Kapitola 4

Aritmetické vektorové prostory

V této kapitole se budeme více zabývat sloupcovými a řádkovými vektory matic s prvky z libovolného tělesa. Napřed ale drobná úprava terminologie a značení.

Definice 4.1 Aritmetický vektor *dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *je sloupcový vektor typu* $n \times 1$ *s prvky z tělesa* $\mathbf{T}$.

Aritmetické vektory budeme psát malými tučnými písmeny.

Definice 4.2 *Je-li* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *aritmetický vektor dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$*, pak číslo* x_i *nazýváme* i-tá souřadnice vektoru $\mathbf{x}$.

V celém následujícím textu budeme také používat termín *skalár* místo *prvek tělesa* $\mathbf{T}$, bude-li z kontextu jasné, jaké těleso máme na mysli. A protože v této a několika příštích kapitolách budeme pracovat pouze s aritmetickými vektory, budeme také často vynechávat přívlastek aritmetický.

Vektory dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ umíme sčítat a násobit skalárem. Připomňme si, že základní vlastnosti sčítání matic a součinu skaláru s maticí jsme shrnuli v Tvrzení 1.1 a Tvrzení 1.2. Na tyto vlastnosti se budeme často odvolávat stejně jako na Tvrzení 2.9

Definice 4.3 *Množinu všech aritmetických vektorů dimenze* n *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *budeme nazývat* aritmetický vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbf{T}$ *a označovat ji* $\mathbf{T}^n$*.*

Definice 4.4 *Neprázdná podmnožina U aritmetického prostoru $\mathbf{T}^n$ se nazývá podprostor $\mathbf{T}^n$ pokud pro každé $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$ platí, že také $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$ a rovněž pro každé $\mathbf{x} \in U$ a každý skalár $a \in \mathbf{T}$ platí také $a\mathbf{x} \in U$.*

Jinak řečeno, množina U musí být uzavřená na sčítání vektorů a jejich násobení skalárem. Každý podprostor musí obsahovat nulový vektor $\mathbf{0} = 0\mathbf{x}$ pro libovolný vektor $\mathbf{x} \in U$. Jednoprvková množina $\{\mathbf{0}\}$ stejně jako celý prostor $\mathbf{T}^n$ jsou podprostory $\mathbf{T}^n$.

Tvrzení 4.1 *Pro každou matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ nad tělesem $\mathbf{T}$ je množina všech řešení homogenní soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ podprostor $\mathbf{T}^n$.*

Tvrzení 4.2 *Buď $\mathbf{T}$ libovolné těleso.*

1. *Pro každý podprostor U prostoru $\mathbf{T}^n$ platí $\mathbf{0} \in U$,*
2. *průnik podprostorů $\mathbf{T}^n$ je opět podprostor $\mathbf{T}^n$,*
3. *pro každou podmnožinu $X \subseteq \mathbf{T}^n$ existuje nejmenší (v uspořádání inkluzí) podprostor $\mathbf{T}^n$, který ji obsahuje.*

Definice 4.5 *Nejmenší podprostor $\mathbf{T}^n$ obsahující množinu $X \subseteq \mathbf{T}^n$ nazýváme* lineární obal množiny *X a označujeme $\mathbf{L}(X)$.*

Tvrzení 4.3 *Jsou-li X, Y podmnožiny $\mathbf{T}^n$, pak platí*

1. $X \subseteq \mathbf{L}(X)$,
2. *je-li $X \subseteq Y$, pak $\mathbf{L}(X) \subseteq \mathbf{L}(Y)$,*
3. $\mathbf{L}(\mathbf{L}(X)) = \mathbf{L}(X)$,
4. $\mathbf{L}(X) = \{a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k : \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in X, a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{T}\}$.

Definice 4.6 *Pro každou matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ definujeme čtyři základní podprostory definované maticí $\mathbf{A}$:*

1. nulový prostor $\mathbf{N}(\mathbf{A})$ *jako podprostor $\mathbf{T}^n$ obsahující všechna řešení homogenní soustavy $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$,*
2. levý nulový prostor *jako podprostor $\mathbf{N}(\mathbf{A}^T) \subseteq \mathbf{T}^m$,*
3. sloupcový prostor $\mathbf{S}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{T}^m$ *jako lineární obal sloupcových vektorů matice $\mathbf{A}$,*

4. řádkový prostor $\mathbf{R}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{T}^n$ *jako podprostor* $\mathbf{S}(\mathbf{A}^T)$.

Definice 4.7 *Jsou-li* X, Y *podmnožiny* $\mathbf{T}^n$, *pak definujeme jejich součet* $X + Y$ *jako množinu* $\{\mathbf{x} + \mathbf{y} : \mathbf{x} \in X, \mathbf{y} \in Y\}$.

Tvrzení 4.4 *Součet podprostorů* $\mathbf{T}^n$ *je podprostor* $\mathbf{T}^n$.

Tvrzení 4.5 *Buď* $\mathbf{A}$ *libovolná matice typu* $m \times n$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *a* $\mathbf{b} \in \mathbf{T}^m$. *Pak platí*

1. *jsou-li* $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ *řešení soustavy* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *pak* $\mathbf{z} - \mathbf{y} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$,
2. *jsou-li* $\mathbf{y}, \mathbf{z}$ *řešení soustavy* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, *pak existuje* $\mathbf{u} \in \mathbf{N}(\mathbf{A})$ *takové, že* $\mathbf{z} = \mathbf{y} + \mathbf{u}$,
3. *množina všech řešení soustavy* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *se rovná* $\{\mathbf{y}\} + \mathbf{N}(\mathbf{A})$, *kde* $\mathbf{y}$ *je libovolné pevně zvolené řešení soustavy* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Definice 4.8 *Platí-li* $U = \mathbf{L}(X)$ *pro* $X \subseteq \mathbf{T}^n$, *pak říkáme, že* X generuje *podprostor* U. *Je-li* $\mathbf{y} \in \mathbf{L}(X)$, *pak říkáme, že* $\mathbf{y}$ lineárně závisí *na* X.

Všimněme si, že podle Tvrzení 4.3.3 vektor $\mathbf{y} \in \mathbf{T}^n$ lineárně závisí na $X \subseteq \mathbf{T}^n$ právě když lze $\mathbf{y}$ vyjádřit jako lineární kombinaci nějakých prvků z X.

Tvrzení 4.6 *Jsou-li* X, Y *podmnožiny* $\mathbf{T}^n$ *a* $Y \subseteq \mathbf{L}(X)$, *pak platí* $\mathbf{L}(X) = \mathbf{L}(X \cup Y)$.

Definice 4.9 *Množina vektorů* $X \subseteq \mathbf{T}^n$ *se nazývá* lineárně nezávislá *v* $\mathbf{T}^n$ *jestliže pro každé* $k \geq 1$, *každé vektory* $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in X$ *a každé skaláry* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *z rovnosti* $a_1\mathbf{x}_1 + a_2\mathbf{x}_2 + \cdots + a_k\mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ *plyne* $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$. *Množina, která není lineárně nezávislá, se nazývá* lineárně závislá *v* $\mathbf{T}^n$.

Je-li X lineárně nezávislá množina v $\mathbf{T}^n$, pak $\mathbf{0} \notin X$. Pokud $\mathbf{x} \in X$ pak $a\mathbf{x} \notin X$ pro libovolný skalár $a \neq 1$. Prázdná podmnožina je lineárně nezávislá v $\mathbf{T}^n$. Každá podmnožina lineárně nezávislé množiny v $\mathbf{T}^n$ je také lineárně nezávislůá v $\mathbf{T}^n$

Tvrzení 4.7 *Množina* $X \subseteq \mathbf{T}^n$ *je lineárně nezávislá v* $\mathbf{T}^n$ *právě když pro každý vektor* $\mathbf{x} \in X$ *platí* $\mathbf{x} \notin \mathbf{L}(X \setminus \{\mathbf{x}\})$.

Věta 4.8 ***Steinitzova věta o výměně***
Nechť U je podprostor $\mathbf{T}^n$, $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subseteq U$ je množina lineárně nezávislá v $\mathbf{T}^n$, a $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_l\} \subseteq U$ generuje U. Pak platí $k \leq l$ a po vhodném přeuspořádání vektorů $\mathbf{y}_j$ množina $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k+1}, \ldots, \mathbf{y}_l\}$ generuje podprostor U.

Důkaz. Indukcí podle k. □

Definice 4.10 *Jestliže množina $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subseteq U$ generuje podprostor $U \subseteq \mathbf{T}^n$ a je lineárně nezávislá v $\mathbf{T}^n$, pak ji nazýváme* báze *U.*

Příklad 4.1 Standardní báze v $\mathbf{T}^n$.

Věta 4.9 *Každý podprostor $U \subseteq \mathbf{T}^n$ má nějakou bázi. Všechny báze podprostoru U mají stejný počet prvků menší nebo rovný n, přičemž rovnost nastává právě když $U = \mathbf{T}^n$.*

Tvrzení 4.10 *Pro podmnožinu $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ podprostoru U prostoru $\mathbf{T}^n$ jsou následující tři podmínky ekvivalentní*

1. *$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ je báze U,*
2. *$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ je minimální (co do počtu prvků) generující množina v U,*
3. *$\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ je maximální (co do počtu prvků) lineárně nezávislá podmnožina U.*

Věta 4.11 *Je-li U podprostor $\mathbf{T}^n$ a $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\} \subseteq U$ je lineárně nezávislá v $\mathbf{T}^n$, pak lze $\{\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ rozšířit do báze U.*

Definice 4.11 *Počet prvků báze podprostoru $U \subseteq \mathbf{T}^n$ nazýváme* dimenze *U a značíme* $\dim U$.

Tvrzení 4.12 *Jsou-li $U \subseteq V$ podprostory $\mathbf{T}^n$, pak platí* $\dim U \leq \dim V$.

Věta 4.13 ***O dimenzi součtu a průniku podprostorů***
Jsou-li U, V podprostory $\mathbf{T}^n$, pak platí

$$\dim(U \cap V) + \dim(U + V) = \dim U + \dim V.$$

Tvrzení 4.14 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice typu* $m \times n$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$*, je-li* $\mathbf{E}$ *regulární matice řádu* m*, a* $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$*, pak platí*

1. *množina* $\{\mathbf{A}_{*j_1}, \mathbf{A}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j_k}\}$ *je lineárně nezávislá v* $\mathbf{T}^m$ *právě když množina* $\{(\mathbf{EA})_{*j_1}, (\mathbf{EA})_{*j_2}, \ldots, (\mathbf{EA})_{*j_k}\}$ *je lineárně nezávislá v* $\mathbf{T}^m$*,*

2. *množina* $\{\mathbf{A}_{*j_1}, \mathbf{A}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j_k}\}$ *generuje* $\mathbf{S}(\mathbf{A})$ *právě když množina* $\{(\mathbf{EA})_{*j_1}, (\mathbf{EA})_{*j_2}, \ldots, (\mathbf{EA})_{*j_k}\}$ *generuje* $\mathbf{S}(\mathbf{EA})$*,*

3. *množina* $\{\mathbf{A}_{*j_1}, \mathbf{A}_{*j_2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j_k}\}$ *je báze sloupcového prostoru* $\mathbf{S}(\mathbf{A})$ *právě když množina* $\{(\mathbf{EA})_{*j_1}, (\mathbf{EA})_{*j_2}, \ldots, (\mathbf{EA})_{*j_k}\}$ *je báze* $\mathbf{S}(\mathbf{EA})$*,*

4. $\dim \mathbf{S}(\mathbf{A}) = \dim \mathbf{S}(\mathbf{EA})$

5. $\mathbf{R}(\mathbf{A}) = \mathbf{R}(\mathbf{EA})$*.*

Tvrzení 4.15 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A}$ *je matice typu* $m \times n$ *a* $\mathbf{B}$ *je matice v řádkově odstupňovaném tvaru, kterou dostaneme z* $\mathbf{A}$ *pomocí elementárních řádkových operací. Následující podmínky jsou ekvivalentní:*

1. *vektor* $\mathbf{B}_{*j}$ *je bázový sloupec matice* $\mathbf{B}$*,*

2. *vektor* $\mathbf{B}_{*j}$ *není lineárně závislý na předchozích sloupcových vektorech* $\mathbf{B}_{*1}, \mathbf{B}_{*2}, \ldots, \mathbf{B}_{*j-1}$*,*

3. *vektor* $\mathbf{A}_{*j}$ *není lineárně závislý na předchozích sloupcových vektorech* $\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j-1}$*.*

Definice 4.12 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice typu* $m \times n$*, pak sloupcový vektor* $\mathbf{A}_{*j}$ *nazýváme* bázový sloupec matice $\mathbf{A}$*, jestliže není lineárně závislý na předchozích sloupcových vektorech* $\mathbf{A}_{*1}, \mathbf{A}_{*2}, \ldots, \mathbf{A}_{*j-1}$*.*

Definice 4.13 *Řekneme, že matice* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *typu* $m \times n$ *je v* redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru*, jestliže existuje nezáporné celé číslo* $k \le m$ *a čísla* $1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_m \le n$ *taková, že platí*

1. *pro každé* $i > k$ *platí* $\mathbf{B}_{i*} = \mathbf{0}$*, tj. všechny tyto řádky jsou nulové,*

2. *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, k$ *platí* $b_{ij_i} = 1$*,*

3. *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, k$ *a každé* $j < j_i$ *platí* $b_{ij} = 0$*,*

4. *pro každé* $l = 1, 2, \ldots, k$ *a každé* $i = 1, \ldots, j_l - 1$ *platí* $b_{ij_l} = 0$*.*

Tvrzení 4.16 *Každou matici* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *lze převést pomocí elementárních řádkových úprav do matice* $\mathbf{B}$, *která je v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru.*

Věta 4.17 *Pro každou matici* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *platí*

$$\dim \mathbf{S}(\mathbf{A}) = \dim \mathbf{R}(\mathbf{A}).$$

Důkaz. Najdeme regulární matici $\mathbf{E}$ řádu m takovou, že matice $\mathbf{B} = \mathbf{EA}$ je v redukovaném řádkově odstupňovaném tvaru. Taková matice existuje podle Tvrzení 4.16, Tvrzení 2.2 a Tvrzení 1.6.1.

Pro matici $\mathbf{B}$ platí rovnost $\dim \mathbf{S}(\mathbf{B}) = \dim \mathbf{R}(\mathbf{B})$. Podle Tvrzení 4.14.4 platí $\dim \mathbf{S}(\mathbf{B}) = \dim \mathbf{S}(\mathbf{EA}) = \dim \mathbf{S}(\mathbf{A})$.

Protože $\mathbf{R}(\mathbf{B}) = \mathbf{R}(\mathbf{EA}) = \mathbf{R}(\mathbf{A})$, platí také $\dim \mathbf{R}(\mathbf{B}) = \dim \mathbf{R}(\mathbf{A})$. □

Definice 4.14 *Číslo* $\dim \mathbf{S}(\mathbf{A})$ *nazýváme* hodnost matice $\mathbf{A}$ *a označujeme jej* $r(\mathbf{A})$.

Důsledek 4.18 *Pro každou matici* $\mathbf{A}$ *nad tělesem* $\mathbf{T}$ *platí*

1. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}^T)$,
2. $r(\mathbf{A})$ *se rovná počtu nenulových řádků v matici v řádkově odstupňovaném tvaru, kterou dostaneme z* $\mathbf{A}$ *pomocí elementárních řádkových operací.*

Věta 4.19 *Následující podmínky pro čtvercovou matici* $\mathbf{A}$ *řádu* n *jsou ekvivalentní:*

1. $\mathbf{A}$ *je regulární,*
2. *sloupcové vektory matice* $\mathbf{A}$ *jsou lineárně nezávislé,*
3. *řádkové vektory matice* $\mathbf{A}$ *jsou lineárně nezávislé*
4. $r(\mathbf{A}) = n$.

Tvrzení 4.20 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice typu* $m \times n$ *a* $\mathbf{B}$ *matice typu* $n \times p$, *pak platí*

$$r(\mathbf{AB}) \leq r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}).$$

Tvrzení 4.21 *Je-li* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *matice typu* $m \times n$, *pak platí*

$$r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}) - \dim(\mathbf{S}(\mathbf{A}) \cap \mathbf{S}(\mathbf{B})) \leq r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B}).$$

Věta 4.22 *Pro každou matici* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *platí*

$$\dim \mathbf{N}(\mathbf{A}) + r(\mathbf{A}) = n.$$

Věta 4.23 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A}$ *je matice typu* $m \times n$. *Pak platí*

1. $\dim \mathbf{S}(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$,
2. $\dim \mathbf{N}(\mathbf{A}) = n - r(\mathbf{A})$,
3. $\dim \mathbf{R}(\mathbf{A}) = \dim \mathbf{S}(\mathbf{A}^T) = r(\mathbf{A})$,
4. $\dim \mathbf{N}(\mathbf{A}^T) = m - r(\mathbf{A})$.

Věta 4.24 ***Frobeniova věta*** *Soustava lineárních rovnic* $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *je řešitelná právě když*

$$r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A}|\mathbf{b}).$$

Příklad 4.2 Vzorec pro n-tý prvek Fibonacciovy posloupnosti.