Kapitola 16

Duální prostor, duální zobrazení

Definice 16.1 *Definice součtu lineárních zobrazení a součinu se skalárem*

Tvrzení 16.1 1. *Součet dvou lineárních zobrazení a součin lineárního zobrazení se skalárem jsou opět lineární zobrazení.*

2. *Množina všech lineárních zobrazení* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *tvoří vektorový prostor s operacemi součtu zobrazení a násobku skalárem.*

3. *Je-li* $\dim \mathbf{U} = n$ *a* $\dim \mathbf{V} = m$, *pak je tento prostor isomorfní s prostorem všech matic typu* $m \times n$ *nad* $\mathbf{T}$, *který má dimenzi* mn.

Definice 16.2 Prostor všech lineárních zobrazení *z* $\mathbf{U}$ *do* $\mathbf{V}$, *značení* $Hom(\mathbf{U}, \mathbf{V})$. *Speciálně* $Hom(\mathbf{U}, \mathbf{T})$ *nazýváme* duální prostor *k prostoru* $\mathbf{U}$ *a označujeme jej* $\mathbf{U}^*$ *a jeho prvky nazýváme* lineární funkcionály *na* $\mathbf{U}$.

Tvrzení 16.2 $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *je báze v* $\mathbf{U}$. *Nechť funkcionály* $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n \subseteq \mathbf{U}^*$ *jsou definované předpisem* $\mathbf{f}_i(\mathbf{u}_j) = \delta_{ij}$ *pro* $i, j = 1, \ldots, n$, *pak množina* $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ *je báze v* $\mathbf{U}^*$.

Definice 16.3 *Je-li* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze v* $\mathbf{U}$, *pak báze* $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ *duálního prostoru* $\mathbf{V}^*$ *definovaná předpisem* $\mathbf{f}_i(\mathbf{u}_j) = \delta_{ij}$ *pro* $i, j = 1, \ldots, n$, *se nazývá* duální báze *k bázi* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *a označuje se* $\mathcal{X}^*$.

Tvrzení 16.3 *Nechť* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *je lineární zobrazení. Definujme zobrazení* $A^T : \mathbf{V}^* \to \mathbf{U}^*$ *předpisem* $A^T(f) = f \circ A$ *pro každé* $f \in \mathbf{V}^*$. *Potom* A^T *je lineární zobrazení.*

Definice 16.4 *Nechť* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *je lineární zobrazení. Potom lineární zobrazení* $A^T : \mathbf{V}^* \to \mathbf{U}^*$ *definované předpisem* $A^T(f) = f \circ A$ *pro každé* $f \in \mathbf{V}^*$ *se nazývá* duální (transponované) *zobrazení k* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$.

Věta 16.4 *Nechť* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *je lineární zobrazení,* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *je báze v prostoru* $\mathbf{U}$ *a* $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *je báze v prostoru* $\mathbf{V}$. *Pak platí*

$$([A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}})^T = [A^T]_{\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*}.$$

Věta 16.5 *Nechť* $\mathbf{U}$ *je vektorový prostor dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Pro každý prvek* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *definujeme zobrazení* $\hat{\mathbf{x}} : \mathbf{U}^* \to \mathbf{T}$ *předpisem* $\hat{\mathbf{x}}(f) = f(\mathbf{x})$ *pro každé* $f \in \mathbf{U}^*$ *je lineární zobrazení, a tedy prvek druhého duálního prostoru* $(\mathbf{U}^*)^*$. *Dále zobrazení* $D : \mathbf{U} \to (\mathbf{U}^*)^*$ *definované předpisem* $D(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$, *je isomorfismus prostorů* $\mathbf{U}$ *a* $(\mathbf{U}^*)^*$.

Důsledek 16.6 *Každá báze* $\mathbf{U}^*$ *je duální k nějaké bázi* $\mathbf{U}$.

Definice 16.5 *Zobrazení* $D : \mathbf{U} \to (\mathbf{U}^*)^*$ *definované předpisem* $D(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{x}}$ *se nazývá* kanonický isomorfismus *mezi prostorem* $\mathbf{U}$ *a jeho druhým duálem* $(\mathbf{U}^*)^*$.

Věta 16.7 *Buď* $\mathbf{V}$ *prostor se skalárním součinem. Potom pro každou lineární formu* $\mathbf{f} \in \mathbf{V}$ *existuje jednoznačně určený vektor* $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *takový, že platí* $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Věta 16.8 *Buď* $\mathbf{V}$ *prostor se skalárním součinem a* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení. Potom existuje jednoznačně určené lineární zobrazení* $A^* : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *takové, že platí* $\langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle = \langle A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle$ *pro každé dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$.

Definice 16.6 *Je-li* $\mathbf{V}$ *prostor se skalárním součinem a* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení, pak lineární zobrazení* $A^* : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *takové, že platí* $\langle \mathbf{y}, A(\mathbf{x}) \rangle = \langle A^*(\mathbf{y}), \mathbf{x} \rangle$ *pro každé dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$, *se nazývá* adjungované zobrazení *k lineárnímu zobrazení* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$. *Platí-li* $A = A^*$, *pak říkáme, že* A *je* samoadjungované lineární zobrazení.

Věta 16.9 *Buď* $\mathbf{V}$ *prostor se skalárním součinem,* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení a* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *ortonormální báze ve* $\mathbf{V}$. *Pak platí*

$$([A]_{\mathcal{X}})^* = [A^*]_{\mathcal{X}}.$$

Tvrzení 16.10 *nechť* $\mathbf{V}$ *prostor se skalárním součinem,* $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *a* $B : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení. Pak platí:*

1. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
2. $(aB)^* = \overline{a}B^*$ *pro každý skalár* a,
3. $(AB)^* = B^*A^*$,
4. $A^{**} = A$,
5. $I^* = I$ *pro identické zobrazení* $I : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$.