. To znamená, že je matice $\mathbf{A}$ symetrická.

□