Kapitola 14

Prostory se skalárním součinem

Definice 14.1 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{R}$ *(nebo nad* $\mathbf{C}$*).* Skalární součin *na* $\mathbf{V}$ *je zobrazení z* $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{R}$ *(nebo* $\to \mathbf{C}$*) splňující následující podmínky. Hodnotu zobrazení pro dvojici* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in \mathbf{V} \times \mathbf{V}$ *označujeme* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

1. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$ *pro každý vektor* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$*, přičemž rovnost nastává právě když* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,

2. $\langle \mathbf{u}, a\mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *pro každé vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *a každý skalár* $a \in \mathbf{R}$ *(nebo* $\in \mathbf{C}$*),*

3. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$ *pro každé vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$,

4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \overline{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}$ *pro každé vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Vektorový prostor, na kterém je definován skalární součin, nazýváme prostor se skalárním součinem.

Všimněte si, že podmínka 4. z předchozí definice znamená, že v případě reálného prostoru $\mathbf{V}$ se skalárním součinem platí $\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ pro každé vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Příklad 14.1 Standardní skalární součin definovaný v Definici 7.2 je příkladem skalárního součinu na aritmetickém prostoru $\mathbf{R}^n$ nebo $\mathbf{C}^n$, jak vyplývá z Tvrzení 7.1. Není to ale zdaleka jediná možnost, jak definovat skalární součin na aritmetických vektorových prostorech. Například, jsou-li $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$ a $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$ dva libovolné vektory z $\mathbf{R}^2$, pak předpis

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1 y_1 + \frac{1}{3} x_1 y_2 + \frac{1}{3} x_2 y_1 + x_2 y_2$$

také definuje skalární součin na $\mathbf{R}^2$.

Definice 14.2 *Je-li* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad* $\mathbf{R}$ *(nebo nad* $\mathbf{C}$*), pak* norma *na* $\mathbf{V}$ *je zobrazení, které přiřazuje každému vektoru* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *reálné číslo* $\|\mathbf{v}\|$ *splňující následující podmínky:*

1. $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ *pro každý vektor* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$*, přičemž rovnost nastává právě když* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$*,*

2. $\|a\mathbf{v}\| = |a| \cdot \|\mathbf{v}\|$ *pro každý vektor* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *a každý skalár* $a \in \mathbf{R}$ *(nebo* $\in \mathbf{C}$*),*

3. $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$ *pro každé dva vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Příklad 14.2 Euklidovská norma na aritmetickém vektorovém prostoru $\mathbf{R}^n$

nebo $\mathbf{C}^n$ je podle Cvičení 7.2 a Tvrzení 7.3 normou ve smyslu Definice 14.2. Připomeňme si, že euklidovská norma je svázána se standardním skalárním součinem vztahem

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$ (nebo $\in \mathbf{C}^n$).

Věta 14.1 *Cauchy-Schwartzova-Bunjakovského nerovnost Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem. Pro libovolné dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ *platí*

$$|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|,$$

přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{y} = a\mathbf{x}$ *pro nějaký skalár* $a \in \mathbf{R}$ *(nebo* $\in \mathbf{C}$*).*

Tvrzení 14.2 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem. Potom předpis*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

definuje normu na $\mathbf{V}$.

Definice 14.3 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem. Potom normu na* $\mathbf{V}$ *definovanou předpisem* $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$ *nazýváme* norma definovaná skalárním součinem $\langle \star, \star \rangle$.

Zdaleka ne každou normu na reálném nebo komplexním vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ lze definovat nějakým skalárním součinem na $\mathbf{V}$. Následující poněkud náročnější úloha udává dodatečnou nutnou a postačující podmínku, kterou musí norma na $\mathbf{V}$ splňovat k tomu, aby ji bylo možné definovat nějakým skalárnéím součienm.

Úloha 14.1 Normu $\|\star\|$ na reálném nebo komplexním vektorovém prostoru

$\mathbf{V}$ lze definovat nějakým skalárním součinem na $\mathbf{V}$ právě tehdy když platí

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2)$$

pro každé dva vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

Definice 14.4 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem. Dva vektory* $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ *nazýváme* kolmé, *platí-li* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$. *Množina vektorů* $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\} \subseteq \mathbf{V}$ *se nazývá* ortogonální, *jsou-li každé její dva různé prvky kolmé, a ortogonální množina se nazývá* ortonormální, *platí-li navíc, že* $\|\mathbf{u}_i\| = 1$ *pro každé* $i = 1, \dots, k$.

Tvrzení 14.3 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem a* $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$ *nějaká jeho ortonormální báze. Pak pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ *platí*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{x} \rangle \mathbf{u}_i.$$

Věta 14.4 *Buď* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor se skalárním součinem a* $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}$ *lineárně nezávislá množina ve* $\mathbf{V}$. *Pak existuje ortonormální množina* $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ *ve* $\mathbf{V}$ *taková, že platí*

$$\mathbf{L}\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_i\} = \mathbf{L}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_i\}$$

pro každé $i = 1, \dots, k$.

Věta 14.5 *Každou ortonormální množinu* $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$ *ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem lze rozšířit do ortonormální báze ve* $\mathbf{V}$.

Definice 14.5 *Je-li M podmnožina vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *se skalárním součinem, pak* ortogonální doplněk *množiny M ve* $\mathbf{V}$ *definujeme jako množinu*

$$M^{\perp} = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} : \langle \mathbf{u}, \mathbf{x} \rangle = 0 \text{ pro každé } \mathbf{u} \in M\}.$$

Tvrzení 14.6 *Pro libovolné dvě podmnožiny $M, N \subseteq \mathbf{V}$, kde $\mathbf{V}$ je prostor se skalárním součinšm platí*

1. *$M^{\perp}$ je podprostor $\mathbf{V}$,*
2. *je-li $M \subseteq N$, pak $N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$,*
3. *$M^{\perp} = \mathbf{L}(M)^{\perp}$,*
4. *je-li $\mathbf{P}$ podprostor $\mathbf{V}$, pak $(\mathbf{P}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{P}$,*
5. *pro podprostor $\mathbf{P}$ platí $\mathbf{P} \cap \mathbf{P}^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$,*
6. *pro podprostor $\mathbf{P}$ platí $\dim \mathbf{P}^{\perp} = \dim \mathbf{V} - \dim \mathbf{P}$,*
7. *každý prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, kde $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$ a $\mathbf{q} \in \mathbf{P}^{\perp}$,*
8. *$(M^{\perp})^{\perp} = \mathbf{L}(M)$.*

Definice 14.6 *Je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbf{R}$ (nebo nad $\mathbf{C}$), $\mathbf{M}$ podprostor $\mathbf{V}$ a $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, kde $\mathbf{p} \in \mathbf{M}$ a $\mathbf{q} \in \mathbf{M}^{\perp}$, pak vektor $\mathbf{p}$ nazýváme* ortogonální projekce $\mathbf{x}$ *na podprostor* $\mathbf{M}$.

Tvrzení 14.7 *Je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbf{R}$ (nebo nad $\mathbf{C}$) a $\mathbf{M}$ podprostor $\mathbf{V}$. Zobrazení $P_{\mathbf{M}} : \mathbf{V} \to \mathbf{M}$, které každému vektoru $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ přiřazuje jeho ortogonální projekci na podprostor $\mathbf{M}$, je lineární zobrazení.*

Tvrzení 14.8 *Je-li $\mathbf{V}$ vektorový prostor se skalárním součinem nad $\mathbf{R}$ (nebo nad $\mathbf{C}$), $\mathbf{M}$ podprostor $\mathbf{V}$ a $\mathbf{p} = P_{\mathbf{M}}(\mathbf{x}) \in \mathbf{M}$ ortogonální projekce vektoru $\mathbf{x}$ na $\mathbf{M}$. Pak pro každý vektor $\mathbf{m} \in \mathbf{M}$ platí*

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{m}\|,$$

přičemž rovnost nastává právě když $\mathbf{m} = \mathbf{p}$.

Věta 14.9 Pythagorova věta *Buď $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ (nebo nad $\mathbf{C}$). Pro dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ platí $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ právě když* $\operatorname{Re} \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$.

Pokud je prostor $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{R}$, pak rovnost $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$ platí právě když jsou vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ortogonální.