Kapitola 2

Soustavy lineárních rovnic

Soustavy lineárních rovnic jsme zavedli v Definici 1.9. Nejdříve si ukážeme dva případy, ve kterých lze soustavu řešit snadno. V případě, že matice soustavy je horní trojúhelníková s nenulovými prvky na hlavní diagonále, tj. tvaru

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n &= b_{n-1}, \\
a_{n,n}x_n &= b_n,
\end{aligned}
$$

Takovou soustavu řešíme *zpětnou substitucí*, postupně počítáme jednotlivé neznámé $x_n, x_{n-1}, \dots, x_1$ následovně

$$
\begin{aligned}
x_n &= a_{nn}^{-1} b_n, \\
x_{n-1} &= a_{n-1,n-1}^{n-1}(b_{n-1} - a_{n-1,n}x_n), \\
&\vdots \\
x_i &= a_{ii}^{-1}(b_i - a_{i,i+1}x_{i+1} - a_{i,i+2}x_{i+2} - \cdots - a_{in}x_n) \\
&\vdots \\
x_1 &= a_{11}^{-1}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \cdots - a_{1n}x_n).
\end{aligned}
$$

Všimněme si, že v okamžiku, kdy spočítáme hodnotu x_i, už v dalších výpočtech nepotřebujeme hodnotu b_i. Můžeme proto využít místa v paměti, kde byla zapsána hodnota b_i k zápisu hodnoty x_i. To vede k následujícímu algoritmu. Hodnotu vektoru neznámých $\mathbf{x}$ pak najdeme uloženou jako hodnotu $\mathbf{b}$. To vede k následujícímu algoritmu.

Algoritmus 2.1. Zpětná substituce

Vstup: Horní trojúhelníková matice $\mathbf{A}$ řádu n, vektor pravých stran $\mathbf{b}$ typu $n \times 1$,
Výstup: Řešení soustavy soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

for $i = n$ **to** 1
    if $a_{ii} = 0$ **set error**, **end**
    for $i = n$ **to** $i + 1$
        $b_i \leftarrow b_i - a_{ijb_j}$
    $b_i \leftarrow a_{ii}^{-1} b_i$
output b
end

Podobně snadno lze řešit soustavu s dolní trojúhelníkovou maticí pomocí *přímé substituce.*

Algoritmus 2.2. Přímá substituce

Vstup: Dolní trojúhelníková matice $\mathbf{A}$ řádu n, vektor pravých stran $\mathbf{b}$ typu $n \times 1$,
Výstup: Řešení soustavy soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$,

for $i = 1$ **to** n
    if $a_{ii} = 0$ **set error**, **end**
    for $i = 1$ **to** $i - 1$
        $b_i \leftarrow b_i - a_{ijb_j}$
    $b_i \leftarrow a_{ii}^{-1} b_i$
output b
end

V případě soustavy rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ s obecnou maticí $\mathbf{A}$ provádíme ekvivalentní úpravy tak, abychom dostali matici, která se "co nejvíce" blíží horní trojúhelníkové matici. Nejddříve definujeme, co je to ekvivalentní úprava.

Definice 2.1 Ekvivalentní úprava *soustavy rovnic je taková úprava, po které se množina všech řešení* původní soustavy *rovná množině všech řešení* upravené soustavy.

Ukazuje se, že při řešení soustav lineárních rovnic vystačíme s úpravami tří typů.

1. *Ekvivaletní úprava prvního typu* je prohození dvou rovnic soustavy,
2. *ekvivalentní úprava druhého typu* je vynásobení nějaké rovnice soustavy *nenulovým* číslem a,
3. *ekvivalentní úprava třetího typu* je přičtení a-násobku nějaké rovnice k nějaké *jiné rovnici.*

Všimněmě si, že efekt kterékoliv z těchto úprav můžeme odstranit použitím nějaké jiné ekvivalentní úpravy, tj. z upravené soustavy můžeme znovu dostat původní soustavu použitím nějaké jiné ekvivalentní úpravy. V případě první ekvivaletní úpravy prohodíme ještě jednou prohozené řádky, v případě druhé úpravy vynásobíme stejnou rovnici číslem a^{-1}, a v případě třetí úpravy přičteme ke stejné rovnici $(-a)$-násobek téže rovnice, kterou jsme přičítali. Tohoto pozorování využijeme při důkazu následujícího tvrzení.

Tvrzení 2.1 *Úpravy všech tří typů jsou ekvivalentní úpravy soustavy lineárních rovnic.*

Třem uvedeným typům úprav soustavy rovnic odpovídají elementární řádkové úpravy matice.

Definice 2.2 Elementární řádkovou úpravou matice $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *rozumíme kteroukoliv z následujících tří úprav*

1. *úprava prvního typu prohazuje k-tý a l-tý řádek matice pro $k \neq l$,*
2. *úprava druhého typu je vynásobení k-tého řádku číslem a pro $i = 1, 2, \ldots, m$,*
3. *úprava třetího typu je přičtení a-násobku l-tého řádku ke k-tému řádku pro $k \neq l$.*

V upravené matici je každý řádek lineární kombinací řádků původní matice. Podle Věty1.7.1 lze takovou úpravu matice získat tak, že ji vynásobíme zleva vhodnou čtvercovou maticí řádu m.

Definice 2.3 *Čtvercovou matici* $\mathbf{E}$ *řádu m nazýváme elementární matice, je-li jednoho ze tří následujících typů:*

1. *matice prvního typu* $\mathbf{E}_{kl} = (a_{ij})$, *kde* $a_{kl} = a_{lk} = 1$, $a_{ii} = 1$ *pro každé* $i \neq k, l$ *a všechny ostatní prvky jsou rovné nule, tj.*

$$\mathbf{E}_{kl} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2. *matice druhého typu* $\mathbf{E}_k(a) = (a_{ij})$, *kde* $\mathbf{E}_k(a)$ *je diagonální matice s prvky* $a_{kk} = a$, $a_{ii} = 1$ *pro* $i \neq k$, *a* $a_{ij} = 0$ *pro* $i \neq j$,

3. *matice třetího typu* $E_{kl}(a) = (a_{ij})$, *kde* $a_{ii} = 1$ *pro každé* $i = 1, \ldots, m$, $a_{kl} = a$, *a všechny ostatní prvky matice* $E_{kl}(a)$ *jsou nulové.*

Tvrzení 2.2 *Elementární řádkovou úpravu matice* $\mathbf{A}$ *dostaneme tak, že ji vynásobíme zleva příslušnou elementární maticí.*

Definice 2.4 *Řekneme, že matice* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *typu* $m \times n$ *je v* řádkově odstupňovaném tvaru, *jestliže existuje nezáporné celé číslo* $k \leq m$ *a čísla* $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leq n$ *taková, že platí*

1. *pro každé* $i > k$ *platí* $\mathbf{B}_{i*} = \mathbf{0}$, *tj. všechny tyto řádky jsou nulové,*

2. *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, k$ *platí* $b_{ij_i} \neq 0$,

3. *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, k$ *a každé* $j < j_i$ *platí* $b_{ij} = 0$.

Sloupce B_{*j_i} *nazýváme* bázové sloupce *matice* $\mathbf{B}$.

Algoritmus 2.3. Gaussova eliminace

Věta 2.3 *Gaussova eliminace převede libovolnou matici* $\mathbf{A}$ *typu* $m \times n$ *do řádkově odstupňovaného tvaru.*

Věta 2.4 *Soustava m lineárních rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ je řešitelná právě když Gaussova eliminace převede rozšířenou matici soustavy $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ do matice $(\mathbf{B}|\mathbf{c})$ v řádkově odstupňovaném tvaru, ve které sloupec pravých stran $\mathbf{c}$ není bázový sloupec.*

Algoritmus 2.4. Obecná zpětná substituce

Efekt zaokrouhlovacích chyb

Špatně podmíněné soustavy

Tvrzení 2.5 *Všechny elementární matice jsou regulární.*

Důsledek 2.6 *Pro každou matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ existuje regulární matice $\mathbf{E}$ taková, že matice $\mathbf{EA}$ je v řádkově odstupňovaném tvaru.*

Věta 2.7 *Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n jsou následující podmínky ekvivalentní:*

1. *matice $\mathbf{A}$ je regulární,*
2. *soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ má právě jedno řešení pro každou pravou stranu $\mathbf{b}$,*
3. *homogenní soustava $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ má právě jedno řešení,*
4. *Gaussova eliminace použitá na matici $\mathbf{A}$ vede k matici v řádkově odstupňovaném tvaru $\mathbf{B} = (b_{ij})$, která má všechny řádky nenulové,*
5. *matici $\mathbf{A}$ lze převést pomocí elementárních řádkových úprav do jednotkové matice $\mathbf{I}_n$,*
6. *existuje regulární matice $\mathbf{E}$, pro kterou platí $\mathbf{EA} = \mathbf{I}_n$,*
7. *existuje regulární matice $\mathbf{C}$, pro kterou platí $\mathbf{AC} = \mathbf{I}_n$.*

Algoritmus 2.5. Výpočet inverzní matice

Tvrzení 2.8 *Nechť $\mathbf{A}$ je čtvercová matice řádu n. Potom pro čtvercovou matici $\mathbf{B}$ řádu n platí $\mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$ právě když $\mathbf{BA} = \mathbf{I}_n$.*

Tvrzení 2.9 *Buď* $\mathbf{B}$ *čtvercová matice řádu* n*,* $\mathbf{A}$ *regulární matice řádu* n *a* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *čísla. Potom platí*

$$a_1\mathbf{B}_{*1} + a_2\mathbf{B}_{*2} + \cdots + a_n\mathbf{B}_{*m} = \mathbf{0}$$

právě když

$$a_1(\mathbf{AB})_{*1} + a_2(\mathbf{AB})_{*2} + \cdots + a_n(\mathbf{AB})_{*n} = \mathbf{0}.$$

Příklad 2.1 Soustava rovnic pro výpočet proudů v elektrickém obvodu.

Všimněte si, že praktické úlohy často vedou přirozeně na soustavu rovnic s regulární maticí. Proudy v elektrickém obvodu nějak běhají, tedy řešení existuje, a navíc běhají jednoznačně, nelze si v nějakém okruhu proud zvolit libovolně a dopočítat proudy ve zbylých okruzích. Soustava rovnic má tedy právě jedno řešení pro jakékoliv zdroje, tedy pro jakoukoliv pravou stranu.

Předchozí příklad ukazuje, že při řešení praktických problémů může nastat situace, kdy potřebujeme řešit soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ poté, co jsme již vyřešili soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. V tom případě je řešení pomocí Gaussovy eliminace značně neefektivní, při řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{c}$ bychom znovu museli převádět matici $\mathbf{A}$ do řádkově odstupňovaného tvaru, což jsme již dělali při řešení soustavy $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Existuje způsob, jak uchovat informace o průběhu Gaussovy eliminace ve formě speciálního rozkladu matice, tzv. LU-rozkladu, který usnadní řešení jiné soustavy se stejnou maticí soustavy a jinou pravou stranou.

Lemma 2.10 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *jsou dolní trojúhelníkové matice řádu* n *s jednotkami na hlavní diagonále. Potom platí*

1. *součin* $\mathbf{AB}$ *je také dolní trojúhelníkové matice s jednotkami na hlavní diagonále,*

2. *inverzní matice* $\mathbf{A}^{-1}$ *je také dolní trojúhelníková matice s jednotkami na hlavní diagonále.*

Věta 2.11 *Předpokládáme, že* $\mathbf{A}$ *je regulární čtvercová matice řádu* n *taková, že při Gaussově eliminaci vystačíme pouze s elementárními řádkovými úpravami třetího typu. Potom existují jednoznačně určené čtvercové matice* $\mathbf{L}, \mathbf{U}$ *řádu* n *takové, že platí*

1. $\mathbf{L}$ *je dolní trojúhelníková matice s jednotkami na hlavní diagonále,*

2. *$\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na hlavní diagonále,*

3. $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$.

Důkaz. Dva důkazy existence, jeden pomocí Lemma2.10, druhý konstruktivnější pomocí multiplikátorů vedoucí přímo k algoritmu. □

Definice 2.5 *Rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ popsaný v předchozí Větě2.11 nazýváme* LU-rozklad matice $\mathbf{A}$.

Algoritmus 2.6. Výpočet LU-rozkladu

Analýzou konstruktivního důkazu předchozí věty a za použití následující definice můžeme předpoklad Věty2.11 formulovat bez odkazu na průběh Gaussovy eliminace.

Definice 2.6 *Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ čtvercová matice řádu n, pak pro libovolné $m = 1, 2, \ldots$ definujeme* hlavní minor *matice $\mathbf{A}$ jako matici $\mathbf{A}_m = (a_{ij})$ řádu m tvořenou prvky ležícími v prvních m řádcích a prvních m sloupcích matice $\mathbf{A}$. Tj.*

$$\mathbf{A}_1 = (a_{11}), \mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} \cdots$$

Věta 2.12 *LU-rozklad matice $\mathbf{A}$ řádu n existuje právě tehdy když je každý hlavní minor matice $\mathbf{A}$ regulární.*

Pokud známe LU-rozklad $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ matice $\mathbf{A}$, můžeme snadno vyřešit soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Přepíšeme si ji do tvaru $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ a položíme $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$. Původní soustavu $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ pak vyřešíme postupným řešením dvou soustav

$$\begin{aligned} \mathbf{Ly} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{Ux} &= \mathbf{y}, \end{aligned}$$

z nichž tu první vyřešíme pomocí přímé substituce ($\mathbf{U}$ je horní trojúhelníková matice s nenulovými prvky na hlavní diagonále) a druhou pomocí zpětné substituce.

Příklad 2.2 Počty operací pro Gaussovu eliminaci, výpočet inverzní matice, přímou a zpětnou substituci, LU-rozklad.