Kapitola 1

Počítání s maticemi

Definice 1.1 Matice typu $m \times n$ *je soubor* mn *čísel uspořádaný do obdélníkové tabulky o* m *řádcích a* n *sloupcích. Matice typu* $m \times m$ *se nazývá* čtvercová matice *řádu* m. *Matice typu* $m \times 1$ *se nazývá* sloupcový vektor *a matice typu* $1 \times n$ *se nazývá* řádkový vektor.

Matice budeme značit velkými tučnými písmeny $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$, atd. Prvky matic budeme značit malými písmeny. Tak například, napíšeme-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$, znamená to, že v matici $\mathbf{A}$ je v i-tém řádku a j-tém sloupci prvek a_{ij}. Pokud budeme chtít v označení matice uvést i její typ, tak budeme psát $\mathbf{A}_{m\times n}$, případně $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m\times n}$.

Definice 1.2 *Jsou-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *a* $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *dvě matice stejného typu* $m\times n$, *pak definujeme* součet matic $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ *jako matici* $(a_{ij} + b_{ij})$ *typu* $m \times n$.

Dále definujeme součin $b\mathbf{A}$ matice $\mathbf{A}$ *libovolného typu* $m \times n$ s číslem b *jako matici* $b\mathbf{A} = (ba_{ij})$ *typu* $m \times n$.

Ještě si zavedeme označení pro *nulovou matici* typu $m\times n$, tj. pro matici, jejíž všechny prvky jsou rovné číslu 0. Nulovou matici budeme značit $\mathbf{0}_{m\times n}$. A dále definujeme matici opačnou k matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ jako matici $-\mathbf{A} = (-a_{ij})$ typu $m \times n$.

Definice 1.3 *Řekneme, že dvě matice* $\mathbf{A} = (a_{ij}), \mathbf{B} = (b_{ij})$ *se rovnají, jestliže mají stejný typ* $m \times n$ *a platí* $a_{ij} = b_{ij}$ *pro každé* $i = 1, 2, \ldots, m$ *a každé* $j = 1, \ldots, n$,

Tvrzení 1.1 *Jsou-li* $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ *matice téhož typu* $m \times n$, *pak platí*

1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$,

2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$,
3. $\mathbf{A}+\mathbf{0}_{m\times n}=\mathbf{A}$,
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{0}_{m\times n}$.

Tvrzení 1.2 *Pro libovolné dvě matice* $\mathbf{A},\mathbf{B}$ *stejného typu* $m\times n$ *a libovolná dvě čísla* a,b *platí*

1. $(a+b)\mathbf{A}=a\mathbf{A}+b\mathbf{A}$,
2. $a(\mathbf{A}+\mathbf{B})=a\mathbf{A}+a\mathbf{B}$,
3. $a(b\mathbf{A})=(ab)\mathbf{A}$,
4. $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Následující definice je zobecněním vztahu mezi sloupcovým a řádkovým zápisem vektorů.

Definice 1.4 Transponovaná matice *k matici* $\mathbf{A}$ *typu* $m\times n$ *je matice* $\mathbf{A}^T=(b_{ij})$ *typu* $n\times m$, *kde* $b_{ij}=a_{ji}$ *pro libovolné indexy* $i=1,2,\ldots,n$ *a* $j=1,2,\ldots,m$.

Tvrzení 1.3 *Pro libovolné dvě matice* $\mathbf{A},\mathbf{B}$ *stejného typu* $m\times n$ *a každé číslo* b *platí*

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$,
2. $(b\mathbf{A})^T=b\mathbf{A}^T$,
3. $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$.

Definice 1.5 *Je-li* $\mathbf{A}$ *matice typy* $m\times n$ *a* $\mathbf{B}$ *matice typu* $n\times p$, *pak definujeme* součin matic $\mathbf{AB}=(c_{ik})$ *jako matici typu* $m\times p$, *kde*

$$c_{ik}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}$$

pro každé $i=1,2,\ldots,m$ *a každé* $k=1,2,\ldots,p$.

Dále definujeme jednotkovou matici $\mathbf{I}_n$ *řádu* n *jako čtvercovou matici* (a_{ij}) *řádu* n, *kde* $a_{ii}=1$ *pro každé* i *a* $a_{ij}=0$ *kdykoliv* $i\neq j$, *tj.*

$$\mathbf{I}_n=\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

Prvky jednotkové matice také označujeme pomocí Kroneckerova symbolu δ_{ij}. Ten se rovná 1 pokud $i = j$ a rovná se 0, pokud $i \neq j$.

Tvrzení 1.4 *Jsou-li* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *matice typu* $m \times n$, $\mathbf{C}$ *matice typu* $n \times p$, $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ *matice typu* $p \times q$ *a* a *číslo, pak platí*

1. $(\mathbf{BC})\mathbf{D} = \mathbf{B}(\mathbf{CD})$,
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$,
3. $\mathbf{C}(\mathbf{D} + \mathbf{E}) = \mathbf{CD} + \mathbf{CE}$,
4. $a(\mathbf{BC}) = (a\mathbf{B})\mathbf{C}$,
5. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$,
6. $\mathbf{I}_m\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{I}_n = \mathbf{A}$.

Pro čtvercovou matici $\mathbf{A}$ řádu n a kladné celé číslo k symbolem $\mathbf{A}^k$ označujeme součin k matic $\mathbf{A}$, tj. k-tou mocninu matice $\mathbf{A}$. Dále označíme $\mathbf{A}^0$ jednotkovou matici $\mathbf{I}_n$ téhož řádu n.

Příklad 1.1 Fibonacciova posloupnost

Příklad 1.2 Často používanou rovnost

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

můžeme snadno ověřit pomocí matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $m \times n$.

V dvojité sumě nalevo vždy napřed sečteme prvky matice $\mathbf{A}$ po řádcích - suma $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}$ je součet všech prvků matice $\mathbf{A}$, které leží v i-tém řádku. A poté sečteme tyto řádkové sumy. Na pravé straně napřed sečteme každý sloupec zvlášť a poté sečteme sloupcové sumy. V obou případech dostaneme součet všech prvků matice $\mathbf{A}$.

Definice 1.6 *Čtvercová matice* $\mathbf{A}$ *řádu* n *nazývá* regulární (invertovatelná), *jestliže existuje čtvercová matice* $\mathbf{B}$ *téhož řádu* n *taková, že platí* $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{I}_n$. *Matici* $\mathbf{B}$ *pak nazýváme* inverzní matice k $\mathbf{A}$ *a označujeme ji* $\mathbf{A}^{-1}$. *Čtvercová matice, která není regulární, se nazývá* singulární.

V případě regulární matice $\mathbf{A}$ můžeme definovat i záporné mocniny $\mathbf{A}^{-k}$ jako $(\mathbf{A}^{-1})^k$.

Tvrzení 1.5 *Inverzní matice k regulární matici je určena jednoznačně.*

Důkaz. Je-li $\mathbf{A}$ regulární matice řádu n a jsou-li $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ inverzní matice k $\mathbf{A}$, pak platí

$$\mathbf{C} = \mathbf{I}_n\mathbf{C} = (\mathbf{BA})\mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{AC}) = \mathbf{BI}_n = \mathbf{B}.$$

□

Tvrzení 1.6 *Jsou-li $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ regulární matice a b nenulové číslo, pak platí*

1. *součin $\mathbf{AB}$ je také regulární matice a $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,*
2. *matice $b\mathbf{A}$ je také regulární a $(b\mathbf{A})^{-1} = b^{-1}\mathbf{A}^{-1}$,*
3. *transponovaná matice $\mathbf{A}^T$ je také regulární matice a platí $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$,*
4. *matice $\mathbf{A}^{-1}$ je také regulární a platí $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.*

Definice 1.7 *Je-li $\mathbf{A} = (a_{ij})$ matice typu $m \times n$, pak pro každé $i = 1, \ldots, m$ nazýváme vektor $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ i-tý* řádkový vektor matice $\mathbf{A}$ *a označujeme jej $\mathbf{A}_{i*}$. Podobně definujeme j-tý* sloupcový vektor matice $\mathbf{A}$ *jako vektor $\mathbf{A}_{*j} = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})^T$ pro $j = 1, \ldots, m$.*

Definice 1.8 *Jsou-li $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k$ matice stejného typu a $b_1, b_2, \ldots, b_k$ čísla, pak součet*

$$b_1\mathbf{A}_1 + b_2\mathbf{A}_2 + \cdots + b_k\mathbf{A}_k$$

se nazývá lineární kombinace matic $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$. *Čísla $b_1, \ldots, b_k$ nazýváme* koeficienty lineární kombinace. *Jsou-li matice $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k$ vektory, pak mluvíme o* lineární kombinaci vektorů.

Věta 1.7 *Je-li $\mathbf{A} = (a_ij)$ matice typy $m \times n$ a $\mathbf{B} = (b_{jk})$ matice typu $n \times p$, pak*

1. *pro každé $k = 1, \ldots, p$ platí $(\mathbf{AB})_{*k} = b_{1k}\mathbf{A}_{*1} + b_{2k}\mathbf{A}_{*2} + \cdots + b_{nk}\mathbf{A}_{*n} = \mathbf{AB}_{*k}$,*
2. *pro každé $i = 1, \ldots, m$ platí $(\mathbf{AB})_{i*} = a_{i1}\mathbf{B}_{1*} + a_{i2}\mathbf{B}_{2*} + \cdots + a_{im}\mathbf{B}_{m*} = \mathbf{A}_{i*}\mathbf{B}$.*

Zkráceně můžeme předchozí větu formulovat tak, že k-tý sloupec součinu matic $\mathbf{AB}$ je lineární kombinací sloupců (levého činitele) $\mathbf{A}$ s koeficienty v k-tém sloupci matice $\mathbf{B}$ a i-tý řádek součinu $\mathbf{AB}$ se rovná lineární kombinaci řádků (pravého činitele) $\mathbf{B}$ s koeficienty v i-tém řádku matice $\mathbf{A}$.

Definice 1.9 Soustavou m lineárních rovnic *o* n *neznámých rozumíme soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

kde a_{ij} *a* b_i *jsou známá čísla a* x_j *jsou neznámá čísla.*

Matici $\mathbf{A} = a_{ij}$ *nazýváme* matice soustavy, *sloupcový vektor* $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_m)^T$ *nazýváme* vektor pravých stran, *vektor* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *nazýváme* vektor neznámých *a matici* $(\mathbf{A}|\mathbf{b})$ *nazýváme* rozšířená matice soustavy. *Je-li vektor pravých stran* $\mathbf{b}$ *nulový, mluvíme o* homogenní soustavě lineárních rovnic.

Pomocí této terminologie můžeme soustavu lineárních rovnic z předchozí definice zapsat v maticovém tvaru

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

kde $\mathbf{A}$ je matice soustavy, $\mathbf{x}$ je vektor neznámých a $\mathbf{b}$ je vektor pravých stran.

Uvedeme ještě definice několika základních typů matic.

Definice 1.10 *Čtvercovou matici* $\mathbf{A} = a_{ij}$ *řádu* n *nazýváme*

1. symetrická, *platí-li* $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$, *tj.* $a_{ij} = a_{ji}$ *pro každé* $i, j = 1, \ldots, n$,
2. kososymetrická, *platí-li* $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$, *tj.* $a_{ij} = -a_{ji}$ *pro každé* $i, j = 1, \ldots, n$,
3. horní trojúhelníková, *platí-li* $a_{ij} = 0$ *kdykoliv* $i > j$,
4. dolní trojúhelníková, *platí-li* $a_{ij} = 0$ *kdykoliv* $i < j$,
5. diagonální, *pokud* $a_{ij} = 0$ *kdykoliv* $i \neq j$.

U libovolné čtvercové matice řádu n říkáme, že prvky a_{ii} leží na hlavní diagonále *nebo že tvoří* hlavní diagonálu.

Úloha 1.1 Dokažte, že

1. součin symetrických matic je opět symetrická matice,
2. součin kososymetrických matic je symetrická matice,
3. součin horních trojúhelníkových matic je horní trojúhelníková matice,
4. součin dolních trojúhelníkových matic je dolní trojúhelníková matice,
5. součin diagonálních matic je diagonální matice,
6. pro každou čtercovou matici $\mathbf{A}$ je součet $\mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ symetrická matice.

Rozklad matice do bloků

Někdy je výhodné nahlížet matici jako na rozdělenou do bloků. Rozdělíme-li matici $\mathbf{A}$ typu $m \times n$ podélně na prvních m_1 a zbylých $m_2 = m - m_1$ řádků a vertikálně na prvních n_1 sloupců a zbylých $n_2 = n - n_1$ sloupců, skládá se matice $\mathbf{A}$ ze čtyř bloků

$$\mathbf{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} n_1 & n_2 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} \end{array}$$

Každý blok $\mathbf{A}_{ij}$, $i, j = 1, 2$ je matice typu $m_i \times n_j$.

Je-li $\mathbf{B}$ matice typu $n \times p$ a rozdělíme-li ji do čtyř bloků následovně

$$\mathbf{B} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12} \\ \hline \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \end{array},$$

kde $p_1 + p_2 = p$, pak lze snadno ověřit, že součin $\mathbf{AB}$ lze rozdělit do bloků následovně

$$\mathbf{AB} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} p_1 & p_2 \end{array} & \\ \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} \\ \hline \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{array}\right) & \begin{array}{c} m_1 \\ m_2 \end{array} \end{array},$$

a pro každé $i, j = 1, 2$ platí

$$\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{A}_{i1}\mathbf{B}_{1j} + \mathbf{A}_{i2}\mathbf{B}_{2j}.$$

Formulka pro součin matic rozdělených na čtyři bloky je speciálním případem podobné formule pro libovolné rozklady matic na bloky.

Definice 1.11 *Je-li* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *matice typu* $m \times n$, $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ *a* $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$, *pak definujeme* rozklad matice $\mathbf{A}$ na bloky určený součty $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ *a* $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ *jako matici*

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \cdots & \mathbf{A}_{1s} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \cdots & \mathbf{A}_{2s} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline \mathbf{A}_{r1} & \mathbf{A}_{r2} & \cdots & \mathbf{A}_{rs} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array},$$

kde matice $\mathbf{A}_{ij}$ *má typ* $m_i \times n_j$ *a na místě* (k, l) *v matici* $\mathbf{A}_{ij}$ *je prvek z místa* $(m_1 + \cdots + m_{i-1} + k, n_1 + \cdots + n_{j-1} + l)$ *v matici* $\mathbf{A}$. *Maticím* $\mathbf{A}_{ij}$ *říkáme* bloky rozkladu. *Píšeme také* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})$.

Následující tvrzení má jednoduchý důkaz, který pouze vyžaduje správně si napsat jednotlivé prvky ve všech maticéch a jejich blocích.

Tvrzení 1.8 *Předpokládejme, že* $\mathbf{A}$ *je matice typu* $m \times n$, $\mathbf{B}$ *je matice typu* $n \times p$, $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ *a* $p = p_1 + \cdots + p_t$. *Je-li* $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_{ij})$ *rozklad matice* $\mathbf{A}$ *určený součty* $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ *a* $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_{jk})$ *je rozklad* $\mathbf{B}$ *určený součty* $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ *a* $p = p_1 + \cdots + p_t$ *a* $\mathbf{AB} = \mathbf{C}_{ik}$ *je rozklad součinu* $\mathbf{AB}$ *určený součty* $m = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$ *a* $p = p_1 + \cdots + p_t$, *pak platí že pro každé* $i = 1, 2, \ldots, r$ *a pro každé* $k = 1, 2, \ldots, t$

$$\mathbf{C}_{ik} = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{jk}$$