Kapitola 13

Lineární zobrazení

Definice 13.1 *Jsou-li* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{V}$ *vektorové prostory na tělesem* $\mathbf{T}$, *pak zobrazení* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *nazýváme* lineární zobrazení, *platí-li*

1. $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ *pro každé dva vektory* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{U}$,
2. $A(b\mathbf{x}) = bA(\mathbf{x})$ *pro každý skalár* $b \in \mathbf{T}$ *a každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$.

Lemma 13.1 *Nechť* $\mathbf{U}$ *a* $\mathbf{V}$ *jsou vektorové prostory nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Potom je zobrazení* $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *lineární právě když pro každé přirozené číslo* n, n*-tici vektorů* $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n$ *a* n*-tici skalárů* $a_1, \ldots, a_n$ *platí, že*

$$A(a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n) = a_1A(\mathbf{x}_1) + \cdots + a_nA(\mathbf{x}_n). \tag{13.1}$$

Důkaz. ($\Leftarrow$) Podmínky (1) a (2) v definici lineárního zobrazení jsou speciálními případy rovnosti (13.1). ($\Rightarrow$) Tuto implikaci ukážeme přímočaře indukcí podle n. Detailní důkaz ponecháme jako cvičení. $\square$

Příklad 13.1 Obecný tvar lineárního zobrazení $A : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Příklad 13.2 Reflexe, zvětšení (homotetie), nafouknutí v různém měřítku ve dvou různých směrech, zkosení, rotace.

Příklad 13.3 Každé lineární zobrazení $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ je tvaru $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, kde $\mathbf{A}$ je reálná matice typu $m \times n$, jejíž j-tý sloupec $\mathbf{A}_{*j}$ se rovná $A(\mathbf{e}_j)$, pro každé $j = 1, \ldots, n$, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ je standardní báze v $\mathbf{R}_n$.

Analogické tvrzení platí pro lineární zobrazení $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$.

Definice 13.2 *Lineární zobrazení $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ se nazývá* monomorfismus, *je-li prosté, nazývá se* epimorfismus, *je-li A zobrazení na celý prostor $\mathbf{V}$, a nazývá se* isomorfismus, *je-li vzájemně jednoznačné (tj. prosté a na prostor $\mathbf{V}$).*

Definice 13.3 *Je-li $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení, pak množinu $\{\mathbf{u} \in \mathbf{U} : A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}\}$ nazýváme* jádro *lineárního zobrazení A a označujeme ji* $\mathrm{Ker}\,(A)$*. Množinu $\{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \mathbf{v} = A(\mathbf{u})$ pro nějaké $\mathbf{u} \in \mathbf{U}\}$ nazýváme* obraz *lineárního zobrazení A a označujeme ji* $\mathrm{Im}\,(A)$*.*

Tvrzení 13.2 *Nechť $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ je lineární zobrazení. Pak platí:*

1. *jádro* $\mathrm{Ker}\,(A)$ *je podprostor* $\mathbf{U}$,
2. *obraz* $\mathrm{Im}\,(A)$ *je podprostor* $\mathbf{V}$,
3. *je-li A prosté zobrazení (tj. je-li monomorfismus), pak $A^{-1} : \mathrm{Im}\,(A) \to \mathbf{U}$ je také lineární zobrazení,*
4. *je-li A vzájemně jednoznačné zobrazení (tj. isomorfismus), pak $A^{-1} : \mathbf{V} \to \mathbf{U}$ je také lineární zobrazení.*

Důkaz. (1) Ověříme, že $\mathrm{Ker}\,(A)$ je uzavřena na operace sčítání a násobení skaláry. Nechť $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\,(A)$ a $a \in \mathbf{T}$. Potom $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Proto je $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Ker}\,(A)$. Podobně $A(a\mathbf{x}) = aA(\mathbf{x}) = a = \mathbf{0}$ a tedy $a\mathbf{x} \in \mathrm{Ker}\,(A)$. Ukázali jsme, že je $\mathrm{Ker}\,(A)$ podprostor v $\mathbf{U}$.

(2) Nechť $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}\,(A)$ a $a \in \mathbf{T}$. Potom existují $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$ tak, že $A(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ a $A(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$. Platí, že $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A(\mathbf{u}) + A(\mathbf{v}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}$ a proto $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Im}\,(A)$. Podobně $A(a\mathbf{u}) = aA(\mathbf{u}) = a\mathbf{x}$, odkud je vidět, že $a\mathbf{u} \in \mathrm{Im}\,(A)$. Proto je $\mathrm{Im}\,(A)$ podprostor prostoru $\mathbf{V}$.

(3) Nejprve připomeňme, že je-li $\mathbf{u} \in \mathrm{Im}\,(A)$ a je-li $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ takové, že $A(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ potom je $A^{-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{x}$. Protože je zobrazení A prosté, je takto zobrazení A^{-1} dobře definované (tedy je jednoznačně dáno, na který vektor se má $\mathbf{u}$ zobrazit. Nechť $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in \mathrm{Im}\,(A)$ a $a \in \mathbf{T}$. Nechť $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$ splňují $A(\mathbf{x}) = \mathbf{u}$ a $A(\mathbf{y}) = \mathbf{v}$. Potom $A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{u} + \mathbf{v}$ a tedy $A^{-1}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} = A^{-1}(\mathbf{u}) + A^{-1}(\mathbf{v})$. Podobně $A(a\mathbf{x}) = aA(\mathbf{x}) = a\mathbf{u}$, odkud

$A^{-1}(a\mathbf{u}) = a\mathbf{x} = aA^{-1}(\mathbf{u})$. Proto je A^{-1} lineární zobrazení. Všimněme si ještě, že $A^{-1}\colon \mathrm{Im}\,(A) \to \mathbf{U}$ je vždy vzájemně jednoznačné zobrazení.

(4) V případě, že je A vzájemně jednoznačné zobrazení, je $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbf{V}$ a dokazované je důsledkem předchozího bodu. □

Věta 13.3 *Pro libovolné lineární zobrazení* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *platí* $\dim \mathrm{Ker}\,(A) + \dim \mathrm{Im}\,(A) = \dim \mathbf{U}$.

Důkaz. Buď $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ báze prostoru $\mathrm{Ker}\,(A)$. Podle Důsledku **??** lze množinu $\mathcal{X}$ rozšířit do báze $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ prostoru $\mathbf{U}$. Ověříme, že $\{A(\mathbf{y}_1), \ldots, A(\mathbf{y}_l)\}$ je báze $\mathrm{Im}\,(A)$. Buď $\mathbf{u} \in \mathrm{Im}\,(A)$ libovolný vektor a nechť $\mathbf{z} \in \mathbf{U}$ je nějaký jeho vzor. Potom $\mathbf{z} = a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + b_1\mathbf{y}_1 + \cdots + b_l\mathbf{y}_l$ a dále $A(\mathbf{z}) = A(a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + b_1\mathbf{y}_1 + \cdots + \mathbf{y}_l) = a_1A(\mathbf{x}_1) + \cdots + a_kA(\mathbf{x}_k) + b_1A(\mathbf{y}_1) + \cdots + b_lA(\mathbf{y}_l)$. Protože $A(\mathbf{x}_1) = \cdots = A(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}$ dostáváme odtud, že $\mathbf{u} = A(\mathbf{z}) = b_1A(\mathbf{y}_1) + \cdots + b_lA(\mathbf{y}_l)$. Proto množina $\{A(\mathbf{y}_1), \ldots, A(\mathbf{y}_l)\}$ generuje podprostor $\mathrm{Im}\,(A)$. Předpokládejme nyní, že pro některé $c_1, \ldots, c_l \in \mathbf{T}$ platí, že $c_1A(\mathbf{y}_1) + \cdots + c_lA(\mathbf{y}_l) = \mathbf{0}$. Potom také $A(c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_l\mathbf{y}_l) = \mathbf{0}$ a tedy $c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_l\mathbf{y}_l \in \mathrm{Ker}\,(A)$. Protože je $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ báze $\mathrm{Ker}\,(A)$, existují $d_1, \ldots, d_k \in \mathbf{T}$ tak, že $c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_l\mathbf{y}_l = d_1\mathbf{x}_1 + \cdots + d_k\mathbf{x}_k$. Odtud dostaneme, že $c_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_l\mathbf{y}_l - d_1\mathbf{x}_1 - \cdots - d_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$. Protože je množina $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ lineárně nezávislá, je nutně $c_1 = \cdots = c_l = 0$. Proto je množina $\{A(\mathbf{y}_1), \ldots, A(\mathbf{y}_l)\}$ lineárně nezávislá a tedy báze prostoru $\mathrm{Im}\,(A)$. Proto je $\dim \mathrm{Im}\,(A) = l$. Z předchozího také plyne, že $\dim \mathrm{Ker}\,(A) = k$ a $\dim \mathbf{U} = k + l$. Proto $\dim \mathrm{Ker}\,(A) + \dim \mathrm{Im}\,(A) = \dim \mathbf{U}$. □

Tvrzení 13.4 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice typu* $m \times n$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $A : \mathbf{T}^n \to \mathbf{T}^m$ *je lineární zobrazení definované předpisem* $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *pro každé* $\mathbf{x} \in \mathbf{T}^n$*, pak platí*

1. $\mathrm{Ker}\,(A) = \mathbf{N}(\mathbf{A})$,
2. $\mathrm{Im}\,(A) = \mathbf{S}(\mathbf{A})$ *a* $\dim \mathrm{Im}\,(A) = r(\mathbf{A})$,
3. $\dim \mathrm{Ker}\,(A)) = n - \dim \mathrm{Im}\,(A)$.

Důkaz. (1) Podle Definice 4.6 je $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ podprostor všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, což odpovídá jádru zobrazení A.

(2) Pro každé $j \leq n$ je $\mathbf{A}_{*j} = \mathbf{A}\mathbf{e}_j \in \mathrm{Im}\,(A)$. Protože $\mathbf{S}(\mathbf{A})$ je podprostor $\mathbf{T}^n$ generovaný sloupcovými vektory matice $\mathbf{A}$ je $\mathbf{S}(\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Im}\,(A)$. Buď nyní $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ libovolný aritmetický vektor. Potom $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} =$

$x_1\mathbf{A}_{*1} + \cdots + x_n\mathbf{A}_{*n} \in \mathbf{S}(\mathbf{A})$. Proto je $\mathrm{Im}\,(A) \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{A})$ a celkem tak dostáváme rovnost $\mathrm{Im}\,(A) \subseteq \mathbf{S}(\mathbf{A})$. Podle Definice 4.14 je $\dim \mathbf{S}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ a tedy $\dim \mathrm{Im}\,(A) = r(\mathbf{A})$.

(3) Toto je speciální případ Věty 13.3. □

Věta 13.5 *Nechť* $\mathbf{U}, \mathbf{V}$ *jsou dva vektorové prostory nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a nechť* $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *je nějaká báze v* $\mathbf{U}$. *Pak pro každou volbu vektorů* $\mathbf{v}_i \in \mathbf{V}$, $i = 1, \ldots, n$, *existuje právě jedno lineární zobrazení* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *takové, že* $A(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, n$.

Důkaz. Pro $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$ položme $A(\mathbf{u}) = a_1A(\mathbf{u}_1) + \cdots + a_nA(\mathbf{u}_n)$. Protože je množina $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ lineárně nezávislá, je toto zobrazení dobře definováno. Snadno ověříme, že zobrazení A splňuje podmínky definující lineární zobrazení. Ukážeme jednoznačnost takového zobrazení. Buď $B\colon \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení takové, že $B(\mathbf{u}_i) = \mathbf{v}_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$. Buď $\mathbf{u} = a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n$ libovolný vektor prostoru $\mathbf{U}$. Potom $B(\mathbf{u}) = B(a_1\mathbf{u}_1 + \cdots + a_n\mathbf{u}_n) = a_1B(\mathbf{u}_1) + \cdots + a_nB(\mathbf{u}_n) = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = a_1A(\mathbf{u}_1) + \cdots + a_nA(\mathbf{u}_n) = A(\mathbf{u})$. Proto $A = B$. □

Věta 13.6 *Buď* $\mathbf{U}$ *vektorový prostor dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$. *Potom existuje isomorfismus* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{T}^n$.

Důkaz. Buď $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ báze prostoru $\mathbf{U}$ (tato báze je n-prvková, protože $\dim \mathbf{U} = n$). Dále buď $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ standardní báze prostoru $\mathbf{T}^n$. Podle Věty 13.5 existuje právě jedno lineární zobrazení $A\colon \mathbf{U} \to \mathbf{T}$ takové, že $A(\mathbf{u}_i) = \mathbf{e}_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. Vzhledem k tomu, že platí $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subseteq \mathrm{Im}\,(A)$, je zobrazení A epimorfismem. Podle Věty 13.3 je $\dim \mathrm{Ker}\, A = \dim \mathbf{U} - \dim \mathrm{Im}\,(A) = n - n = 0$. Proto je zobrazení A prosté, což uzavírá důkaz toho, že je to izomorfismus. □

Poslední věta říká, že až na izomorfismus existuje pouze jediný vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$, a to aritmetický vektorový prostor $\mathbf{T}^n$. Tento isomorfismus ale není jednoznačně určený, závisí na volbě báze ve $\mathbf{V}$. Různé volby báze dávají různé isomorfismy. Souřadnice vektorů se mohou měnit při různých volbách báze, nemění se ale vlastnosti $\mathbf{V}$, které na volbě báze nezávisí, jako je třeba lineární závislost nebo nezávislost nějaké množiny vektorů ve $\mathbf{V}$, lineární obal množiny vektorů ve $\mathbf{V}$, dimenze podprostorů $\mathbf{V}$, atd. Různé volby báze ve $\mathbf{V}$ dávají různé pohledy na prostor $\mathbf{V}$.

Nyní přeneseme na libovolné abstraktní prostory a lineární zobrazení poznatky o maticích lineárních zobrazení.

Definice 13.4 *Buď* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení,* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze v* $\mathbf{U}$ *a* $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *báze ve* $\mathbf{V}$*. Nechť je* r_{ij}*, kde* $A(\mathbf{u}_j) = \sum_{i=1}^m r_{ij}\mathbf{v}_i$ *pro každé* $j = 1, \ldots, n$*. Potom matici* (r_{ij}) *typu* $m \times n$ *nazýváme* matice lineárního zobrazení $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ vzhledem k bázím $\mathcal{X}$ *a* $\mathcal{Y}$ *a označíme ji* $[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$.

Je-li $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *a* $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *báze ve* $\mathbf{V}$*, pak* maticí lineárního zobrazení A vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$ *rozumíme matici zobrazení* A *vzhledem k bázím* $\mathcal{Y}$ *a* $\mathcal{Y}$*. Označujeme ji* $[A]_{\mathcal{Y}}$.

V matici $[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ jsou v j-tém sloupci souřadnice vektoru $A(\mathbf{u}_j)$ vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$.

Lemma 13.7 *Buď* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *lineární zobrazení,* $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *báze v* $\mathbf{U}$ *a* $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *báze ve* $\mathbf{V}$*. Buď* $\mathbf{B}$ *matice typu* $m \times n$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$*. Potom je* $\mathbf{B} = [A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ *právě když pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *platí, že*

$$\mathbf{B}[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = [A(\mathbf{x})]_{\mathcal{Y}}. \tag{13.2}$$

Speciálně tedy pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ *platí, že*

$$[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = [A(\mathbf{x})]_{\mathcal{Y}}. \tag{13.3}$$

Důkaz. ($\Rightarrow$) Ukážeme, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ platí rovnost (13.3). Z Definice 13.4 je vidět, že

$$[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} = ([A(\mathbf{u}_1)]_{\mathcal{Y}} \mid \cdots \mid [A(\mathbf{u}_n)]_{\mathcal{Y}}).$$

Položme $[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ a připomeňme, že potom $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n x_j\mathbf{u}_j$. Odtud dostaneme, že

$$[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = \sum_{j=1}^n x_j[A(\mathbf{u}_j)]_{\mathcal{Y}} = [\sum_{j=1}^n x_j A(\mathbf{u}_j)]_{\mathcal{Y}} = [A(\sum_{j=1}^n x_j\mathbf{u}_j)]_{\mathcal{Y}} = [A(\mathbf{x})]_{\mathcal{Y}}.$$

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že platí (13.2). Všimněme si, že $[\mathbf{u}_j]_{\mathcal{X}} = \mathbf{e}_j$ pro všechna $j \le n$, odkud dostaneme, že pro všechna $j \le n$ platí

$$\mathbf{B}_{*j} = \mathbf{B}\mathbf{e}_j = \mathbf{B}[\mathbf{u}_j]_{\mathcal{X}} = [A(\mathbf{u}_j)]_{\mathcal{Y}} = \mathbf{A}_{*j}.$$

To znamená, že matice $\mathbf{B}$ a $[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ mají stejné sloupce a tedy jsou totožné. □

Lemma 13.8 *Jsou-li* $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ *a* $B : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ *lineární zobrazení, pak také složené zobrazení* $BA : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ *je lineární zobrazení.*

Důkaz. Ověříme, že jsou splněny podmínky (1) a (2) z Definice 13.1. Nechť $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$ a nechť $a \in \mathbf{T}$. Položme $C = BA$. Potom platí, že $C(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = B(A(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = B(A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y}))$, protože je A lineární zobrazení, a $B(A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y})) = B(A(\mathbf{x}))+B(A(\mathbf{y})) = C(\mathbf{x})+C(\mathbf{y})$, protože je B lineární zobrazení. Podobně $C(a\mathbf{x}) = B(A(a\mathbf{x})) = B(aA(\mathbf{x})) = aB(A(\mathbf{x})) = aC(\mathbf{x})$. Proto je $C = BA$ také lineární zobrazení. $\square$

Věta 13.9 *Nechť $A : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ a $B : \mathbf{V} \to \mathbf{W}$ jsou lineární zobrazení, $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ je báze v $\mathbf{U}$, $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ je báze ve $\mathbf{V}$ a $\mathcal{Z} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_k\}$ je báze ve $\mathbf{W}$. Potom pro matici lineárního zobrazení $BA : \mathbf{U} \to \mathbf{W}$ vzhledem k bázím $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Z}$ platí*

$$[BA]_{\mathcal{X},\mathcal{Z}} = [B]_{\mathcal{Y},\mathcal{Z}}[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}.$$

Důkaz. Položme $\mathbf{B} = [B]_{\mathcal{Y},\mathcal{Z}}[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$. Podle Lemmatu 13.7 pak pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ platí, že

$$\mathbf{B}[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = ([B]_{\mathcal{Y},\mathcal{Z}}[A]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}})[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = [B]_{\mathcal{Y},\mathcal{Z}}[A(\mathbf{x})]_{\mathcal{Y}} = [BA(\mathbf{x})]_{\mathcal{Z}}.$$

To ale znamená, že $\mathbf{B} = [BA]_{\mathcal{X},\mathcal{Z}}$, opět podle Lemmatu 13.7. $\square$

Příklad 13.4 Vzorce pro sin a cos součtu dvou vektorů.

Příklad 13.5 Označme $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ vrcholy pravidelného n-úhelníka se středem v $\mathbf{0}$. Dokažte, že platí

$$\mathbf{s} = \sum_{i=1}^{n} = \mathbf{0}.$$

Řešení. Označíme $A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ otočení o úhel $\frac{2\pi}{n}$. Pak platí $A(\mathbf{s}) = \mathbf{s}$ a tedy $\mathbf{s} = \mathbf{0}$. $\square$

Definice 13.5 *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dvě báze ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$, pak matici identického zobrazení $I : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ vzhledem k bázím $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ nazýváme* matice přechodu *od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$.*

Je-li $\mathcal{X} = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ a $\mathcal{Y} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\}$, pak se j-tý sloupec matice přechodu od $\mathcal{X}$ k $\mathcal{Y}$ rovná souřadnicím vektoru $I(\mathbf{u}_j) = \mathbf{u}_j$ vzhledem k bázi $\mathcal{Y}$. Definice 13.5 je tedy v souladu s Definicí 11.4. Srovnejte si rovněž Tvrzení 11.8 s Definicí 13.5.

Lemma 13.10 *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dvě báze ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$. Potom je $\mathbf{P}$ matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$ právě když pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ platí*

$$\mathbf{P}[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}} = [\mathbf{x}]_{\mathcal{Y}}.$$

Důkaz. Podle předchozí definice je $\mathbf{P} = [I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$. Dokazované lemma je proto speciálním případem Lemmatu 13.7. □

Z definic 13.5 a 13.4 a Věty 13.9 plyne řada dalších tvrzení.

Tvrzení 13.11 *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dvě báze ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$ a $\mathbf{P}$ matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$, pak matice přechodu od báze $\mathcal{Y}$ k bázi $\mathcal{X}$ se rovná $\mathbf{P}^{-1}$.*

Důkaz. Položme $n = \dim \mathbf{V}$. Nejprve si všimněme, že z Lemmatu 13.10 okamžitě plyne, že matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{X}$ je jednotková matice, tj., že $[I]_{\mathcal{X}} = \mathbf{I}_n$. Buď $\mathbf{P} = [I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$ matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$. Z Věty 13.9 plyne, že

$$\mathbf{I}_n = [I]_{\mathcal{X}} = [I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}[I]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}} = \mathbf{P}[I]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}.$$

Odtud je vidět, že $[I]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}} = \mathbf{P}^{-1}$. □

Tvrzení 13.12 *Jsou-li $\mathcal{X}$ a $\mathcal{Y}$ dvě báze ve vektorovém prostoru $\mathbf{V}$ nad $\mathbf{T}$, $A : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ lineární zobrazení a $\mathbf{P}$ matice přechodu od báze $\mathcal{X}$ k bázi $\mathcal{Y}$, pak platí*

$$[A]_{\mathcal{X}} = \mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathcal{Y}}\mathbf{P}.$$

Důkaz. Podle předchozího tvrzení a Věty 13.9 je

$$\mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathcal{Y}} = [I]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}[A]_{\mathcal{Y}} = [A]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}.$$

Protože $\mathbf{P} = [I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}}$, dostaneme z Věty 13.9, že

$$\mathbf{P}^{-1}[A]_{\mathcal{Y}}\mathbf{P} = [A]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}\mathbf{P} = [A]_{\mathcal{Y},\mathcal{X}}[I]_{\mathcal{X},\mathcal{Y}} = [A]_{\mathcal{X}}.$$

□