Kapitola 12

Abstraktní vektorové prostory

Definice 12.1 *Předpokládáme, že* $\mathbf{T}$ *je těleso. Dále předpokládáme, že* $\mathbf{V}$ *je nějaká množina, na které je definovaná operace sčítání a násobení prvků tělesa* $\mathbf{T}$ *s prvky množiny* $\mathbf{V}$*. Pokud tyto operace splňují následující podmínky, pak říkáme, že množina* $\mathbf{V}$ *spolu s těmito operacemi tvoří* vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$*. Podmínky pro sčítání jsou*

1. *platí* $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ *pro libovolné* $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbf{V}$*,*

2. *platí* $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$*,*

3. *existuje prvek* $\mathbf{0}\in\mathbf{V}$ *takový, že* $\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$ *pro každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$*,*

4. *ke každému prvku* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$ *existuje prvek* $-\mathbf{x}\in\mathbf{V}$*, pro který platí, že* $(-\mathbf{x})+\mathbf{x}=\mathbf{0}$*.*

   Dále následují axiomy pro násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ *s prvky množiny* $\mathbf{V}$*:*

5. *platí* $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$ *pro jednotkový prvek* $1\in\mathbf{T}$ *a libovolný prvek* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$*,*

6. *platí* $a(b\mathbf{x})=(ab)\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $a,b\in\mathbf{T}$ *a každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$*,*

7. *platí* $(a+b)\mathbf{x}=a\mathbf{x}+b\mathbf{x}$ *pro libovolné dva prvky* $a,b\in\mathbf{T}$ *a každý prvek* $\mathbf{x}\in\mathbf{V}$*,*

8. *platí* $a(\mathbf{x}+\mathbf{y})=a\mathbf{x}+a\mathbf{y}$ *pro libovolný prvek* $a\in\mathbf{T}$ *a každé dva prvky* $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{V}$*.*

Prvky vektorového prostoru $\mathbf{V}$ *nazýváme také* vektory *a prvkům tělesa* $\mathbf{T}$ *v takovém případě říkáme* skaláry.

Formulace, že na množině $\mathbf{V}$ je definována operace sčítání znamená, že $\mathbf{x}+\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ pro libovolné dva vektory $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. A formulace,že na množině $\mathbf{V}$ je definována operace násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ s prvky množiny $\mathbf{V}$ znamená, že součin $a\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ pro libovolné prvky $a \in \mathbf{T}$ a $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$.

Stejně jako v případě těles nejdříve uvedeme několik bezprostředních důsledků axiomů vektorového prostoru.

Tvrzení 12.1 *V každém vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *platí*

1. *nulový vektor* $\mathbf{0}$ *je určený jednoznačně*
2. *opačný vektor* $-\mathbf{x}$ *je určený vektorem* $\mathbf{x}$ *jednoznačně,*
3. $-(-\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
4. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
5. $a\mathbf{0} = \mathbf{0}$ *pro každý skalár* $a \in \mathbf{T}$,
6. $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$ *pro každý vektor* $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$,
7. *jestliže* $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$, *pak buď* $a = 0$ *nebo* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Důkaz.

1. Buď $\mathbf{o} \in \mathbf{V}$ takový, že $\mathbf{o} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ pro každý prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$. Potom platí, že $\mathbf{o} = \mathbf{0}+\mathbf{o} = \mathbf{o}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Odtud plyne jednoznačnost nulového prvku.
2. Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor z prostoru $\mathbf{V}$. Buď $\mathbf{y} \in \mathbf{V}$ takový, že $\mathbf{y}+\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Potom platí, že $\mathbf{y} = \mathbf{0} + \mathbf{y} = ((-\mathbf{x}) + \mathbf{x}) + \mathbf{y} = (-\mathbf{x}) + (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = (-\mathbf{x}) + (\mathbf{y} + \mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{0} = \mathbf{0} + (-\mathbf{x})) = -\mathbf{x}$. Proto je vektor $-\mathbf{x}$ určen vektorem $\mathbf{x}$ jednoznačně.
3. Platí, že $\mathbf{x}+(-\mathbf{x}) = (-\mathbf{x})+\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Z jednoznačnosti opačného vektoru ukázané v předchozím bodě plyne, že $\mathbf{x} = -(-\mathbf{x})$.
4. Platí, že $0\mathbf{x} = \mathbf{0} + 0\mathbf{x} = ((-\mathbf{x}) + \mathbf{x}) + 0\mathbf{x} = (-\mathbf{x}) + (\mathbf{x} + 0\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + (1\mathbf{x} + 0\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + ((1 + 0)\mathbf{x}) = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
5. Buď $\mathbf{x}$ libovolný vektor z prostoru $\mathbf{V}$. Potom platí, že $a\mathbf{0} + \mathbf{x} = a\mathbf{0} + 1\mathbf{x} = a\mathbf{0}+(a+(1-a))\mathbf{x} = a\mathbf{0}+(a\mathbf{x}+(1-a)\mathbf{x}) = (a\mathbf{0}+a\mathbf{x})+(1-a)\mathbf{x} = a(\mathbf{0} + \mathbf{x}) + (1 - a)\mathbf{x} = a\mathbf{x} + (1 - a)\mathbf{x} = (a + (1 - a))\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Z jednoznačnosti nulového prvku ukázané v bodě 1. plyne, že $a\, nul = \mathbf{0}$.

6. Platí, že $(-1)\mathbf{x} + \mathbf{x} = (-1)\mathbf{x} + 1\mathbf{x} = ((-1) + 1)\mathbf{x} = 0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, podle bodu 4. Z jednoznačnosti opačného prvku ukázané v bodě 2. plyne, že $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

7. Předpokládejme, že $a\mathbf{x} = \mathbf{0}$ a zároveň $a \neq 0$. Protože je $\mathbf{T}$ těleso, existuje v něm k prvku a prvek inverzní, a^{-1}. Potom, vzhledem k bodu 5. platí $\mathbf{0} = a^{-1}\mathbf{0} = a^{-1}(a\mathbf{x}) = (a^{-1}a)\mathbf{x} = 1\mathbf{x} = \mathbf{x}$.

□

Aritmetický vektorový prostor $\mathbf{T}^n$ dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ je základním příkladem vektorového prostoru. Z Tvrzení 1.1 a Tvrzení 1.2 plyne, že také množina $\mathbf{R}^{m\times n}$ reálných matic tvaru $m \times n$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matic reálnými čísly je vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$. Podobně množina $\mathbf{T}^{m\times n}$ všech matic tvaru $m\times n$ s prvky z tělesa $\mathbf{T}$ spolu s operacemi sčítání matic a násobení matic prvky tělesa $\mathbf{T}$ je vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.

Příklad 12.1

1. Množina všech komplexních čísel spolu s operací obvyklého sčítání a operací násobení komplexního čísla reálným číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$.

2. Množina všech reálných čísel spolu s operací obvyklého sčítání a násobení reálného čísla racionálním číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem racionálních čísel $\mathbf{Q}$.

Následují příklady vektorových prostorů, jejichž prvky nejsou ani vektory v obvyklém smyslu slova ani matice.

Příklad 12.2

Množina $\mathbf{R}[x]$ všech reálných polynomů spolu s operacemi sčítání a násobení polynomů reálným číslem tvoří vektorový prostor nad tělesem reálných čísel $\mathbf{R}$. (Ověřte všechny axiomy!)

Podobně tvoří vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{R}$ množina $\mathbf{R}_{\leq n}[x]$ všech reálných polynomů stupně nejvýše n (včetně nulového polynomu) spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů reálným číslem.

Reálná čísla v předchozích dvou odstavcích nejsou důležitá. Stejně tak můžeme uvažovat množinu $\mathbf{T}[x]$ polynomů jedné proměnné s koeficienty v libovolném tělese $\mathbf{T}$. Spolu s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů prvky tělesa $\mathbf{T}$ tvoří množina $\mathbf{T}[x]$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.

Také množina $\mathbf{T}_{\leq n}[x]$ všech polynomů stupně nejvýše n (včetně nulového polynomu) s koeficienty v tělese $\mathbf{T}$ tvoří s operacemi sčítání polynomů a násobení polynomů prvky tělesa $\mathbf{T}$ vektorový prostor nad $\mathbf{T}$.

Další příklady vektorových prostorů jsou tvořené funkcemi.

Příklad 12.3 Množina všech reálných funkcí $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ definovaných na uzavřeném intervalu $[0, 1]$ tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ spolu s operacemi

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (kf)(x) = kf(x).$$

Se stejně definovanými operacemi tvoří vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ také množina všech *spojitých* reálných funkcí definovaných na intervalu $[0, 1]$.

Další vektorový prostor nad $\mathbf{R}$ tvoří množina všech *diferencovatelných* funkcí $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ spolu se stejnými operacemi jako v předchozích dvou odstavcích. (Ověřte si ve všech třech případech platnost všech axiomů vektorového prostoru.)

Každá diferencovatelná funkce $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$ je spojitá na celém intervalu $[0, 1]$. Množina všech diferencovatelných funkcí definovaných na intervalu $[0, 1]$ je tak podmnožinou množiny spojitých funkcí na intervalu $[0, 1]$. Součet $f+g$ dvou diferencovatelných funkcí $f, g : [0, 1] \to \mathbf{R}$ nezávisí na tom, sčítáme-li je jako diferencovatelné funkce nebo jako spojité funkce. Důležité ale je, že jsou-li f, g diferencovatelné, pak také jejich součet $f + g$ je diferencovatelná funkce. Podobně ani součin kf reálného čísla k s diferencovatelnou funkcí f nezávisí na tom, považujeme-li f za diferencovatelnou funkci nebo za spojitou. Podstatné je, že součin kf je diferencovatelná funkce, pokud je f diferencovatelná funkce.

Prostor diferencovatelných reálných funkcí definovaných na intervalu $[0, 1]$ je obsažený v prostoru spojitých funkcí na $[0, 1]$ nejen ve smyslu inkluze, ale také tím, že se v něm počítá s diferencovatelnými funkcemi stejně, jako bychom s nimi počítali ve větším prostoru spojitých funkcí. Tento vztah mezi dvěma vektorovými prostory nad stejným tělesem je důležitý a je obsahem následující definice.

Definice 12.2 *Předpokládáme, že* $\mathbf{V}$ *je vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$*. Je-li neprázdná množina* $\mathbf{U} \subseteq \mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$ *spolu s operacemi definovanými v prostoru* $\mathbf{V}$*, tj. splňuje-li axiomy 1-8 z Definice 12.1, pak říkáme, že prostor* $\mathbf{U}$ *je* podprostorem *prostoru* $\mathbf{V}$.

Ve skutečnosti není nutné ověřovat platnost všech osmi axiomů vektorového prostoru pro operace definované na podmnožině $\mathbf{U}$.

Tvrzení 12.2 *Neprázdná podmnožina* $\mathbf{U}$ *vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *spolu s operacemi definovanými v prostoru* $\mathbf{V}$ *je podprostor prostoru* $\mathbf{V}$ *právě když je uzavřená na obě operace.*

Důkaz. Pokud je $\mathbf{U}$ podprostor prostoru $\mathbf{V}$, musí být uzavřený na obě operace.

Naopak, pokud je $\mathbf{U}$ uzavřený na obě operace, vezmeme libovolný prvek $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$ (množina $\mathbf{U}$ je neprázdná!). Pak také $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Proto platí také $\mathbf{0} = (-\mathbf{x}) + \mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Operace sčítání na množině $\mathbf{U}$ tak splňuje axiomy 3 a 4. Asociativita 1 a komutativita 2 platí proto, že operace sčítání prvků množiny $\mathbf{U}$ se shoduje s operací sčítání těchto prvků v prostoru $\mathbf{V}$, která komutativní a asociativní je.

Ze stejného důvodu platí pro operaci násobení prvků tělesa $\mathbf{T}$ s prvky množiny $\mathbf{U}$ všechny axiomy 5-8. $\square$

Každý vektorový prostor $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ má určitě dva podprostory. Jenodprvkový podprostor $\mathbf{N} = \{\mathbf{0}\}$ a celý prostor $\mathbf{V}$. Těmto podprostorům říkáme *triviální* podprostory.

Úloha 12.1 Najděte všechny podprostory aritmetického reálného prostoru $\mathbf{R}^2$.

Řešení. Pro každý nenulový vektor $\mathbf{a} = (a_1, a_2)^T$ označíme symbolem $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ množinu $\{(ka_1, ka_2)^T : k \in \mathbf{R}\}$. Snadno ověříme, že množina $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ splňuje oba axiomy uzavřenosti a určuje tak podprostor prostoru $\mathbf{R}^2$.

Nyní budeme uvažovat podprostor $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ a vektor $\mathbf{b} = (b_1, b_2)^T \notin \mathbf{L}(\mathbf{a})$. To znamená, že $(b_1, b_2)^T \neq (ka_1, ka_2)^T$ pro libovolné reálné číslo k. Pro jakýkoliv vektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T \in \mathbf{R}^2$ uvažujeme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2. \end{aligned}$$

Z předpokladu $(b_1, b_2)^T \neq (ka_1, ka_2)^T$ vyplývá, že (sloupcová) hodnost matice

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$

této soustavy se rovná 2, protože hodnost této matice a matice k ní transponované se rovnají podle Tvrzení 3.15. Soustava má proto jednoznačné řešení. Existují tedy reálná čísla x, y, pro která platí

$$x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}.$$

Každý podprostor prostoru $\mathbf{R}^2$ obsahující vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ musí obsahovat vektory $x\mathbf{a}$ a $y\mathbf{b}$ vzhledem k axiomu uzavřenosti (N0) a kvůli axiomu uzavřenosti na sčítání (A0) také vektor $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} = \mathbf{c}$. Každý podprostor prostoru $\mathbf{R}^2$ obsahující vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b} \notin \mathbf{L}(\mathbf{a})$ se proto rovná celému prostoru $\mathbf{R}^2$. Kromě triviálních podprostorů $\{\mathbf{0}\}$ a $\mathbf{R}^2$ jsou tak podprostory $\mathbf{L}(\mathbf{a}) = \{(ka_1, ka_2)^T : k \in \mathbf{R}\}$ jedinými netriviálními podprostory $\mathbf{R}^2$. □

Každý podprostor $\mathbf{L}(\mathbf{a}) = \{k\mathbf{a} : k \in \mathbf{R}\}$ je přímka procházející počátkem. Podobně jako v předchozí úloze můžete vyřešit následující cvičení.

Cvičení 12.1 *Dokažte, že netriviální podprostory třídimenzionálního reálného aritmetického prostoru jsou přímky a roviny procházející počátkem.*

Cvičení 12.2 *Těleso reálných čísel lze v předchozí úloze a cvičení bez problémů nahradit obecným tělesem $\mathbf{T}$. Najděte všechny netriviální podprostory aritmetických vektorových prostorů $\mathbf{T}^2$ a $\mathbf{T}^3$ nad tělesem $\mathbf{T}$.*

Všechny poznatky o podprostorech aritmetických vektorových prostorů můžeme přenést na obecné vektorové prostory. Důkazy jsou zcela stejné jako v případě aritmetických vektorových prostorů.

Tvrzení 12.3 *Buď $\mathbf{T}$ libovolné těleso a $\mathbf{V}$ vektorový prostor nad tělesem $\mathbf{T}$.*

1. *Pro každý podprostor $\mathbf{U}$ prostoru $\mathbf{V}$ platí $\mathbf{0} \in \mathbf{U}$,*
2. *průnik libovolného neprázdného souboru podprostorů $\mathbf{V}$ je opět podprostor $\mathbf{V}$,*
3. *pro každou podmnožinu $X \subseteq \mathbf{V}$ existuje nejmenší (v uspořádání inkluzí) podprostor $\mathbf{V}$, který ji obsahuje.*

Důkaz.

1. Podle definice je podprostor $\mathbf{U}$ neprázdná podmnožina $\mathbf{V}$ a tedy existuje nějaké $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$. Vzhledem k uzavřenosti na operace sčítání a násobení skaláry (Tvrzení 12.2) je pak $\mathbf{0} = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = (-1)\mathbf{u} + \mathbf{u} \in \mathbf{U}$.

2. Buď $\mathcal{S}$ nějaký soubor podprostorů prostoru $\mathbf{V}$. Protože nulový vektor leží v každém podprotosu $\mathbf{V}$ a $\mathcal{S} \neq \emptyset$, leží také v průniku souboru $\mathcal{S}$. Proto je tento průnik neprázdný a vzhledem k Tvrzení 12.2 stačí ověřit, že je uzavřený na obě operace. Nechť tedy $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \bigcap \mathcal{S}$ a $a \in \mathbf{T}$. Potom pro každý podprostor $\mathbf{U} \in \mathcal{S}$ platí, že $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{U}$, odkud $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in UU$ a $a\mathbf{x} \in \mathbf{U}$. Odtud plyne, že také $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $a\mathbf{x} \in \bigcap \mathcal{S}$.

3. Buď $\mathcal{S}$ soubor všech podprostorů prostoru $\mathbf{V}$ obsahujících množinu X. Zřejmě $\mathbf{V} \in \mathcal{S}$ a tedy je tento soubor neprázdný. Podle bodu 2 je pak $\bigcap \mathcal{S}$ podprostorem ve $\mathbf{V}$. Pro každé $\mathbf{U} \in \mathcal{S}$ je $X \subseteq \mathbf{U}$ a proto $X \subseteq \bigcap \mathcal{S}$. Naopak kdykoli $X \subseteq \mathbf{U}$ pro nějaký podprostor $\mathbf{U}$ prostoru $\mathbf{V}$, pak $\mathbf{U} \in \mathcal{S}$ a tedy $\bigcap \mathcal{S} \subseteq \mathbf{U}$. Proto je $\bigcap \mathcal{S}$ nejmenší podprostor prostoru $\mathbf{V}$ obsahující množinu X.

□

Definice 12.3 *Nejmenší podprostor vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *obsahující množinu* $X \subseteq \mathbf{V}$ *nazýváme* lineární obal množiny X *a označujeme* $\mathbf{L}(X)$.

Tvrzení 12.4 *Je-li* X *podmnožina* $\mathbf{V}$, *pak platí*

$$\mathbf{L}(X) = \{a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k : 0 \leq k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{T}\}.$$

Důkaz. Položme

$$\mathbf{L}'(X) = \{a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k : 0 \leq k, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{T}\}.$$

Podprostor ve $\mathbf{V}$ obsahující množinu X obsahuje také všechny lineární kombinace prvků X. Proto $\mathbf{L}'(X) \subseteq \mathbf{L}(X)$. Naopak snadno nahlédneme, že množina $\mathbf{L}'(X)$ obsahuje nulový vektor (roven lineární kombinaci v případě, že $k = 0$) a je uzavřena na obě operace, sčítání a násobení skaláry. Protože jistě $X \subseteq \mathbf{L}'(X)$, je $\mathbf{L}(X) \subseteq \mathbf{L}'(X)$. Odtud plyne dokazované. □

Také pojem lineární kombinace vektorů můžeme definovat v libovolném vektorovém prostoru.

Definice 12.4 *Je-li* $\mathbf{V}$ *vektorový prostor nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$, *pak libovolný vektor* $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, *kde* $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{T}$ *nazýváme* lineární kombinace *vektorů* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbf{V}$.

Všimněte si, že v lineární kombinaci je vždy *konečný* počet vektorů. Nulový vektor $\mathbf{0}$ považujeme za lineární kombinaci *prázdného* systému vektorů. Podle Tvrzení 4.3 je tedy lineární obal $\mathbf{L}(X)$ množiny $X \subseteq \mathbf{V}$ rovný množině všech možných lineárních kombinací vektorů z X.

Definice 12.5 *Libovolná množina $X \subseteq \mathbf{V}$, pro kterou platí $\mathbf{L}(X) = \mathbf{V}$ se nazývá* množina generátorů *nebo* generující množina *ve* $\mathbf{V}$.

Dále přeneseme do obecných vektorových prostorů poznatky o lineární nezávislosti.

Definice 12.6 *Konečná množina vektorů $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ se nazývá* lineárně nezávislá *ve* $\mathbf{V}$, *pokud z rovnosti $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ plyne $a_1 = \cdots = a_k = 0$. Nekonečná množina $X \subseteq \mathbf{V}$ se nazývá* lineárně nezávislá *ve* $\mathbf{V}$, *pokud je každá její konečná podmnožina lineárně nezávislá. A libovolná množina X vektorů z $\mathbf{V}$ se nazývá* lineárně závislá *ve* $\mathbf{V}$, *pokud není lineárně nezávislá ve* $\mathbf{V}$.

Příklad 12.4 Význam tělesa pro lineární nezávislost.

Příklad 12.5 Lineárně nezávislá množina v $\mathbf{R}[x]$.

Důkazy následujících tvrzení lze najít u analogických tvrzení v kapitole o aritmetických vektorových prostorech. Tam jsme v důkazech používali pouze axiomy abstraktního vektorového prostoru.

Tvrzení 12.5 *Množina $X \subseteq \mathbf{V}$ je lineárně nezávislá ve $\mathbf{V}$ právě když pro každý vektor $\mathbf{x} \in X$ platí $\mathbf{x} \notin \mathbf{L}(X \setminus \{\mathbf{x}\})$.*

Důkaz. ($\Rightarrow$) Pro spor předpokládejme, že je množina X lineárně nezávislá a pro $\mathbf{x} \in \mathbf{L}(X \setminus \{\mathbf{x}\})$ pro nějaké $\mathbf{x} \in X$. Potom existuje $k \in \mathbf{N}$, po dvou různé vektory $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k \in X$ a skaláry $a_1, \dots, a_k \in \mathbf{T}$ tak, že $\mathbf{x} = a_1\mathbf{y}_1 + \cdots + a_k\mathbf{y}_k$. Potom je ale $\mathbf{x} - a_1\mathbf{y}_1 - \cdots - a_k\mathbf{y}_k = \mathbf{0}$ nulová netriviální lineární kombinace vektorů množiny X, což je spor s předpokladem její lineární nezávislosti.

($\Leftarrow$) Předpokládejme, že je množina X lineárně závislá. Potom existuje nulová netriviální lineární kombinace $a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ po dvou různých vektorů množiny X. Protože je daná lineární kombinace netriviální, je některý z koeficientů $a_1, \dots, a_n$ nenulový. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $a_n \neq 0$. Potom

$$\mathbf{x}_n = -\frac{a_1}{a_n}\mathbf{x}_1 - \cdots - \frac{a_{n-1}}{a_n}\mathbf{x}_{n-1} \in \mathbf{L}(X \setminus \{\mathbf{x}_n\}).$$

To je spor s předpokladem dokazované implikace. □

Definice 12.7 Báze *ve vektorovém prostoru* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *je lineárně nezávislá množina* X *generátorů ve* $\mathbf{V}$.

Příklad 12.6 Příklad báze v $\{\mathbf{0}\}$ a v $\mathbf{T}[x]$.

Každý vektorový prostor má nějakou bázi, obecně ale nebudeme dokazovat, vyžadovalo by to axiom výběru. Budeme se zabývat pouze prostory, které mají nějakou konečnou bázi.

Definice 12.8 *Vektorový prostor* $\mathbf{V}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *se nazývá* konečně-dimenzionální, *pokud v něm existuje nějaká konečná báze.*

Podobně také platí Steinitzova věta a její důsledky v libovolném vektorovém prostoru.

Věta 12.6 ***Steinitzova věta o výměně***
Nechť $\mathbf{U}$ *je podprostor* $\mathbf{V}$, $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subseteq \mathbf{U}$ *je množina lineárně nezávislá ve* $\mathbf{V}$, *a* $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\} \subseteq \mathbf{U}$ *generuje* $\mathbf{U}$. *Pak platí* $k \leq l$ *a po vhodném přeuspořádání vektorů* $\mathbf{y}_j$ *množina* $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ *generuje podprostor* $\mathbf{U}$.

Důkaz. Větu dokážeme indukcí podle k. Věta jistě platí v případě, že máme prázdnou lineárně nezávislou množinu.

Mějme lineárně nezávislou množinu $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k+1}\} \subseteq \mathbf{U}$ ve $\mathbf{V}$ a množinu generátorů $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ podprostoru $\mathbf{U}$. Předpokládejme, že po vhodném přeuspořádání vektorů $\mathbf{y}_j$ generuje množina $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ podprostor $\mathbf{U}$. Protože $\mathbf{x}_{k+1} \in \mathbf{U}$, existují skaláry $a_1, \ldots, a_l \in \mathbf{T}$ tak, že $\mathbf{x}_{k+1} = a_1\mathbf{x}_1 + \cdots a_k\mathbf{x}_k + a_{k+1}\mathbf{x}_{k+1} + \cdots + a_l\mathbf{x}_l$. Protože je množina $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k+1}\}$ lineárně nezávislá, existuje $k+1 \leq i \leq l$ tak, že $a_i \neq 0$. Bez újmy na obecnosti (vektory $\mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_l$ případně vhodně přeuspořádáme) můžeme předpokládat, že $i = k+1$. Potom ale $\mathbf{y}_{k+1} = a_{k+1}^{-1}(x_{k+1} - a_1\mathbf{x}_1 - \cdots - a_k\mathbf{x}_k - a_{k+2}\mathbf{x}_{k+2} - \cdots - a_l\mathbf{x}_l) \in \mathbf{L}(\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+2}, \ldots, \mathbf{y}_l\})$. Odtud je vidět, že množina $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{y}_{k+2}, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ generuje podprostor $\mathbf{U}$. Speciálně je $k+1 \leq l$ (všimněme si, že takto můžeme pokračovat dokud v $\mathbf{U}$ existuje $k+1$ prvková lineárně nezávislá množina). $\square$

Věta 12.7 *Všechny báze konečně-dimenzionálního vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *mají stejný počet prvků.*

Důkaz. Ze Steinitzovy věty o výměně plyne, že libovolná lineárně nezávislá podmnožina prostoru $\mathbf{V}$ má nejvýše tolik prvků jako nejmenší (co do počtu prvků) množina generátorů $\mathbf{V}$. Protože báze je dle definice lineárně nezávislá množina generátorů, musí mít právě tolik prvků jako nejmenší (co do počtu prvků) množina generátorů $\mathbf{V}$ nebo jako největší (co do počtu prvků) lineárně nezávislá podmnožina $\mathbf{V}$. Odtud je vidět, že mají všechny báze stejný počet prvků. □

Definice 12.9 *Počet prvků báze konečně-dimenzionálního vektorového prostoru* $\mathbf{V}$ *nazýváme* dimenze $\mathbf{V}$ *a značíme* $\dim \mathbf{V}$.

Věta 12.8 *Buď* $\mathbf{V}$ *konečně-dimenzionální vektorový prostor nad* $\mathbf{T}$. *Buď* $\mathcal{Y}$ *množina generátorů ve* $\mathbf{V}$ *a* $\mathcal{X}$ *její lineárně nezávislá podmnožina. Potom existuje báze* $\mathcal{Z}$ *prostoru* $\mathbf{V}$ *taková, že* $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{Y}$.

Důkaz. Nechť $l = \dim \mathbf{V}$. Buď $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_k\}$ maximální lineárně nezávislá podmnožina množiny $\mathcal{Y}$ taková, že $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Z}$. Protože podle Steinitzovy věty o výměně je každá lineárně nezávislá podmnožina prostoru $\mathbf{V}$ nejvýše l-prvková, taková množina $\mathcal{Z}$ jistě existuje. Zvolme libovolný vektor $\mathbf{y} \in \mathcal{Y} \setminus \mathcal{Z}$. Z maximality lineárně nezávislé množiny $\mathcal{Z}$ plyne, že je množina $\mathcal{Z} \cup \{\mathbf{y}\}$ lineárně závislá. Proto existuje netriviální lineární kombinace $a\mathbf{x} + b_1\mathbf{z}_1 + \cdots + b_k\mathbf{z}_k = \mathbf{0}$. Z lineární nezávislosti množiny $\mathcal{Z}$ plyne, že $a \neq 0$ (jinak bychom měli netriviální nulovou kombinaci jejích prvků). Odtud dostaneme, že $\mathbf{x} = a^{-1}(b_1\mathbf{z}_1 + \cdots + b_k\mathbf{z}_k) \in \mathbf{L}(\mathcal{Y})$. Proto je $\mathcal{Y} \subseteq \mathbf{L}(\mathcal{Z})$. Protože je $\mathcal{Y}$ generující množinou, je pak také $\mathcal{Z}$ generující množinou ve $\mathbf{V}$, a protože je to množina lineárně nezávislá, ja bází. □

Důsledek 12.9 *Buď* $\mathbf{V}$ *konečně dimenzionální prostor nad* $\mathbf{T}$. *Potom lze z každé množiny generátorů ve* $\mathbf{V}$ *vybrat bázi. Podobně lze rozšířit každou lineárně nezávislou podmnožinu* $\mathbf{V}$ *na bázi prostoru* $\mathbf{V}$.

Tvrzení 12.10 *Pro podmnožinu* $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ *konečně-dimenzionálního prostoru* $\mathbf{V}$ *jsou následující tři podmínky ekvivalentní*

1. $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ *je báze* $\mathbf{V}$,

2. $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ *je minimální (co do počtu prvků) generující množina ve* $\mathbf{V}$,

3. $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ *je minimální (vzhledem k inkluzi) generující množina ve* $\mathbf{V}$,

4. *$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ je maximální (co do počtu prvků) lineárně nezávislá podmnožina* $\mathbf{V}$*,*

5. *$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ je maximální (vzhledem k inkluzi) lineárně nezávislá podmnožina* $\mathbf{V}$*.*

Důkaz. ($1 \Rightarrow 2$) K ověření této implikace nám stačí zopakovat argumentaci z důkazu Věty 12.7. Dostaneme, že libovolná báze prostoru $\mathbf{V}$ musí mít právě tolik prvků jako nejmenší (co do počtu prvků) generující množina ve $\mathbf{V}$. Protože báze je sama generující množinou, dostaneme dokazovanou implikaci. Podobně ukážeme implikaci ($1 \Rightarrow 4$).

($2 \Rightarrow 3$) Každá minimální (co do počtu prvků) generující množina ve $\mathbf{V}$ je zřejmě také minimální (vzhledem k inkluzi) generující množinou ve $\mathbf{V}$.

($3 \Rightarrow 1$) Podle Důsledku 12.9 je možné vybrat z každé generující množiny ve $\mathbf{V}$ bázi. Každá minimální (vzhledem k inkluzi) generující množina ve $\mathbf{V}$ musí být totožná s bází kterou z ní vybereme.

($4 \Rightarrow 5$) Každá maximální (co do počtu prvků) lineárně nezávislá podmnožina $\mathbf{V}$ je zřejmě také maximální (vzhledem k inkluzi) lineárně nezávislou podmnožinou $\mathbf{V}$.

($5 \Rightarrow 1$) Opět podle Důsledku 12.9 je možné rozšířit každou lineárně nezávislou podmnožinu ve $\mathbf{V}$ na bázi tohoto prostoru. Maximální (vzhledem k inkluzi) lineárně nezávislá podmnožina $\mathbf{V}$ musí být totožná s bází na kterou ji lze rozšířit. □

Tvrzení 12.11 *Je-li* $\mathbf{U}$ *podprostor konečně-dimenzionálního prostoru* $\mathbf{V}$*, pak je* $\mathbf{U}$ *také konečně-dimenzionální a platí* $\dim \mathbf{U} \leq \dim \mathbf{V}$*.*

Důkaz. Buď $n = \dim \mathbf{V}$. Podle Důsledku 12.9 lze každou lineárně nezávislou podmnožinu v $\mathbf{U}$ rozšířit do báze prostoru $\mathbf{V}$. Proto je tedy každá lineárně nezávislá podmnožina prostoru $\mathbf{U}$ nejvýše n-prvková. Podle Tvrzení **??** je každá maximální (co do počtu prvků) lineárně nezávislá podmnožina v $\mathbf{U}$ bází tohoto prostoru. Odtud je vidět, že prostor $\mathbf{U}$ je konečně dimenzionální a $\dim \mathbf{U} \leq n$. □

Příklad 12.7 Podprostory vektorového prostoru $\mathbf{V}$ dimenze 2 nad tělesem $\mathbf{T}$.

Věta 12.12 ***O dimenzi součtu a průniku podprostorů*** *Jsou-li* $\mathbf{U}, \mathbf{W}$ *podprostory konečně-dimenzionálního prostoru* $\mathbf{V}$*, pak platí*

$$\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) + \dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = \dim \mathbf{U} + \dim \mathbf{W}.$$

Důkaz. Buď $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ báze průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Podle Důsledku **??** lze množinu $\mathcal{X}$ rozšířit jednak o lineárně nezávislou množinu $\mathcal{Y} = \{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\} \subseteq \mathbf{U}$ do báze $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ prostoru $\mathbf{U}$ a jednak o lineárně nezávislou množinu $\mathcal{Z} = \{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\} \subseteq \mathbf{V}$ do báze $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$ prostoru $\mathbf{V}$. Protože platí, že $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z} \subseteq \mathbf{U} \cup \mathbf{W} = \mathbf{L}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}) \cup \mathbf{L}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Z}) = \mathbf{L}(\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z})$, generuje množina $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \cup \mathcal{Z}$ celý podprostor $\mathbf{U} + \mathbf{V}$.

Pro spor předpokládejme, že existuje netriviální lineární kombinace $a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k + b_1\mathbf{y}_1 + \cdots + b_l\mathbf{y}_l + c_1\mathbf{z}_1 + \cdots + c_m\mathbf{z}_m = \mathbf{0}$. Nejprve dále předpokládejme, že existuje $1 \le i \le m$ tak, že $c_i \neq 0$ a položme $\mathbf{z} = c_1\mathbf{z}_1 + \cdots + c_m\mathbf{z}_m$. Protože je množina $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$ lineárně nezávislá, je nutně $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. Všimněme si, že je také $\mathbf{z} = -(a_1\mathbf{x}_1 + \cdots a_k\mathbf{x}_k + b_1\mathbf{y}_1 + \cdots + b_l\mathbf{y}_l) \in \mathbf{U}$ a tedy $\mathbf{z} \in \mathbf{U} \cap \mathbf{W}$. Protože je $\mathcal{X}$ bází průniku $\mathbf{U} \cap \mathbf{W}$, existují koeficienty $d_1, \ldots, d_k \in \mathbf{T}$ tak, že $\mathbf{z} = d_1\mathbf{x}_1 + \cdots + d_k\mathbf{x}_k$. Odtud dostáváme nulovou netriviální kombinaci $c_1\mathbf{z}_1 + \cdots + c_m\mathbf{z}_m - d_1\mathbf{x}_1 - \cdots - d_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ což je ve sporu s lineární nezávislostí množiny $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_m\}$. Proto nutně $c_1 = \ldots = c_m = 0$. Podobně ukážeme, že $b_1 = \ldots = b_l = 0$. Pak ale máme nulovou netriviální lineární kombinaci $a_1\mathbf{x}_1 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ prvků množiny $\mathcal{X}$, což je ve sporu s její lineární nezávislostí. Proto je množina $\{x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_l, z_1, \ldots, z_m\}$ lineárně nezávislá a protože, jak jsme již ukázali, generuje součet prostorů $\mathbf{U} + \mathbf{W}$, je jeho bází. Dostáváme, že $\dim \mathbf{U} = k + l$, $\dim \mathbf{W} = k + m$, $\dim(\mathbf{U} \cap \mathbf{W}) = k$ a $\dim(\mathbf{U} + \mathbf{W}) = k + l + m$. Dosazením dostaneme dokazovanou rovnost. $\square$

Tvrzení 12.13 *Je-li $\mathcal{X} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$, pak pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$ existují jednoznačně určené skaláry $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$ takové, že platí*

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Důkaz. Existence n-tice skalárů $a_1, \ldots, a_n$ splňující $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$ plyne z toho, že je množina $\mathcal{X}$ bází, a tedy generující množinou, prostoru $\mathbf{V}$. Ukážeme jednoznačnost takové n-tice. Předpokládejme, že $\mathbf{x} = b_1\mathbf{v}_1 + \cdots + b_n\mathbf{v}_n$ pro nějaké $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{T}$. Potom $(a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, odkud, vzhledem k lineární nezávislosti množiny $\mathcal{X}$, dostaneme, že $a_i = b_i$ pro všechna $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Definice 12.10 *Je-li $\mathcal{X} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ báze vektorového prostoru $\mathbf{V}$ nad tělesem $\mathbf{T}$ a $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$, pak jednoznačně určené skaláry $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$, pro které platí*

$$\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n,$$

nazýváme souřadnice vektoru $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ *a aritmetický vektor* $(a_1, \dots, a_n)^T \in \mathbf{T}^n$ *nazýváme* vektor souřadnic $\mathbf{x}$ vzhledem k bázi $\mathcal{X}$ *a označujeme jej* $[\mathbf{x}]_{\mathcal{X}}$.