Kapitola 17

Normální, ortogonální a unitární zobrazení

V této kapitole budeme zkoumat lineární zobrazení na prostorech se skalárním součinem. Těleso skalárů tedy bude buď $\mathbf{R}$ nebo $\mathbf{C}$.

Lemma 17.1 *Nechť A je lineární zobrazení na prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem. Je-li λ vlastní číslo lineárního zobrazení A, pak $\overline{\lambda}$ je vlastní číslo adjungovaného zobrazení A^*.*

Důkaz. Pomocí charakteristického polynomu matice A vzhledem k ortonormální bázi. $\square$

Věta 17.2 ***Schurova věta*** . *Buď A lineární zobrazení na vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem. Předpokládejme, že charakteristický polynom p_A se rozkládá na součin lineárních činitelů. Potom existuje ortonormální báze $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ taková, že matice $[A]_{\mathcal{X}}$ je horní trojúhelníková.*

Důkaz. Indukcí podle dimenze $\mathbf{V}$. Třeba použít, že ortogonální doplněk vlastního vektoru $\mathbf{z}$ zobrazení A^* je invariantní podprostor A, dokázat, že char. polynom restrikce A na doplněk se také rozkládá na součin lin. činitelů. Pak se použije indukce. $\square$

Definice 17.1 *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor se skalárním součinem. Říkáme, že lineární zobrazení $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je* normální, *platí-li $AA^* = A^*A$. Matice $\mathbf{A}$ řádu n nad reálnými nebo komplexními čísly se nazývá* normální matice, *platí-li $\mathbf{A}\mathbf{A}^* = \mathbf{A}^*\mathbf{A}$.*

Tvrzení 17.3 *Nechť $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ je normální lineární zobrazení na prostoru se skalárním součinem $\mathbf{V}$. Pak platí*

1. $\|A(\mathbf{x})\| = \|A^*(\mathbf{x})\|$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
2. $A - \lambda I$, *kde I je identické zobrazení na $\mathbf{V}$, je také normální lineární zobrazení,*
3. *je-li $\mathbf{x}$ vlastní vektor lineárního zobrazení A vzhledem k vlastnímu číslu λ, je $\mathbf{x}$ vlastní vektor lineárního zobrazení A^* vzhledem k vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$,*
4. *jsou-li $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ vlastní vektory lineárního zobrazení A vzhledem k* různým *vlastním číslům λ_1 a λ_2, pak jsou vektory $\mathbf{x}_1$ a $\mathbf{x}_2$ ortogonální.*

Věta 17.4 *Buď $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení na prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem nad $\mathbf{C}$. Pak A je normální právě tehdy když existuje ortonormální báze $\mathbf{V}$ složená z vlastních vektorů A.*

Důkaz. Pokud ortonormální báze existuje, použije se věta o matici adjungovaného zobrazení.

Pokud je A normální, použije se Schurova věta. □

Příklad 17.1 Příklady normálních matic.

Definice 17.2 *Lineární zobrazení $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ na prostoru se skalárním součinem $\mathbf{V}$ se nazývá* samoadjungované (hermitovské)*, pokud platí $A = A^*$. Reálná nebo komplexní matice $\mathbf{A}$ se nazývá* samoadjungovaná (hermitovská)*, pokud $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$.*

Lemma 17.5 *Buď $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ samoadjungované lineární zobrazení na prostoru se skalárním součinem $\mathbf{V}$. Potom platí*

1. *každé vlastní číslo zobrazení A je reálné,*
2. *je-li $\mathbf{V}$ prostor nad $\mathbf{R}$, pak se charakteristický polynom p_A rozkládá nad $\mathbf{R}$ na součin lineárních činitelů.*

Věta 17.6 *Buď $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení na prostoru se skalárním součinem $\mathbf{V}$ nad reálnými čísly. Potom A je samoadjungované lineární zobrazení právě tehdy když existuje ortonormální báze $\mathbf{V}$ složená z vlastních vektorů lineárního zobrazení A.*

Definice 17.3 *Nechť* $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor se skalárním součinem nad* $\mathbf{R}$ *(nebo nad* $\mathbf{C}$*). Lineární zobrazení* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *se nazývá* ortogonální *(*unitární*), platí-li pro každé dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$

$$\langle A(\mathbf{x}), A(\mathbf{y})\rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle.$$

Věta 17.7 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem a* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. $AA^* = A^*A = I$*, kde* $I : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *je identické zobrazení,*

2. A *je ortogonální (unitární) zobrazení,*

3. *pro každou ortonormální bázi* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *ve* $\mathbf{V}$ *je* $\{A(\mathbf{u}_1), \ldots, A(\mathbf{u}_n)\}$ *ortonormální báze ve* $\mathbf{V}$*,*

4. *existuje ortonormální báze* $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *ve* $\mathbf{V}$ *taková, že* $\{A(\mathbf{u}_1), \ldots, A(\mathbf{u}_n)\}$ *je ortonormální báze ve* $\mathbf{V}$*,*

5. $\|A(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\|$ *pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Důsledek 17.8 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný vektorový prostor se skalárním součinem a* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení. Potom* $\mathbf{V}$ *má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů, pro které mají příslušná vlastní čísla absolutní hodnotu rovnou 1 právě tehdy když je* A *samodajungované a ortogonální.*

Důsledek 17.9 *Buď* $\mathbf{V}$ *komplexní vektorový prostor se skalárním součinem a* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení. Potom* $\mathbf{V}$ *má ortonormální bázi složenou z vlastních vektorů, pro které mají příslušná vlastní čísla absolutní hodnotu rovnou 1 právě tehdy když je* A *unitární.*

Tvrzení 17.10 *Buď* $\mathbf{V}$ *reálný (komplexní) vektorový prostor se skalárním součinem a* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení. Potom je* A *ortogonální (unitární) právě tehdy když je matice* $[A]_{\mathcal{X}}$ *ortogonální (unitární) pro každou ortonormální bázi* $\mathcal{X}$ *ve* $\mathbf{V}$.

Věta 17.11

1. *Komplexní matice* $\mathbf{A}$ *je normální právě tehdy když existuje unitární matice* $\mathbf{U}$ *taková, že* $\mathbf{U}^*\mathbf{A}\mathbf{U}$ *je diagonální matice.*

2. *Reálná matice* $\mathbf{A}$ *je symetrická právě tehdy když existuje ortogonální matice* $\mathbf{P}$ *taková, že* $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ *je diagonální matice.*